

1

Números naturales

El profeta de los números

Ramanujan se levantó, dio tres pasos que le colocaron en el centro del despacho de Hardy, en el Trinity College de Cambridge, y continuó el relato de su viaje.

En un alarde de equilibrio, el barco, un vapor que hace la ruta entre la India e Inglaterra, continuaba su camino sobre una imaginaria línea recta que el temporal parecía querer quebrar.

Yo pasé la tormenta en el camarote, petrificado, sin poder hacer otro movimiento que los provocados por el vaivén del barco, apretando contra mi pecho el cuaderno de los descubrimientos mientras pensaba que, tal vez, todo se perdería en el fondo del mar.

La noche avanzaba y el sueño se fue apoderando de mi consciencia, al despertar las nubes habían dejado paso al sol y los negros presagios de mi mente habían sido sustituidos por estas revelaciones.

En ese momento, el joven indio le enseñó dos páginas del ajado cuaderno a su interlocutor.

El relato del viaje es apasionante pero no se puede comparar con estos sorprendentes resultados, si una inspiración divina te los ha revelado, en verdad se puede decir que eres «el profeta de los números».

DESCUBRE LA HISTORIA...

1. Busca información sobre los personajes que aparecen en el texto: Harold Hardy y Srinivasa Ramanujan.
2. ¿A qué episodio de la vida de estos dos personajes crees que corresponde el relato? ¿A qué viaje se refiere el joven Ramanujan?
3. Investiga sobre las aportaciones de Srinivasa Ramanujan al estudio de los números naturales.



Antes de empezar la unidad...

OPERACIONES CON NÚMEROS NATURALES

Suma

$$\begin{array}{r} 5806 \\ + 2479 \\ \hline 8285 \end{array}$$

← Sumando
← Sumando
← Suma o total

Resta

$$\begin{array}{r} 9423 \\ - 7561 \\ \hline 1862 \end{array}$$

← Minuendo
← Sustraendo
← Diferencia

Multiplicación

$$\begin{array}{r} 2457 \\ \times 603 \\ \hline 7371 \\ 147420 \\ \hline 1481571 \end{array}$$

← Factor
← Factor
← Producto

División

$$\begin{array}{r} 46957 \overline{) 43} \\ 395 \\ \hline 087 \\ 01 \end{array}$$

Dividendo → 43 ← Divisor
← Cociente
Resto → 01

Para restar números naturales, el minuendo tiene que ser mayor que el sustraendo.

Propiedad conmutativa de la suma

El orden de los sumandos no altera la suma.

$$\begin{array}{c} 43 \\ \text{Sumandos} \end{array} + \begin{array}{c} 28 \\ \text{Sumandos} \end{array} = 28 + 43 = \begin{array}{c} 71 \\ \text{Suma} \end{array}$$

Propiedad asociativa de la suma

El orden en el que agrupamos los sumandos no altera la suma.

$$\begin{array}{c} \text{Sumandos} \\ (21 + 37) + 42 = 21 + (37 + 42) \\ 58 + 42 = 21 + 79 \\ 100 = 100 \end{array}$$



EVALUACIÓN INICIAL

1 Escribe cómo se leen los siguientes números.

- a) 23980003 c) 250235200 e) 20102
b) 456002 d) 4025012 f) 6090

2 Realiza las siguientes operaciones.

- a) $759 + 3824$ f) $782 \cdot 450$
b) $8329 + 4516 + 738$ g) $695 \cdot 908$
c) $4261 - 569$ h) $5928 : 38$
d) $20347 - 865$ i) $22863 : 56$
e) $316 \cdot 273$ j) $64456 : 179$

3 Calcula el término que falta.

- a) $62734 + \square = 68251$ c) $584 \cdot \square = 179288$
b) $\square - 5397 = 8406$ d) $\square : 143 = 572$

PLAN DE TRABAJO

En esta unidad aprenderás a...

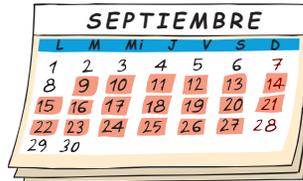
- Escribir números romanos en el sistema de numeración decimal.
- Calcular potencias de números naturales.
- Realizar operaciones con potencias.
- Realizar operaciones combinadas con números naturales.

1 Números naturales. Sistemas de numeración

Los números naturales surgieron debido a la necesidad que siente el ser humano de contar lo que le rodea.

EJEMPLO

1 ¿Cuántos días hay desde el 8 de septiembre hasta el 27 de septiembre?



Del 8 al 27 de septiembre hay 19 días.

El conjunto de los números naturales es ilimitado, es decir, no tiene fin, porque dado un número cualquiera, siempre es posible obtener el siguiente sumándole una unidad a ese número.

Para escribir números naturales se utilizan los **sistemas de numeración**.

1.1 Sistema de numeración decimal

En el **sistema de numeración decimal** se utilizan diez cifras distintas para representar una cantidad: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Para expresar números naturales solemos utilizar el sistema de numeración decimal.



ANTES, DEBES SABER...

Cuáles son los órdenes de unidades del sistema de numeración decimal y sus equivalencias

Centena de millón	Decena de millón	Unidad de millón	Centena de millar	Decena de millar	Unidad de millar	Centena	Decena	Unidad
-------------------	------------------	------------------	-------------------	------------------	------------------	---------	--------	--------

En el sistema de numeración decimal cada 10 unidades de un orden forman una unidad del orden inmediato superior.

$$1 D = 10 U$$

$$1 C = 10 D = 100 U$$

$$1 UM = 10 C = 1000 U$$

$$1 DM = 10 UM = 10000 U$$

$$1 CM = 10 DM = 100000 U$$

$$1 U. \text{ de millón} = 10 CM = 1000000 U$$

$$1 D. \text{ de millón} = 10 U. \text{ de millón} = 10000000 U$$

$$1 C. \text{ de millón} = 10 D. \text{ de millón} = 100000000 U$$

LO QUE DEBES SABER RESOLVER

1 Contesta.

- ¿Cuántas decenas hay en 1 unidad de millar?
- ¿Cuántas centenas hay en 1 decena de millar?
- ¿Cuántas centenas hay en 1 unidad de millón?

2 Completa estas igualdades.

- $3 UM = \square C$
- $8 CM = \square D$
- $3 U. \text{ de millón} = \square DM$
- $7 DM = \square C$
- $6 UM = \square D$
- $5 C = \square D$

ANTES, DEBES SABER...

Cómo se descompone un número en su orden de unidades

En el sistema de numeración decimal, a cada cifra de un número le corresponde un orden de unidades.

EJEMPLO

1 Descompón estos números en su orden de unidades.

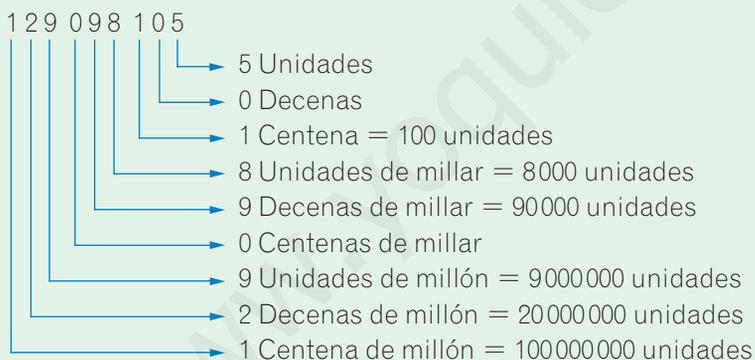
- a) $14 = 1 D + 4 U$
- b) $256 = 2 C + 5 D + 6 U$
- c) $1807 = 1 UM + 8 C + 7 U$
- d) $103410 = 1 CM + 3 UM + 4 C + 1 D$
- e) $3020070 = 3 U. \text{ de millón} + 2 DM + 7 D$
- f) $906025000 = 9 C. \text{ de millón} + 6 U. \text{ de millón} + 2 DM + 5 UM$

El sistema de numeración decimal es **posicional**, es decir, el valor de cada cifra depende del lugar o posición que ocupa en el número.

EJEMPLO

2 Calcula el valor posicional de las cifras del número 129 098 105.

Centena de millón	Decena de millón	Unidad de millón	Centena de millar	Decena de millar	Unidad de millar	Centena	Decena	Unidad
1	2	9	0	9	8	1	0	5



El valor de cada cifra depende de su posición en el número.



LO QUE DEBES SABER RESOLVER

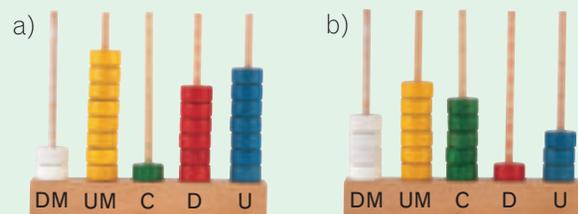
1 Señala el valor de la cifra 5 en estos números.

- a) 15890900 b) 509123780 c) 163145900

2 Escribe tres números que tengan 4 unidades de millar, 7 decenas y 4 unidades.

3 Escribe cinco números cuya cifra de las centenas de millón sea 7 y otros cinco cuya cifra de las centenas de millar sea 9.

4 Indica cómo se leen los números representados en estos ábaco.



1.2 Sistema de numeración romano

Aunque habitualmente para escribir números naturales utilizamos el sistema de numeración decimal, a lo largo de la historia se han empleado otros sistemas de numeración.



Para expresar cantidades mediante el **sistema de numeración romano** se utilizan siete letras distintas con estos valores:

$$\begin{array}{llll} I = 1 & V = 5 & X = 10 & L = 50 \\ C = 100 & D = 500 & M = 1000 & \end{array}$$

El sistema de numeración romano es **aditivo**, es decir, cada letra tiene siempre el mismo valor.

Reglas para escribir números en el sistema de numeración romano

- **Suma.** Una letra escrita a la derecha de otra de igual o mayor valor, le suma a esta su valor.

$$XVI = 10 + 5 + 1 = 16 \quad CLV = 100 + 50 + 5 = 155$$

- **Repetición.** Las letras I, X, C y M se pueden escribir hasta tres veces seguidas. Las demás letras no se pueden repetir.

$$III = 3 \quad XXX = 30 \quad CCC = 300$$

- **Sustracción.** La letra I escrita a la izquierda de V o X, la X a la izquierda de L o C, y la C a la izquierda de D o M, les resta a estas su valor.

$$IV = 4 \quad XC = 90 \quad CM = 900$$

- **Multiplicación.** Una raya colocada encima de una letra o grupo de letras multiplica su valor por mil.

$$\overline{VI} = 6000 \quad \overline{VI} = 5001 \quad \overline{XL} = 40000$$

EJEMPLOS

- 3** Expresa estos números romanos en el sistema decimal.

- a) LXV $\longrightarrow 50 + 10 + 5 = 65$
- b) XXI $\longrightarrow 10 + 10 + 1 = 21$
- c) CCVII $\longrightarrow 100 + 100 + 5 + 1 + 1 = 207$
- d) MDIII $\longrightarrow 1000 + 500 + 1 + 1 + 1 = 1503$
- e) IX $\longrightarrow 10 - 1 = 9$
- f) XLVII $\longrightarrow 50 - 10 + 5 + 1 + 1 = 47$
- g) $\overline{VCCCXL} \rightarrow 5 \cdot 1000 + 100 + 100 + 100 + 50 - 10 = 5340$

- 3** Expresa las siguientes cantidades como números romanos:

$$\begin{array}{lll} 14 = XIV & 94 = XCIV & 119 = CXIX \\ 895 = DCCCXCV & 2011 = MMXI & 9141 = \overline{IXCXL}I \end{array}$$

LO QUE DEBES SABER RESOLVER

- 5** Traduce al sistema de numeración decimal estos números romanos.

- a) XCII
- b) DCCXL
- c) $\overline{VIII}X$
- d) CDXXIII
- e) CMXXI
- f) XXIX
- g) MMMCCVI
- h) DCCIX
- i) LXIX

- 6** Escribe en números romanos.

- a) 194
- b) 426
- c) 2046
- d) 12311
- e) 3
- f) 8
- g) 14
- h) 76
- i) 265
- j) 1569
- k) 2427
- l) 13021

2

Multiplicación de números naturales

La **multiplicación** es la expresión abreviada de una suma de varios su-
mandos iguales.

Los términos de la multiplicación se denominan **factores**. El resultado final se llama **producto**.

El producto de dos números se indica por un punto (\cdot), aunque también se puede representar por el signo \times .

$$12 \cdot 7 = 12 \times 7$$

EJEMPLOS

4 Expresa como un producto.

a) $3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 4 = 12$

b) $12 + 12 = 12 \cdot 2 = 24$

5 Colocamos en una báscula 5 sacos de patatas que pesan 75 kg cada uno. ¿Qué peso marcará la báscula?

$$75 + 75 + 75 + 75 + 75 = \underbrace{75}_{\text{Factores}} \cdot \underbrace{5}_{\text{Producto}} = \underbrace{375}_{\text{Producto}}.$$

La báscula marcará 375 kg.

La multiplicación cumple las siguientes propiedades:

- **Conmutativa.** El orden de los factores no altera el producto.

$$5 \cdot 7 = 7 \cdot 5 \\ 35 = 35$$

- **Asociativa.** El orden en el que agrupamos los factores no altera el producto.

$$(4 \cdot 7) \cdot 5 = 4 \cdot (7 \cdot 5) \\ 28 \cdot 5 = 4 \cdot 35 \\ 140 = 140$$

- **Elemento neutro o unidad.** Es el 1, ya que cualquier número multiplicado por 1 es igual al mismo número.

$$13 \cdot 1 = 13$$

- **Distributiva.** El producto de un número por una suma o resta es igual a la suma o resta de los productos del número por cada término.

$$3 \cdot (2 + 5) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \quad 4 \cdot (8 - 3) = 4 \cdot 8 - 4 \cdot 3 \\ 3 \cdot 7 = 6 + 15 \quad 4 \cdot 5 = 32 - 12 \\ 21 = 21 \quad 20 = 20$$



LO QUE DEBES SABER RESOLVER

9 Expresa como un producto.

a) $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$

b) $11 + 11 + 11 + 11 + 11$

c) $13 + 13 + 13$

10 Aplica la propiedad distributiva.

a) $7 \cdot (4 + 10)$

b) $18 \cdot (7 - 2)$

11 Mario ha comprado 5 cajas de pinturas.

Si en cada caja hay 18 pinturas, ¿cuántas pinturas tiene en total?

5 Una docena de huevos son 12 huevos.

¿Cuántos huevos hay en 2 docenas de huevos? ¿Y en 8 docenas de huevos? ¿Y en 32 docenas?

3 División de números naturales

Dividir es repartir una cantidad en partes iguales.

Los términos de la división se llaman **dividendo**, **divisor**, **cociente** y **resto**.

En una división, el resto siempre tiene que ser menor que el divisor.



EJEMPLO

- 6 Un padre quiere repartir 630 € entre sus tres hijos en partes iguales. ¿Qué cantidad recibirá cada uno?

$$\begin{array}{r} 630 \quad | \quad 3 \\ 03 \quad 210 \\ 00 \end{array} \rightarrow \text{Cada hijo recibirá 210 €.}$$

- Cuando el resto es cero, la **división** es **exacta**.

$$\begin{array}{l} \text{Dividendo} \rightarrow D \quad | \quad d \leftarrow \text{Divisor} \\ \text{Resto} \rightarrow 0 \quad \quad \quad c \leftarrow \text{Cociente} \end{array}$$

- Si el resto no es cero, la **división** es **no exacta**.

$$\begin{array}{l} \text{Dividendo} \rightarrow D \quad | \quad d \leftarrow \text{Divisor} \\ \text{Resto} \rightarrow r \quad \quad \quad c \leftarrow \text{Cociente} \end{array}$$

En ambos casos se cumple que: $\text{Dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cociente} + \text{resto}$

A esta igualdad se le llama **prueba de la división**.

EJEMPLO

- 7 Se quieren repartir 43 caramelos entre 14 niños. ¿Cuántos caramelos recibirá cada niño? ¿Sobra alguno?

$$\begin{array}{r} 43 \quad | \quad 14 \\ 01 \quad 3 \end{array} \rightarrow \text{Cada niño recibirá 3 caramelos y sobra 1 caramelo.}$$

Para comprobar que la división es correcta, primero vemos que el resto es menor que el divisor, $1 < 14$, y después realizamos la prueba de la división:

$$\begin{aligned} D &= d \cdot c + r \rightarrow 43 = 14 \cdot 3 + 1 \\ &43 = 42 + 1 \\ &43 = 43 \end{aligned}$$

Esto significa que hemos realizado bien la división.

LO QUE DEBES SABER RESOLVER

- 13 Halla el cociente y el resto de la división $6712 : 23$. Haz la prueba.

- 6 Determina cuáles de estas divisiones son exactas y calcula el cociente de cada una de ellas.

- a) $1416 : 18$ c) $3182 : 37$ e) $8205 : 13$
b) $2470 : 26$ d) $3182 : 37$ f) $4002 : 22$

- 7 Un barco lleva 56 contenedores en los que se ha metido el mismo peso en cada uno. Si el peso de la carga total es 85288 kg, ¿cuál es el peso de cada contenedor?

- 14 Calcula el dividendo de una división exacta si el cociente es 13 y el divisor es 6.

4

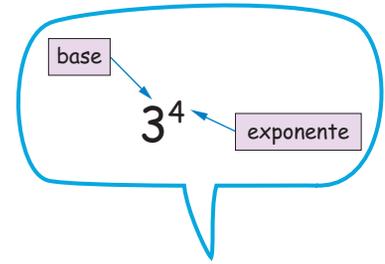
Potencias de números naturales

Una **potencia** es una forma abreviada de escribir una multiplicación de factores iguales:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

a es la **base**, el factor que se repite.

n es el **exponente**, el número de veces que se repite la base.



$2 \cdot 2 = 2^2 \longrightarrow$ Se lee «2 elevado a 2» o «2 al cuadrado».

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 \longrightarrow$ Se lee «4 elevado a 3» o «4 al cubo».

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 \longrightarrow$ Se lee «3 elevado a 4» o «3 a la cuarta».

EJEMPLOS

8 Escribe en forma de potencia las siguientes multiplicaciones:

Multiplicación	Potencia	Se lee
$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$	5^6	«5 elevado a 6» o «5 a la sexta»
$14 \cdot 14 \cdot 14$	14^3	«14 elevado a 3» o «14 al cubo»

9 Halla el valor de estas potencias.

a) $2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ veces}} = 8$

b) $9^2 = \underbrace{9 \cdot 9}_{2 \text{ veces}} = 81$

c) $3^4 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ veces}} = 81$

Potencias de base 10

Una **potencia de base 10** y **exponente un número natural** es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indique su exponente.

EJEMPLO

10 Halla el valor de las siguientes potencias de base 10.

a) $10^3 = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10}_{3 \text{ veces}} = \underbrace{1\,000}_{3 \text{ ceros}}$

b) $10^5 = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}_{5 \text{ veces}} = \underbrace{100\,000}_{5 \text{ ceros}}$

CALCULADORA



Para hallar potencias con la calculadora utilizamos la tecla x^y .

$5^6 \rightarrow 5 \cdot x^y \cdot 6 = 15625$

$2^{12} \rightarrow 2 \cdot x^y \cdot 12 = 4096$

LO QUE DEBES SABER RESOLVER

16 Escribe y calcula.

- a) Siete al cubo. c) Diez a la cuarta.
b) Cuatro a la quinta. d) Diez a la octava.

17 Indica la base y el exponente de estas potencias. Escribe cómo se leen.

- a) 3^6 b) 10^2 c) 5^4 d) 4^5

18 Escribe en forma de potencia y calcula su valor.

- a) $10 \cdot 10 \cdot 10$ b) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$

8 Escribe como producto estas potencias y calcula su valor.

- a) 3^4 c) 8^5 e) 2^6
b) 5^3 d) 5^8 f) 6^2

5 Operaciones con potencias

Las potencias cumplen una serie de propiedades, independientemente de cuál sea el valor de la base y del exponente.

ANTES, DEBES SABER...

Cómo se expresa un número como una potencia con exponente 1

Cualquier número es igual a una potencia con base ese número y exponente 1.

$$2 = 2^1 \quad 5 = 5^1 \quad 16 = 16^1$$

Para que se puedan aplicar las propiedades del producto y el cociente, las potencias han de tener la misma base.

$5^3 \cdot 7^4 \rightarrow$ No se puede expresar como una sola potencia.



5.1 Producto de potencias de la misma base

Para **multiplicar** dos o más **potencias** de la misma base, se mantiene la misma base y se suman los exponentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

EJEMPLO

4 Escribe estos productos de potencias como una sola potencia.

a) $2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$

d) $2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^6 = 2^{5+3+6} = 2^{14}$

b) $5^7 \cdot 5^2 = 5^{7+2} = 5^9$

e) $5^7 \cdot 5^2 \cdot 5 = 5^{7+2+1} = 5^{10}$

c) $4^3 \cdot 4 = 4^{3+1} = 4^4$

f) $4^3 \cdot 4 \cdot 4 = 4^{3+1+1} = 4^5$

5.2 Cociente de potencias de la misma base

Para **dividir** dos **potencias** con la misma base, se mantiene la misma base y se restan los exponentes.

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

EJEMPLO

5 Escribe estos cocientes de potencias como una sola potencia.

a) $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$

d) $2^9 : 2^3 = 2^{9-3} = 2^6$

b) $5^7 : 5^2 = 5^{7-2} = 5^5$

e) $5^7 : 5^2 = 5^{7-2} = 5^5$

c) $4^3 : 4 = 4^{3-1} = 4^2$

f) $4^3 : 4 = 4^{3-1} = 4^2$

LO QUE DEBES SABER RESOLVER

20 Escribe como una sola potencia.

a) $7^4 \cdot 7^5$

c) $9^3 \cdot 9^5 \cdot 9^4$

b) $5^3 \cdot 5^3$

d) $4^2 \cdot 4^3 \cdot 4^4$

21 Halla el valor de estos productos de potencias.

a) $10^4 \cdot 10^5$

b) $10^3 \cdot 10 \cdot 10^2$

24 Halla el resultado de estos cocientes de potencias.

a) $7^8 : 7^5$

c) $9^7 : 9^5$

b) $20^6 : 20^4$

d) $12^7 : 12^5$

26 Calcula.

a) $(3^4 : 3^2) \cdot 3^3$

b) $(5^6 \cdot 5^2) : 5^4$

5.3 Potencias de exponente 1 y 0

- Una potencia de exponente 1 es igual a la base $\rightarrow a^1 = a$.
- Una potencia de exponente 0 es igual a 1 $\rightarrow a^0 = 1$.

EJEMPLO

6 Calcula estas potencias.

- a) $2^0 = 1$ c) $7^0 = 1$ e) $24^0 = 1$
b) $2^1 = 2$ d) $7^1 = 7$ f) $24^1 = 24$

5.4 Potencia de una potencia

Para elevar una potencia a otra potencia, se mantiene la misma base y se multiplican los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

EJEMPLO

7 Calcula estas potencias.

- a) $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$ b) $(5^4)^6 = 5^{4 \cdot 6} = 5^{24}$

5.5 Potencia de una multiplicación y una división

- La potencia de una multiplicación es igual al producto de las potencias de sus factores.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

- La potencia de una división es igual al cociente de las potencias del dividendo y el divisor.

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

EJEMPLO

8 Escribe estos cocientes de potencias como una sola potencia.

- a) $(4 \cdot 2)^3 = 4^3 \cdot 2^3 = 64 \cdot 8 = 512$
b) $(10 : 5)^3 = 10^3 : 5^3 = 1000 : 125 = 8$

Utilizando esta propiedad en sentido inverso se pueden simplificar los cálculos.

$$5^4 \cdot 2^4 = (5 \cdot 2)^4 = 10^4$$
$$6^3 : 2^3 = (6 : 2)^3 = 3^3$$



LO QUE DEBES SABER RESOLVER

25 Calcula el valor de las potencias.

- a) 15^1 b) 14^0

28 Calcula.

- a) $(2^4)^3$ c) $(14 \cdot 16)^5$
b) $(6^3)^5$ d) $(216 : 24)^3$

30 Expresa como producto o cociente de potencias.

- a) $(3 \cdot 2)^4 \cdot (3 \cdot 2)^5$ b) $(14 \cdot 5)^7 : (14 \cdot 5)^4$

9 Calcula el valor de estas potencias.

- a) $(7^4)^2 \cdot 7^3$ c) $(2 \cdot 6)^7 \cdot 12^3$
b) $(7^4)^2 : 7^3$ d) $(2 \cdot 6)^7 : 12^3$

6 Raíces cuadradas

CALCULADORA



Para hallar una raíz cuadrada con la calculadora utilizamos la tecla $\sqrt{\quad}$.

$$\sqrt{361} \rightarrow 361 \quad \sqrt{\quad} \quad 19$$

$$\sqrt{1296} \rightarrow 1296 \quad \sqrt{\quad} \quad 36$$

Como $\sqrt{4} = 2$ porque $2^2 = 4$, decimos que la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado.



6.1 Raíz cuadrada exacta

La **raíz cuadrada exacta** de un número a es otro número b tal que, al elevarlo al cuadrado, obtenemos el número a .

$$\sqrt{a} = b, \text{ cuando } b^2 = a$$

Llamamos **radicando** al número a , $\sqrt{\quad}$ es el símbolo de la raíz y decimos que b es la raíz cuadrada de a .

Símbolo de raíz $\rightarrow \sqrt{a} = b \leftarrow$ Raíz

↑
Radicando

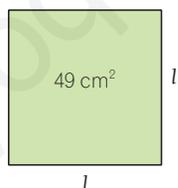
A los números cuya raíz cuadrada es exacta se les denomina **cuadrados perfectos**.

EJEMPLOS

18 Halla las raíces de los siguientes cuadrados perfectos.

- | | |
|--------------------------------------|--|
| a) $\sqrt{1} = 1$ porque $1^2 = 1$ | h) $\sqrt{64} = 8$ porque $8^2 = 64$ |
| b) $\sqrt{4} = 2$ porque $2^2 = 4$ | i) $\sqrt{81} = 9$ porque $9^2 = 81$ |
| c) $\sqrt{9} = 3$ porque $3^2 = 9$ | j) $\sqrt{100} = 10$ porque $10^2 = 100$ |
| d) $\sqrt{16} = 4$ porque $4^2 = 16$ | k) $\sqrt{121} = 11$ porque $11^2 = 121$ |
| e) $\sqrt{25} = 5$ porque $5^2 = 25$ | l) $\sqrt{144} = 12$ porque $12^2 = 144$ |
| f) $\sqrt{36} = 6$ porque $6^2 = 36$ | m) $\sqrt{169} = 13$ porque $13^2 = 169$ |
| g) $\sqrt{49} = 7$ porque $7^2 = 49$ | n) $\sqrt{196} = 14$ porque $14^2 = 196$ |

19 El área de un cuadrado es 49 cm^2 . ¿Cuánto mide el lado?



$$\left. \begin{array}{l} \text{Área} = l \cdot l = l^2 \\ \text{Área} = 49 \text{ cm}^2 \end{array} \right\} \rightarrow l^2 = 49 \rightarrow l = \sqrt{49} = 7$$

El lado mide 7 cm.

LO QUE DEBES SABER RESOLVER

32 Comprueba si estas raíces cuadradas están bien resueltas.

- | | |
|----------------------|-------------------------|
| a) $\sqrt{225} = 15$ | c) $\sqrt{1000} = 100$ |
| b) $\sqrt{255} = 16$ | d) $\sqrt{40000} = 200$ |

33 Halla con tu calculadora.

- | | |
|-------------------|--------------------|
| a) $\sqrt{289}$ | c) $\sqrt{15625}$ |
| b) $\sqrt{10000}$ | d) $\sqrt{135424}$ |

34 Calcula el lado de un cuadrado de 400 cm^2 de área.

10 Calcula el radicando de estas raíces sabiendo que son raíces cuadradas exactas. Comprueba que el radicando al cuadrado es igual a la raíz.

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| a) $\sqrt{\square} = 5$ | c) $\sqrt{\square} = 10$ |
| b) $\sqrt{\square} = 7$ | d) $\sqrt{\square} = 14$ |

7

Jerarquía de las operaciones

ANTES, DEBES SABER...

Cómo se realizan operaciones combinadas de suma y resta

- Para calcular una serie de **sumas y restas sin paréntesis**, se hacen las operaciones en el orden en el que aparecen, de izquierda a derecha.
- Para calcular una serie de **sumas y restas con paréntesis**, se hacen primero las operaciones que hay dentro de los paréntesis.

EJEMPLO

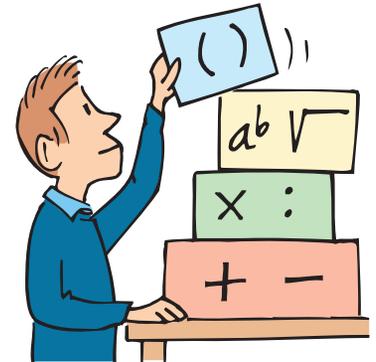
9 Resuelve estas operaciones.

$$\begin{aligned}
 &15 + 23 - 2 - 12 + 8 = \\
 &= 38 - 2 - 12 + 8 = \\
 &= 36 - 12 + 8 = \\
 &= 24 + 8 = \\
 &= 32
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &(95 - 32) - (39 - 16) - 21 = \\
 &= 63 - 23 - 21 = \\
 &= 40 - 21 = \\
 &= 19
 \end{aligned}$$

Cuando en una expresión aparecen **operaciones combinadas**, el orden en el que se realizan las operaciones es el siguiente:

- 1.º Las operaciones que hay entre paréntesis y corchetes.
- 2.º Las potencias y las raíces.
- 3.º Las multiplicaciones y las divisiones, de izquierda a derecha.
- 4.º Las sumas y las restas, de izquierda a derecha.



EJEMPLO

22 Calcula las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } &10 + 3 \cdot 7 - 14 : 7 = \\
 &= 10 + 21 - 2 = \\
 &= 31 - 2 = \\
 &= 29
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 \text{c) } &5 \cdot (16 - 9) + 3 \cdot (4 : 2) : 2 = \\
 &= 5 \cdot 7 + 3 \cdot 2 : 2 = \\
 &= 35 + 6 : 2 = \\
 &= 35 + 3 = 38
 \end{aligned}$$

LO QUE DEBES SABER RESOLVER

11 Resuelve estas operaciones.

- $17 - 8 - 2 + 6 + 5 - 10$
- $17 - (8 - 2) + 6 + 5 - 10$
- $17 - (8 - 2 + 6) + 5 - 10$

41 Calcula.

- $7 \cdot 4 - 12 + 3 \cdot 6 - 2$
- $(11 - 7) \cdot 4 + 2 \cdot (8 + 2)$
- $3 \cdot (14 + 12 - 20) : 9 + 2$

COMPRENDE ESTAS PALABRAS

Sistema de numeración decimal

D. millar	U. millar	Centena	Decena	Unidad
3	5	1	4	2
30000	5000	100	40	2

Sistema de numeración romano

I = 1 V = 5 X = 10 L = 50
 C = 100 D = 500 M = 1000

Multiplicación $\overline{34} \cdot \overline{2} = \overline{68}$
 Factores Producto

División

Dividendo → 25 $\overline{)3}$ ← Divisor
 Resto → 1 8 ← Cociente

Potencia

$14^5 = \underbrace{14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 14}_{5 \text{ veces}}$
 Base Exponente

Raíz cuadrada

$\sqrt{9} = 3$, porque $3^2 = 9$
 Símbolo de raíz → $\sqrt{9} = 3$ ← Raíz
 Radicando



HAZLO DE ESTA MANERA

1. LEER NÚMEROS ROMANOS

Escribe en el sistema numérico decimal los siguientes números romanos.

a) XXVII b) $\overline{IVXCXVI}$

PRIMERO. Transformamos cada letra en su equivalencia en el sistema numérico decimal, teniendo en cuenta que cada letra en la que aparece una rayita encima, se multiplica por 1000.

a) $\overline{X} \overline{X} \overline{V} \overline{I} \overline{I}$
 10 10 5 1 1

b) $\overline{I} \overline{V} \overline{C} \overline{X} \overline{C} \overline{V} \overline{I}$
 1 · 1000 5 · 1000 100 10 100 5 1

SEGUNDO. Examinamos los números, si un número es mayor que su número anterior, le restamos a este número el anterior.

a) $\overline{X} \overline{X} \overline{V} \overline{I} \overline{I}$
 10 10 5 1 1

b) $\overline{I} \overline{V} \overline{C} \overline{X} \overline{C} \overline{V} \overline{I}$
 1 · 1000 5 · 1000 100 10 100 5 1
 5000 - 1000 100 - 10

TERCERO. Sumamos los números resultantes.

a) $\overline{X} \overline{X} \overline{V} \overline{I} \overline{I} \rightarrow 10 + 10 + 5 + 1 + 1 = 27$
 10 10 5 1 1

b) $\overline{I} \overline{V} \overline{C} \overline{X} \overline{C} \overline{V} \overline{I}$
 1 · 1000 5 · 1000 100 10 100 5 1
 5000 - 1000 100 - 10
 4000 + 100 + 90 + 5 + 1 = 4196

2. CALCULAR UN PRODUCTO O COCIENTE DE POTENCIAS

Expresa, si se puede, con una sola potencia.

a) $6^7 \cdot 6^5$ c) $6^7 \cdot 2^7$ e) $6^7 \cdot 2^5$
 b) $6^7 : 6^5$ d) $6^7 : 2^7$ f) $6^7 : 2^5$

PRIMERO. Estudiamos si son iguales las bases o los exponentes de las potencias.

a) y b) 6^7 y $6^5 \rightarrow$ La base de las dos potencias es la misma, 6.
 c) y d) 6^7 y $2^7 \rightarrow$ Las bases son distintas, pero los exponentes iguales, 7.
 e) y f) 6^7 y $2^5 \rightarrow$ No son iguales las bases ni los exponentes.

SEGUNDO.

- Si las bases son iguales, sumamos o restamos los exponentes.
 - a) $6^7 \cdot 6^5 = 6^{7+5} = 6^{12}$
 - b) $6^7 : 6^5 = 6^{7-5} = 6^2$
- Si las bases no son iguales, pero los exponentes sí, multiplicamos o dividimos las bases.
 - c) $6^7 \cdot 2^7 = (6 \cdot 2)^7 = 12^7$
 - d) $6^7 : 2^7 = (6 : 2)^7 = 3^7$
- Si no son iguales las bases ni los exponentes, no se puede expresar como una sola potencia.
 - e) $6^7 \cdot 2^5 = 6^7 \cdot 2^5$
 - f) $6^7 : 2^5 = 6^7 : 2^5$

3. REALIZAR OPERACIONES COMBINADAS CON POTENCIAS

Expresa mediante una sola potencia las siguientes operaciones entre potencias.

a) $7^5 \cdot (7^2)^3$

b) $4^8 : (4^2 \cdot 4^5)$

PRIMERO. Resolvemos las operaciones que hay entre paréntesis.

a) $7^5 \cdot (7^2)^3 = 7^5 \cdot 7^{2 \cdot 3} = 7^5 \cdot 7^6$

b) $4^8 : (4^2 \cdot 4^5) = 4^8 : 4^{2+5} = 4^8 : 4^7$

SEGUNDO. Se realizan las multiplicaciones y divisiones de potencias en el orden en que aparecen.

a) $7^5 \cdot 7^6 = 7^{5+6} = 7^{11}$

b) $4^8 : 4^7 = 4^{8-7} = 4^1 = 4$

4. REALIZAR OPERACIONES COMBINADAS

Resuelve: $100 \cdot (36 - 26) : 5 - 10 : (16 - 6) =$

$$\begin{aligned} &= 100 \cdot 10 : 5 - 10 : 10 = \\ &= 1000 : 5 - 1 = \\ &= 200 - 1 = 199 \end{aligned}$$

PRIMERO. Resolvemos los paréntesis y corchetes.

SEGUNDO. Efectuamos las multiplicaciones y divisiones en el orden en el que aparecen.

TERCERO. Resolvemos las sumas y restas.

Y AHORA... PRACTICA

Comprende estas palabras

- Escribe un número de cuatro cifras que tenga las mismas unidades de millar que decenas y una unidad más que centenas.
- Completa las expresiones para que sean ciertas.
a) $8 \cdot \square = 88$ b) $3 \cdot \square = 42$
- En una división, el dividendo es 1436, el divisor es 27 y el cociente es 53. Calcula el resto.
- Expresa en forma de potencia, si se puede.
a) $17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17$ b) $13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 12$

Leer números romanos

- Transforma estos números romanos en números del sistema decimal.
a) CXXVI b) CMLIX c) IIIICDLXXIV

Calcular un producto o cociente de potencias

- Expresa, si se puede, con una sola potencia.
a) $8^5 : 4^5$ c) $14^6 \cdot 2^3$ e) $18^3 : 3^6$
b) $7^4 \cdot 7^3$ d) $21^4 \cdot 2^4$ f) $123^{11} : 123^5$

Realizar operaciones combinadas con potencias

- Expresa mediante una sola potencia las siguientes operaciones entre potencias.
a) $(3^5)^2 : (3^6 : 3^4)$ b) $(9^8 \cdot 9^3 : 9^5) \cdot 9 : (9^2)^3$

Realizar operaciones combinadas

- Resuelve estas operaciones.
a) $7 \cdot (8 - 3) : 5 + 12$
b) $27 : (9 - 6) - 3 \cdot 4 : 6$
c) $(12 \cdot 2 - 18) \cdot 3 : 6 + (8 - 4) : 2 - 1$

Actividades

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

12. ● Señala el valor de la cifra 5 en cada uno de los siguientes números.

- a) 15890900 c) 509123780 e) 163145900
b) 54786008 d) 64320510 f) 986403005

48. ● Indica el valor posicional de todas las cifras de estos números.

- a) 987654 c) 887787 e) 8080008
b) 656565 d) 3004005 f) 2222222

49. ●● Indica el valor posicional de todas las cifras de estos números.

- a) 987654 c) 887787 e) 8080008
b) 656565 d) 3004005 f) 2222222

13. ● Escribe:

- Cinco números mayores que 20000 cuya cifra de las unidades de millar sea 8.
- Cinco números menores que 100000 cuya cifra de las decenas de millar sea 3.
- Cinco números mayores que 29000 y menores que 29100 con la cifra de las decenas igual a la cifra de las unidades.

Ordena los números en cada caso, de menor a mayor, utilizando el signo correspondiente.

54. ● Expresa en el sistema de numeración decimal estos números romanos.

- a) XXVI c) MCCXXV
b) DCXLVI d) DXXX

55. ●● Expresa los siguientes números romanos en el sistema de numeración decimal.

- a) \overline{XIX} c) \overline{MMCCIX}
b) \overline{CDXL} d) \overline{CMXC}

56. ● Expresa en el sistema de numeración decimal.

- a) XLVI f) $\overline{IVCDXXX}$
b) CXCII g) $\overline{DCCXCIII}$
c) $\overline{CMXXXIV}$ h) \overline{MMCCII}
d) XXXIV i) \overline{XCXL}
e) $\overline{MMMMDLXXX}$ j) \overline{MXXIX}

14. ● Escribe estos números en números romanos.

- a) 7 b) 22 c) 74 d) 143 e) 3002

OPERACIONES CON NÚMEROS NATURALES

57. ● Aplica la propiedad distributiva y calcula.

- a) $6 \cdot (11 + 4)$ d) $15 \cdot (20 - 7 - 8)$
b) $25 \cdot (37 - 12)$ e) $(20 + 14 - 15) \cdot 17$
c) $8 \cdot (17 + 12 + 10)$ f) $(18 + 3 - 2) \cdot 5$

58. ● Completa la tabla.

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
173	3		
267	4		
1329	9		

59. ● Halla el cociente y el resto de $45\,456 : 22$. Realiza la prueba de la división.

15. ● Resuelve estas divisiones y realiza la prueba.

- a) $327 : 22$ c) $9255 : 37$ e) $29001 : 132$
b) $4623 : 18$ d) $12501 : 59$ f) $36102 : 205$

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA UN TÉRMINO DE LA DIVISIÓN CONOCIENDO LOS DEMÁS?

60. Sin realizar la división, halla el resto de $453 : 23$, si el cociente es 19.

PRIMERO. Se sustituye cada letra por su valor en la prueba de la división.

$$D = d \cdot c + r$$

$$453 = 23 \cdot 19 + r \rightarrow 453 = 437 + r$$

SEGUNDO. El resto es un número tal que, al sumarlo a 437, da 453.

$$r = 453 - 437 = 16. \text{ El resto de la división es 16.}$$

61. ●● El dividendo de una división es 1512, el divisor es 8 y el cociente es 189. Halla el resto sin efectuar la división.

62. ●● Sin realizar la división, indica cuáles de estas divisiones son exactas.

- a) $D = 6099$ $d = 19$ $c = 321$ $r = ?$
b) $D = 986$ $d = 17$ $c = 58$ $r = ?$

16. ● ¿Qué resto puede tener una división de divisor 7?

POTENCIAS

65. ● Escribe como producto de factores.
a) 4^3 b) 10^4 c) 27^2 d) 102^5
66. ● Expresa estas multiplicaciones en forma de potencia, si se puede.
a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
b) $37 \cdot 37$
c) $4 \cdot 14 \cdot 4 \cdot 14 \cdot 4 \cdot 14 \cdot 4$
d) 25
67. ● Indica cuál es la base y el exponente.
a) 2^8 Base = \square Exponente = \square
b) 3^{12} Base = \square Exponente = \square
68. ● Expresa con números.
a) Once a la quinta. b) Nueve a la cuarta.
69. ● Escribe cómo se leen estas potencias.
a) 12^3 b) 7^4 c) 21^2 d) 14^{12}

71. ●  Completa la tabla.

	Al cuadrado	Al cubo	A la cuarta
9			
11			

OPERACIONES CON POTENCIAS

73. ● Expresa como una sola potencia.
a) $7^2 \cdot 7^3$ b) $11^4 \cdot 8^4$ c) $8^3 \cdot 5^3$ d) $4^5 \cdot 4$
74. ● Escribe como una sola potencia.
a) $3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^3$ c) $6^3 \cdot 6^2 \cdot 6^5$
b) $5^4 \cdot 5 \cdot 5^6$ d) $4^3 \cdot 5^3 \cdot 6^3$

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA UN EXPONENTE DESCONOCIDO EN UN PRODUCTO DE POTENCIAS?

17. Copia y completa: $3^2 \cdot 3^\square = 3^8$

PRIMERO. Se aplican las propiedades de las potencias.

$$3^2 \cdot 3^\square = 3^8 \rightarrow 3^{2+\square} = 3^8$$

SEGUNDO. Se igualan los exponentes.

$$2 + \square = 8$$

El número que sumado a 2 nos da 8 es 6. El exponente buscado es 6.

75. ●● Completa.
a) $9^2 \cdot 9^\square = 9^6$ c) $5^\square \cdot 5^3 = 5^8$
b) $2^\square \cdot 2^3 = 2^9$ d) $3^\square \cdot 3^9 = 3^{11}$
76. ●● Completa.
a) $7^4 \cdot 7^\square \cdot 7 = 7^7$ c) $13 \cdot 13^6 \cdot 13^\square = 13^9$
b) $5^\square \cdot 5 \cdot 5^3 = 5^8$ d) $8^3 \cdot 8^5 \cdot 8^\square = 8^{12}$
79. ● Expresa como una sola potencia.
a) $6^8 : 6^3$ b) $2^{15} : 2^7$ c) $6^5 : 3^5$ d) $4^6 : 2^6$
80. ● Expresa como una potencia.
a) $(2^7 : 2^4) : 2^2$ c) $11^5 : (11^6 : 11^3)$
b) $(7^9 : 7^3) : 7^4$ d) $4^3 : (4^5 : 4^2)$
81. ●● Completa.
a) $\square^7 : 5^3 = 5^4$ c) $9^5 : 9^\square = 9^3$
b) $12^\square : 12^6 = 12^9$ d) $3^8 : 3^\square = 3^2$
84. ● Expresa como una potencia.
a) $(5^4)^2$ b) $(7^3)^3$ c) $(6^5)^2$ d) $(8^2)^6$
91. ●● Calcula.
a) $(3^5 \cdot 3^2) : 3^3$ c) $(8^5 : 8^3) \cdot 8^2$
b) $4^3 \cdot (4^7 : 4^4)$ d) $7^5 : (7^2 \cdot 7^2)$
92. ●● Resuelve.
a) $(3^5)^2 \cdot (3^2)^4$ c) $(9^5)^3 \cdot (9^4)^3$
b) $(7^3)^3 \cdot (7^2)^4$ d) $(11^6)^2 \cdot (11^3)^4$
93. ●● Indica como una sola potencia.
a) $(6^2)^5 : (6^3)^3$ c) $(10^8)^3 : (10^4)^5$
b) $(8^7)^2 : (8^3)^4$ d) $(2^9)^2 : (2^3)^5$
94. ●● Calcula las siguientes expresiones.
a) $3^9 : ((3^2)^5 : 3^7) \cdot 3^3$ b) $(7^2)^3 \cdot (7^5 : 7^2) : (7^2)^4$

RAÍCES CUADRADAS

95. ● Completa.
a) $35^2 = 1225$, entonces $\sqrt{1225} = \square$
b) $\sqrt{9025} = 95$, entonces $95^2 = \square$
96. ● Calcula las raíces cuadradas de estos números.
a) 64 b) 100 c) 169 d) 196
97. ● Completa.
a) $\sqrt{\square} = 5$ c) $\sqrt{\square} = 15$
b) $\sqrt{\square} = 9$ d) $\sqrt{\square} = 20$

JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES

18. ● Realiza las siguientes operaciones.

- a) $31 - 20 + 15 - 4$
- b) $12 + 7 - 8 - 5 + 14$
- c) $17 - 9 - 5 + 24$
- d) $49 + 7 - 54 - 2 + 25$
- e) $59 + 45 - 76 - 12 + 51$
- f) $123 + 12 - 17 - 23 - 9 + 12$

19. ● Calcula.

- a) $(34 + 12 - 9) - (34 - 19)$
- b) $123 - (67 + 34 - 21)$
- c) $(29 + 78 - 54 - 32) - (9 + 5)$
- d) $(89 + 23 - 76) - (41 + 12 - 32)$
- e) $345 - (90 - 76 - 8 + 43)$
- f) $567 - (23 + 65 - 12 - 45)$

20. ● Calcula y relaciona las operaciones que dan el mismo resultado.

- a) $24 - 8 + 18 - 6$
- b) $34 + 78 - 12 - 17$
- c) $34 + 78 + 7 - 65 - 12$
- d) $24 - 8 - 16 + 6$
- i) $(24 + 6) - (8 + 16)$
- ii) $(24 + 18) - (8 + 6)$
- iii) $(34 + 78 + 7) - (65 + 12)$
- iv) $(34 + 78) - (12 + 17)$

102. ● Resuelve estas operaciones.

- a) $9 \cdot (15 + 4 - 7)$
- b) $12 + 4 \cdot (3 + 19)$
- c) $55 - 3 \cdot (27 - 9)$
- d) $33 + 6 \cdot 5 + 21$

103. ● Calcula.

- a) $15 + (12 + 6) : 3$
- b) $31 - (13 + 8) : 7$
- c) $4 + 15 : 5 + 17$
- d) $42 - (3 + (32 : 4) : 2)$

104. ● Realiza estas operaciones.

- a) $8 \cdot 3 + 36 : 9 + 5$
- b) $144 : (24 : 6) + 4 \cdot 7$
- c) $48 - 5 \cdot 7 + 9 \cdot 3 - 19$
- d) $14 - 21 : 7 + 105 : 5$

105. ● Resuelve.

- a) $42 \cdot 3 - 124 : 4 - (180 : 9) : 5$
- b) $(241 - 100 + 44) : 5 + 20 \cdot 7$
- c) $7 + 8 \cdot (17 - 5) - 28 : 2$
- d) $(12 + 3 \cdot 5) : 9 + 8$

106. ● Calcula el valor de estas expresiones.

- a) $3 \cdot (100 - 90) + 12 \cdot (5 + 2)$
- b) $7 \cdot (26 : 2) - (6 : 3) \cdot 6 + 4$
- c) $66 : (15 - 9) + 7 \cdot (6 : 2) - 12 : 2$
- d) $7 \cdot (4 + 8 - 5) : (12 - 5) + 7 \cdot (8 - 6 + 1)$
- e) $3 \cdot (15 : 3 - 2) + (8 + 20) : 4 - 1$
- f) $38 - (30 : 6 + 5) \cdot 2 - 6 \cdot 3 : 2$
- g) $8 \cdot (28 - 14 : 7 \cdot 4) : (22 + 5 \cdot 5 - 31)$
- h) $[200 - 3 \cdot (12 : 4 - 3)] - 6 + 37 - 35 : 7$

107. ● Calcula mentalmente el número que falta.

- a) $3 \cdot 5 + 3 \cdot \square = 60$
- b) $13 \cdot 40 - 13 \cdot \square = 260$
- c) $15 \cdot \square + 7 \cdot \square - 15 \cdot 6 = 150$

PROBLEMAS CON NÚMEROS NATURALES

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVE UN PROBLEMA EN EL QUE LOS DATOS ESTÁN RELACIONADOS?

116. La factura telefónica del mes pasado fue de 34 €, la de este mes ha sido 5 € más cara y la de hace dos meses fue 4 € menos. ¿A cuánto ha ascendido el gasto en teléfono en los últimos tres meses?

PRIMERO. Se toma el dato conocido del problema.

«El mes pasado» \rightarrow 34 €

SEGUNDO. Se calculan los demás datos del problema.

«Este mes 5 € más» \longrightarrow $34 + 5 = 39$ €

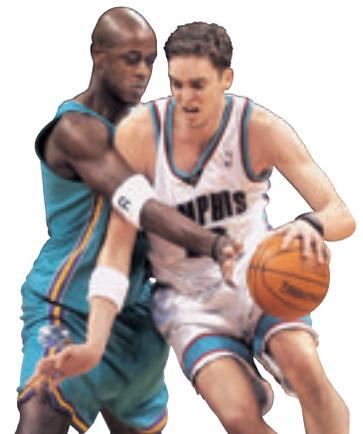
«Hace dos meses 4 € menos» \rightarrow $34 - 4 = 30$ €

TERCERO. Se resuelve el problema.

$34 + 39 + 30 = 103$ €

El gasto en teléfono ha sido de 103 €.

117. ●● En un partido de baloncesto, los máximos anotadores han sido Juan, Jorge y Mario. Juan ha logrado 19 puntos, Jorge 5 puntos más que Juan y Mario 7 puntos menos que Jorge. ¿Cuántos puntos han obtenido entre los tres?



118. ●● Si ganase 56 € más al mes podría gastar: 420 € en el alquiler de la casa, 102 € en gasolina para el coche, 60 € en la manutención y 96 € en gastos generales, y ahorraría 32 €. ¿Cuánto gana al mes?

119. ●●● Mario tiene 11 años y es 4 años menor que su hermana. Entre los dos tienen 19 años menos que su madre. ¿Cuántos años tiene la madre?

120. ●● Se ha enseñado a un grupo de jóvenes a sembrar trigo. El primer día sembraron 125 kilos y el segundo día sembraron el doble de kilos que el primero.

a) ¿Cuántos kilos sembraron el segundo día?

b) ¿Y entre los dos días?

121. ●● Observa estos precios.



- a) ¿Se pueden adquirir los tres artículos con 900 €?
- b) ¿Cuál es la cantidad mínima necesaria para comprar los tres artículos?
- c) ¿Cuánto sobra, con seguridad, si se dispone de 2000 € para comprar los tres artículos?

122. ●● Un generador eléctrico consume 9 litros de gasolina a la hora y una bomba de agua 7 veces más. ¿Cuántos litros consumen entre los dos al cabo de 4 horas?

123. ●● Cada fin de semana Luis recibe 6 € y se gasta 4 €. ¿Cuántas semanas han de pasar hasta que ahorre 18 €?

124. ●● Pedro tiene 79 € para comprar sillas. Sabiendo que cada una cuesta 7 €, ¿cuántas sillas puede comprar? ¿Cuánto le sobra?

125. ●● Una botella de 1 litro de aceite cuesta 3 €. Si la garrafa de 6 litros cuesta 12 €, ¿cuánto dinero nos ahorramos comprando garrafas?

126. ●●● Un coche va a 110 km/h y otro a 97 km/h. ¿Cuántos kilómetros le llevará de ventaja el primer coche al segundo al cabo de 9 horas?

127. ●● Vamos a repartir 720 € entre tres personas y se sabe que la primera recibirá 280 €. ¿Cuánto recibirán las otras dos si el resto se reparte en partes iguales?

128. ●● Nacho y Ana están preparando una fiesta y compran 12 botellas de 2 litros de naranja, 12 de limón y 12 de cola.

a) ¿Cuántos litros han comprado?

b) Si cada botella de 2 litros cuesta 2 €, ¿cuánto dinero se han gastado?

130. ●●● En España cada persona recicla, por término medio, 14 kg de vidrio cada año.

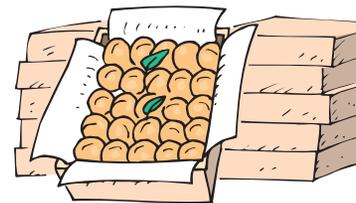
a) Si en España hay 40 millones de personas, ¿cuántos kilos de vidrio se reciclan al año?

b) Para reciclar 680 000 000 000 kg, ¿cuántos kilos más debería reciclar cada persona?



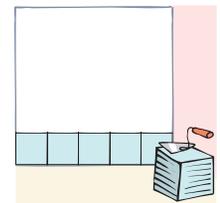
131. ●● El tablero del ajedrez es un cuadrado formado por 8 filas, con 8 cuadraditos en cada fila. ¿Cuántos cuadraditos hay en total?

132. ●● Marta quiere saber cuántos melocotones hay en el almacén. Para ello hace 5 montones con 5 cajas en cada montón, y en cada caja, 5 filas con 5 melocotones en cada fila. ¿Cuántos melocotones hay?



133. ●● Luis acaba de recibir cuatro cajas cuadradas llenas de vasos que debe colocar. La caja tiene cuatro filas y hay cuatro vasos en cada fila. ¿Cuántos vasos tiene que colocar?

134. ●● ¿Cuántos azulejos necesita Jorge para cubrir una pared cuadrada, si en la primera fila ha colocado 5 azulejos?



Divisibilidad

Después del jueves..., otro jueves

En la Navidad de 1582, Gregorio XIII atendía distante a un jesuita que estaba visiblemente alterado.

–Ruego a Su Santidad –interpeló el jesuita, Christopher Clavius– que me conceda la autorización para justificar el cambio de calendario. ¡Las críticas han llegado al extremo de acusarnos de robarle 10 días al calendario!

Gregorio XIII levantó la cabeza y respondió:

–Eso no es más que un ataque de herejes e ignorantes. La Comisión de Sabios determinó que nuestros cálculos de la duración del año eran erróneos y que nuestro calendario estaba atrasado en 10 días.

El Papa continuó:

–Al 4 de octubre de 1582 le siguió el 15 de octubre, pero no robamos 10 días al calendario, sino que recuperamos lo que el calendario anterior tomó sin corresponderle. De haber seguido así, habríamos terminado por celebrar la Navidad en verano.

DESCUBRE LA HISTORIA...

1. Busca información sobre Christopher Clavius y su relación con el papa Gregorio XIII.
2. Investiga qué calendario se utilizaba hasta que se estableció el calendario actual y por qué se produjo la diferencia de 10 días al cambiarlo.
3. Explica el criterio de divisibilidad que establece el calendario gregoriano para los años bisiestos.



Antes de empezar la unidad...

DIVISIÓN ENTRE NÚMEROS NATURALES

Los términos de la división se llaman dividendo, divisor, cociente y resto.

$$\begin{array}{r}
 \text{Dividendo} \rightarrow 58034 \quad | \quad 23 \leftarrow \text{Divisor} \\
 120 \quad \quad \quad 2523 \leftarrow \text{Cociente} \\
 \quad \quad \quad 53 \\
 \quad \quad \quad \quad 74 \\
 \text{Resto} \rightarrow 5
 \end{array}$$

Prueba de la división

Una división está bien resuelta si se cumplen estas dos condiciones:

- El resto de la división es menor que el divisor.
- El dividendo es igual al divisor multiplicado por el cociente más el resto.

$$\text{Resto} < \text{Divisor} \rightarrow 5 < 23$$

$$\text{Dividendo} = \text{Divisor} \cdot \text{Cociente} + \text{Resto}$$

$$58034 = 23 \cdot 2523 + 5$$

$$58034 = 58029 + 5$$

$$58034 = 58034$$

Por tanto, la división está bien resuelta.

Dividir es repartir una cantidad en partes iguales.



EVALUACIÓN INICIAL

1 Haz la prueba de cada división y averigua cuáles están mal realizadas.

$$\begin{array}{r}
 47 \overline{) 2} \\
 07 \quad 23 \\
 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 54 \overline{) 3} \\
 24 \quad 15 \\
 9
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 68 \overline{) 6} \\
 08 \quad 11 \\
 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 85 \overline{) 7} \\
 15 \quad 12 \\
 1
 \end{array}$$

2 Halla el dividendo de estas divisiones.

- Divisor = 3, cociente = 8, resto = 0
- Divisor = 8, cociente = 15, resto = 6

3 Calcula y completa la tabla.

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
2346	4		
3672	6		
8425	7		
9252	9		

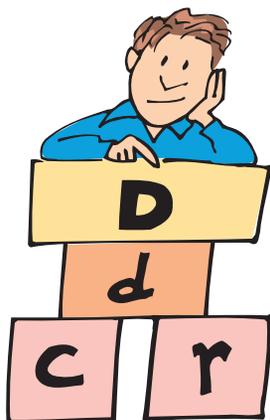
PLAN DE TRABAJO

En esta unidad aprenderás a...

- Calcular los divisores y múltiplos de un número.
- Distinguir entre números primos y compuestos.
- Factorizar números naturales.
- Hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más números naturales.

3 Múltiplos de un número

Dividendo (D) | divisor (d)
resto (r) | cociente (c)



ANTES, DEBES SABER...

Cuándo una división es exacta

- Una **división** es **exacta** si su resto es cero. Si una división es exacta se cumple que:

$$\text{Dividendo} = \text{Divisor} \cdot \text{Cociente}$$

$$\begin{array}{r} 54 \overline{) 6} \\ 0 \end{array}$$

- Una **división** **no** es **exacta** cuando su resto es distinto de cero. En este caso se cumple que:

$$\text{Dividendo} = \text{Divisor} \cdot \text{Cociente} + \text{Resto}$$

$$\begin{array}{r} 56 \overline{) 6} \\ 2 \end{array}$$

Un número b es **múltiplo** de otro número a si la división de b entre a es exacta.

EJEMPLO

- 4 ¿Es 28 múltiplo de 4? ¿Y de 5?

$$\begin{array}{r} 28 \overline{) 4} \\ 0 \end{array}$$

La división $28 : 4$ es exacta \rightarrow 28 es múltiplo de 4.

$$\begin{array}{r} 28 \overline{) 5} \\ 3 \end{array}$$

La división $28 : 5$ no es exacta \rightarrow 28 no es múltiplo de 5.

Los múltiplos de un número se obtienen multiplicando dicho número por los sucesivos números naturales.

EJEMPLOS

- 5 Calcula los múltiplos de 3.

Múltiplos de 3 $\rightarrow 3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, 3 \cdot 4, 3 \cdot 5, 3 \cdot 6, 3 \cdot 7 \dots$

$$3 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 \dots\}$$

Los múltiplos de 3 son un conjunto ilimitado de números.

- 1 Halla los seis primeros múltiplos de 12.

Múltiplos de 12 $\rightarrow 12 \cdot 1, 12 \cdot 2, 12 \cdot 3, 12 \cdot 4, 12 \cdot 5, 12 \cdot 6$

Los seis primeros múltiplos de 12 son: 12, 24, 36, 48, 60 y 72.

SE ESCRIBE ASÍ

$\dot{3}$ \rightarrow Todos los múltiplos de 3.

$\dot{12}$ \rightarrow Todos los múltiplos de 12.

LO QUE DEBES SABER RESOLVER

10 ¿Es 35 múltiplo de 5? Razona la respuesta.

1 Calcula los diez primeros múltiplos de 8.

11 ¿Es 48 múltiplo de 6? Razona la respuesta.

2 Halla los diez primeros múltiplos de 16.

4

Divisores de un número

Un número a es **divisor** de otro número b si la división de b entre a es exacta.

EJEMPLO

7 Comprueba si 8 y 9 son divisores de 48.

$$\begin{array}{r} 48 \quad | \quad 8 \\ 0 \quad 6 \end{array} \quad \text{La división } 48 : 8 \text{ es exacta} \rightarrow 8 \text{ es divisor de 48.}$$

$$\begin{array}{r} 48 \quad | \quad 9 \\ 3 \quad 5 \end{array} \quad \text{La división } 48 : 9 \text{ no es exacta} \rightarrow 9 \text{ no es divisor de 48.}$$

8 es divisor de 48
 \updownarrow
 48 es múltiplo de 8



Los divisores de un número se obtienen dividiendo dicho número entre los sucesivos números naturales, hasta que el cociente de la división sea menor que el divisor.

EJEMPLOS

9 Calcula todos los divisores de 8.

$$\begin{array}{r} 8 \quad | \quad 1 \\ 0 \quad 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \quad | \quad 2 \\ 0 \quad 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \quad | \quad 3 \\ 2 \quad 2 \end{array} \rightarrow \text{El cociente, 2, es menor que el divisor, 3. Por tanto, no seguimos dividiendo.}$$

De cada división exacta extraemos dos divisores: el divisor y el cociente.

$$8 : 1 = 8 \rightarrow \text{Es una división exacta} \rightarrow 1 \text{ y } 8 \text{ son divisores de 8.}$$

$$8 : 2 = 4 \rightarrow \text{Es una división exacta} \rightarrow 2 \text{ y } 4 \text{ son divisores de 8.}$$

Los divisores de 8 son 1, 2, 4 y 8. Se escribe así: $\text{Div}(8) = \{1, 2, 4, 8\}$.

2 Calcula todos los divisores de 10.

$$\begin{array}{r} 10 \quad | \quad 1 \\ 0 \quad 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \quad | \quad 2 \\ 0 \quad 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \quad | \quad 3 \\ 1 \quad 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \quad | \quad 4 \\ 2 \quad 2 \end{array} \rightarrow \text{El cociente, 2, es menor que el divisor, 4. Por tanto, no seguimos dividiendo.}$$

Extraemos el divisor y el cociente de cada división exacta:

$$10 : 1 = 10 \rightarrow \text{Es una división exacta} \rightarrow 1 \text{ y } 10 \text{ son divisores de 10.}$$

$$10 : 2 = 5 \rightarrow \text{Es una división exacta} \rightarrow 2 \text{ y } 5 \text{ son divisores de 10.}$$

Los divisores de 10 son 1, 2, 5 y 10 $\rightarrow \text{Div}(10) = \{1, 2, 5, 10\}$

SE ESCRIBE ASÍ

$\text{Div}(8) \rightarrow$ Todos los divisores de 8.

$\text{Div}(12) \rightarrow$ Todos los divisores de 12.

LO QUE DEBES SABER RESOLVER

3 Di si es cierto o no.

- a) 8 es divisor de 56. b) 12 es divisor de 95.

16 Calcula todos los divisores de:

- a) 30 c) 45 e) 100 g) 90
 b) 27 d) 55 f) 89 h) 79

15 ¿Cuáles son divisores de 36?

- 2 7 12 36 15 20 1 4 40 9

17 Di si es cierto o no.

- a) 12 es divisor de 3. b) 12 es múltiplo de 3.

5 Números primos y compuestos

- Un **número** es **primo** si solo tiene dos divisores: él mismo y la unidad.
- Si un número tiene más de dos divisores, decimos que es un **número compuesto**.

EJEMPLO

- 10 Averigua si 17 y 27 son números primos o compuestos.

Calculamos todos los divisores de 17:

$$\begin{array}{r}
 17 \overline{)1} \\
 7 \quad 17 \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 17 \overline{)2} \\
 1 \quad 8 \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 17 \overline{)3} \\
 2 \quad 5 \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 17 \overline{)4} \\
 1 \quad 4 \\
 0
 \end{array}$$

$17 \overline{)5}$
 $2 \quad 3 \rightarrow$ El cociente, 3, es menor que el divisor, 5.
 Por tanto, no seguimos dividiendo.

La única división exacta es $17 : 1 = 17$, extraemos el divisor y el cociente.

$\text{Div}(17) = \{1, 17\} \rightarrow$ 17 solo tiene dos divisores.
17 es un número primo.

Calculamos todos los divisores de 27:

$$\begin{array}{r}
 27 \overline{)1} \\
 7 \quad 27 \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 27 \overline{)2} \\
 7 \quad 13 \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 27 \overline{)3} \\
 0 \quad 9 \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 27 \overline{)4} \\
 3 \quad 6 \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 27 \overline{)5} \\
 2 \quad 5 \\
 0
 \end{array}$$

$27 \overline{)6}$
 $3 \quad 4 \rightarrow$ Como 4 es menor que 6, no seguimos dividiendo.

Extraemos el divisor y el cociente de las divisiones exactas:

$$\begin{array}{l}
 27 : 1 = 27 \rightarrow 1 \text{ y } 27 \text{ son divisores de } 27. \\
 27 : 3 = 9 \rightarrow 3 \text{ y } 9 \text{ son divisores de } 27.
 \end{array}$$

$\text{Div}(27) = \{1, 3, 9, 27\} \rightarrow$ 27 tiene más de dos divisores.
27 es un número compuesto.

2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57
58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90	91	92
93	94	95	96	97	98	99

Números primos hasta 100

LO QUE DEBES SABER RESOLVER

- 4 Determina si los siguientes números son primos o compuestos.

- | | | |
|-------|-------|-------|
| a) 11 | e) 29 | i) 58 |
| b) 13 | f) 42 | j) 65 |
| c) 18 | g) 46 | k) 70 |
| d) 24 | h) 54 | l) 80 |

- 19 ¿Es 101 un número primo? ¿Por qué?

- 5 Escribe todos los números primos menores que 20.

- 6 Indica todos los números primos comprendidos entre 100 y 110.

- 7 Escribe cinco números primos mayores que 50 y otros cinco menores que 40.

- 8 Escribe los números compuestos menores que 20.

6

Factorización
de un número

ANTES, DEBES SABER...

Cuándo la división de un número entre 2, 3 o 5 es exacta

- La división de un número entre 2 es exacta si el número termina en 0 o en una cifra par.

EJEMPLO

3 Determina si estas divisiones son exactas.

- a) $18 : 2 \rightarrow$ División exacta, porque 18 termina en número par.
 b) $7514 : 2 \rightarrow$ División exacta, porque 7514 termina en número par.
 c) $14930 : 2 \rightarrow$ División exacta, porque 14930 termina en 0.
 d) $173 : 2 \rightarrow$ División no exacta, porque 173 termina en 3, que no es par.
 e) $81 : 2 \rightarrow$ División no exacta, porque 81 termina en 1, que no es par.

- La división de un número entre 3 es exacta si, al sumar las cifras de ese número, obtenemos un múltiplo de 3.

EJEMPLO

4 Determina si estas divisiones son exactas.

- a) $81 : 3 \rightarrow$ División exacta, porque: $8 + 1 = 9$
y $9 : 3$ es división exacta
 b) $123 : 3 \rightarrow$ División exacta, porque: $1 + 2 + 3 = 6$
y $6 : 3$ es división exacta
 c) $876 : 3 \rightarrow$ División exacta, porque: $8 + 7 + 6 = 21$
y $21 : 3$ es división exacta
 d) $173 : 3 \rightarrow$ División no exacta, porque: $1 + 7 + 3 = 11$
y $11 : 3$ es división no exacta

- La división de un número entre 5 es exacta si el número termina en 0 o en 5.

EJEMPLO

5 Determina si estas divisiones son exactas.

- a) $65 : 5 \rightarrow$ División exacta, porque 65 termina en 5.
 b) $120 : 5 \rightarrow$ División exacta, porque 120 termina en 0.
 c) $246 : 5 \rightarrow$ División no exacta, porque 246 no termina en 0 ni en 5.

Los números pares son:
2, 4, 6, 8, 10, 12, ...



LO QUE DEBES SABER RESOLVER

9 Estudia si estas divisiones son exactas.

- a) $15 : 3$ c) $59 : 3$ e) $103 : 3$
 b) $26 : 3$ d) $70 : 3$ f) $3104 : 3$

10 Estudia si estas divisiones son exactas.

- a) $37 : 2$ c) $81 : 5$ e) $22305 : 5$
 b) $48 : 3$ d) $92 : 2$ f) $145236 : 3$

Factorizar un número es descomponerlo en factores primos, es decir, expresarlo como producto de sus divisores primos.

Para factorizar un número se divide entre la serie de números primos (2, 3, 5, 7, ...), tantas veces como se pueda, hasta obtener como cociente la unidad. Se empieza dividiendo entre 2; si no es exacto, entre 3; si tampoco es exacto, entre 5; si no entre 7, entre 11...

Los primeros números primos son:
2, 3, 5, 7, 11, 13, ...



EJEMPLO

6 Factoriza el número 30.

Tomamos el número y lo dividimos entre el primer número primo que haga la división exacta.

$$30 : 2 \rightarrow \text{División exacta, porque } 30 \text{ termina en } 0.$$

$$30 : 2 = 15$$

$$\text{Factorización} \rightarrow 30 = 2 \cdot 15$$

Tomamos el cociente que hemos obtenido en la división exacta; en este caso 15, y volvemos a dividir este número entre el primer número primo que haga la división exacta.

$$15 : 2 \rightarrow \text{División no exacta, porque } 5 \text{ no es par}$$

$$15 : 3 \rightarrow \text{División exacta, porque: } 1 + 5 = 6$$

$$\text{y } 6 : 3 \text{ es división exacta}$$

$$15 : 3 = 5$$

$$\text{Factorización} \rightarrow 30 = 2 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Repetimos el proceso hasta obtener como cociente 1.

$$5 : 2 \rightarrow \text{División no exacta, porque } 5 \text{ no es par.}$$

$$5 : 3 \rightarrow \text{División no exacta.}$$

$$5 : 5 \rightarrow \text{División exacta.}$$

$$5 : 5 = 1$$

Cuando obtenemos como cociente 1, la factorización está terminada.

$$\text{Factorización} \rightarrow 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Este proceso se suele escribir de la siguiente manera:

Resultado de:

Significa que:

30		2	30 : 2 División exacta
30 : 2 → 15		3	15 : 3 División exacta
15 : 3 → 5		5	5 : 5 División exacta
5 : 5 → 1			

Los números que aparecen en la columna de la derecha son los factores.

$$\text{Factorización} \rightarrow 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

LO QUE DEBES SABER RESOLVER

11 Factoriza los siguientes números.

- | | | |
|-------|-------|--------|
| a) 10 | d) 21 | g) 70 |
| b) 14 | e) 35 | h) 105 |
| c) 15 | f) 42 | i) 210 |

12 Di a qué número pertenece cada una de estas factorizaciones.

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| a) $3 \cdot 5 \cdot 11$ | c) $5 \cdot 7 \cdot 11$ |
| b) $2 \cdot 11$ | d) $3 \cdot 7 \cdot 11$ |

ANTES, DEBES SABER...

Cómo se expresa un producto de factores iguales mediante una potencia

Una **potencia** es un producto de factores iguales.

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ veces}} = 3^4$$

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ veces}} = 2^3$$

$$5^6 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{6 \text{ veces}}$$

$$7^2 = \underbrace{7 \cdot 7}_{2 \text{ veces}}$$

EJEMPLO

12 Descompón el número 420 como producto de factores primos.

	Cocientes parciales	Factorización
420 es divisible por 2	$420 : 2 = 210$	$420 = 2 \cdot 210$
210 es divisible por 2	$210 : 2 = 105$	$420 = 2 \cdot 2 \cdot 105$
105 no es divisible por 2 105 es divisible por 3	$105 : 3 = 35$	$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 35$
35 no es divisible por 2 ni por 3, pero sí por 5	$35 : 5 = 7$	$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
7 es un número primo, es divisible por él mismo	$7 : 7 = 1$	$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1$

Por tanto, podemos expresar el número 420 como:

$$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \rightarrow 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

En la factorización de un número, siempre que se pueda, utilizaremos potencias.

Para realizar la descomposición de un número en factores primos lo escribimos, normalmente, del siguiente modo:

COCIENTES PARCIALES	FACTORES PRIMOS	
420	2	
$420 : 2 \rightarrow 210$	2	$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$210 : 2 \rightarrow 105$	3	$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$105 : 3 \rightarrow 35$	5	
$35 : 5 \rightarrow 7$	7	
$7 : 7 \rightarrow 1$		

LO QUE DEBES SABER RESOLVER

22 Descompón en producto de factores primos los siguientes números.

- a) 36 c) 24 e) 180
b) 100 d) 98 f) 120

23 Descompón en producto de factores primos, y escribe cómo son estos números.

- a) 13 c) 29
b) 61 d) 97

13 Descompón en factores primos.

- a) 8 c) 27 e) 125
b) 32 d) 81 f) 625

24 Completa para que se cumplan las igualdades.

- a) $2^3 \cdot 3^2 \cdot \square = 360$
b) $\square^2 \cdot 7^2 \cdot 11 = 4851$

7

Máximo común divisor

El **máximo común divisor** de dos o más números es el mayor de sus divisores comunes.

Para calcular, de forma rápida, el máximo común divisor de varios números seguimos estos pasos:

- 1.º Descomponemos los números en factores primos.
- 2.º Escogemos los factores primos comunes, elevados al menor exponente.
- 3.º El producto de esos factores es el m.c.d. de los números.

EJEMPLOS

7 Obtén el máximo común divisor de 12 y 40.

Primero, descomponemos 12 y 40 en factores primos.

$$\begin{array}{r|l}
 12 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 40 & 2 \\
 20 & 2 \\
 10 & 2 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5$$

El único factor primo común es 2.

Al elevarlo al menor exponente: 2^2

Así, resulta que: $\text{m.c.d.}(12, 40) = 2^2 = 4$

El máximo común divisor de dos números puede ser 1.
Por ejemplo:
 $4 = 2^2$ $9 = 3^2$
No hay factores comunes.
 $\text{m.c.d.}(4, 9) = 1$



14 Calcula el máximo común divisor de 40 y 100.

Primero, descomponemos 40 y 100 en factores primos.

$$\begin{array}{r|l}
 40 & 2 \\
 20 & 2 \\
 10 & 2 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 40 = 2^3 \cdot 5
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 100 & 2 \\
 50 & 2 \\
 25 & 5 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 100 = 2^2 \cdot 5^2$$

Los factores primos comunes son 2 y 5.

Al elevarlos al menor exponente: 2^2 y 5

Así, resulta que: $\text{m.c.d.}(40, 100) = 2^2 \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20$

LO QUE DEBES SABER RESOLVER

26 Calcula el máximo común divisor de cada pareja de números.

- | | |
|-------------|------------|
| a) 42 y 21 | d) 12 y 35 |
| b) 24 y 102 | e) 60 y 24 |
| c) 13 y 90 | f) 72 y 11 |

14 Obtén el máximo común divisor.

- | | |
|--------------|----------------|
| a) 105 y 128 | c) 324 y 628 |
| b) 180 y 240 | d) 1024 y 2862 |

27 Halla el máximo común divisor de 18, 30 y 54.

8

Mínimo común múltiplo

El **mínimo común múltiplo** de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes.

Para calcular, de forma rápida, el mínimo común múltiplo de varios números seguimos estos pasos:

- 1.º Descomponemos los números en factores primos.
- 2.º Escogemos los factores primos comunes y no comunes, elevados al mayor exponente.
- 3.º El producto de esos factores es el m.c.m. de los números.

EJEMPLOS

8 Obtén el mínimo común múltiplo de 4 y 6.

Primero, descomponemos 4 y 6 en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$4 = 2 \cdot 2 = 2^2$$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

El factor primo común es 2, y el no común, 3.

Al elevarlos al mayor exponente: 2^2 y 3

Así, resulta que: $\text{m.c.m.}(4, 6) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$

16 Calcula el mínimo común múltiplo de 18 y 60.

Primero, descomponemos 18 y 60 en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Los factores primos comunes son 2 y 3, y los no comunes, 5.

Al elevarlos al mayor exponente: 2^2 , 3^2 y 5

Así, resulta que: $\text{m.c.m.}(18, 60) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180$

EJERCICIOS

30 Determina el mínimo común múltiplo de estas parejas de números.

- | | |
|-----------|------------|
| a) 5 y 12 | d) 4 y 18 |
| b) 6 y 14 | e) 14 y 27 |
| c) 3 y 21 | f) 12 y 20 |

15 Calcula el mínimo común múltiplo.

- | | |
|------------|------------|
| a) 24 y 48 | c) 16 y 80 |
| b) 18 y 54 | d) 22 y 52 |

31 Halla el mínimo común múltiplo de 15, 25 y 9.

COMPRENDE ESTAS PALABRAS

Múltiplos y divisores

8 : 2 es una **división exacta**

8 es **múltiplo** de 2 2 es **divisor** de 8

Número primo

$$\text{Div}(7) = \{1, 7\}$$

$$\text{Div}(11) = \{1, 11\}$$

Número compuesto

$$\text{Div}(10) = \{1, 2, 5, 10\}$$

$$\text{Div}(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$



HAZLO DE ESTA MANERA

1. FACTORIZAR UN NÚMERO

Descompón estos números en factores primos.

a) 84

b) 77

PRIMERO. Dividimos el número entre el primer número primo que haga la división exacta.

- La división de un número entre 2 es exacta si el número termina en 0 o en una cifra par.
- La división de un número entre 3 es exacta si, al sumar las cifras de ese número, obtenemos un múltiplo de 3.
- La división de un número entre 5 es exacta si el número termina en 0 o en 5.

Para el resto de números primos: 7, 11, 13, 17, ... es mejor realizar la división.

a) $84 : 2 \rightarrow$ División exacta, porque 4 es par.

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ \hline 84 : 2 & \rightarrow 42 \end{array}$$

b) $77 : 2 \rightarrow$ División no exacta, porque 7 es impar.

$77 : 3 \rightarrow$ División no exacta, porque: $7 + 7 = 14$ y $14 : 3$ es división no exacta.

$77 : 5 \rightarrow$ División no exacta, porque 77 no termina en 0 ni en 5.

$$\begin{array}{r|l} 77 & 7 \\ \hline 7 & 11 \\ 0 & \rightarrow \text{División exacta} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 77 & 7 \\ \hline 77 : 7 & \rightarrow 11 \end{array}$$

SEGUNDO. Repetimos el mismo proceso con los cocientes resultantes hasta obtener la unidad.

a)

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ \hline 84 : 2 & \rightarrow 42 \\ 42 : 2 & \rightarrow 21 \\ 21 : 3 & \rightarrow 7 \\ 7 : 7 & \rightarrow 1 \end{array}$$

42 termina en par, $42 : 2 \rightarrow$ División exacta.
21 no termina en par, $2 + 1 = 3$, múltiplo de 3.
7 es primo.

b)

$$\begin{array}{r|l} 77 & 7 \\ \hline 77 : 7 & \rightarrow 11 \\ 11 : 11 & \rightarrow 1 \end{array}$$

11 es primo.

TERCERO. Escribimos el número como el producto de todos los factores primos de la columna de la derecha y, si hay factores repetidos, los expresamos como una potencia.

$$\text{a) } 84 = \underbrace{2 \cdot 2}_{2^2} \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\text{b) } 77 = 7 \cdot 11$$



4. CALCULAR EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE VARIOS NÚMEROS

Obtén el máximo común divisor de 24, 132 y 84.

PRIMERO. Descomponemos los números en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$24 = 2^3 \cdot 3 \quad 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \quad 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

SEGUNDO. Escogemos los factores comunes elevados al menor exponente.

Factores comunes $\rightarrow 2$ y 3

Con menor exponente $\rightarrow 2^2$ y 3

TERCERO. El producto de esos factores es el m.c.d. de los números.

$$\text{m.c.d.}(24, 132, 84) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

El máximo común divisor de 24, 132 y 84 es 12.

5. CALCULAR EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE VARIOS NÚMEROS

Obtén el mínimo común múltiplo de 135, 315 y 175.

PRIMERO. Descomponemos los números en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$135 = 3^3 \cdot 5 \quad 315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \quad 175 = 5^2 \cdot 7$$

SEGUNDO. Escogemos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

Factores comunes y no comunes $\rightarrow 3, 5$ y 7

Con mayor exponente $\rightarrow 3^3, 5^2$ y 7

TERCERO. El producto de esos factores es el m.c.m. de los números.

$$\text{m.c.m.}(135, 315, 175) = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 4725$$

El mínimo común múltiplo de 135, 315 y 175 es 4725.

Y AHORA... PRACTICA

Comprende estas palabras

1. ¿Es 24 múltiplo de 2? ¿Y de 3?
2. ¿Es 7 divisor de 63? ¿Y de 77?

1. Escribe tres múltiplos de estos números.

- a) 8 c) 18
b) 12 d) 24

2. Escribe tres divisores de los números.

- a) 24 c) 100
b) 96 d) 39

3. ¿Cuántos divisores tiene el número 17?
¿Qué se puede decir de él?

5. Averigua cuál de los siguientes números es primo.

- a) 21 b) 82 c) 31 d) 33

Factorizar un número

7. Descompón en factores primos el número 88.
8. ¿Cuál es la factorización de 120? ¿Y de 240? ¿Y de 480?
9. ¿Cuál es el número cuya factorización es $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$?

Calcular el máximo común divisor de varios números

10. ¿Cuál es el m.c.d. de 32 y 48?
11. Halla el m.c.d. de 24, 35 y 46.

Calcular el mínimo común múltiplo de varios números

12. ¿Cuál es el m.c.m. de 10 y 8?
13. Calcula el m.c.m. de 16, 40 y 80.

Actividades

MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO

52. ●  Halla con la calculadora los diez primeros múltiplos de 11 y los ocho primeros múltiplos de 12.
53. ● Contesta si es verdadero o falso, y razona las respuestas.
- 35 es múltiplo de 5.
 - 49 es múltiplo de 6.
 - 56 es múltiplo de 8.
 - 72 es múltiplo de 9.
54. ● ¿Cuál de estas series está formada por múltiplos de 4? ¿Y por múltiplos de 5?
- 1, 4, 9, 16, 25, ...
 - 5, 10, 15, 20, ...
 - 8, 10, 12, 14, 16, ...
 - 4, 8, 16, 24, 32, 40, ...
 - 1, 5, 10, 20, 30, ...
 - 20, 40, 60, 80, ...
55. ● Halla los múltiplos de 4 menores que 50.
56. ● ¿Cuáles son los múltiplos comunes de 5 y 8 menores que 50?

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA UN MÚLTIPLO DE UN NÚMERO COMPRENDIDO ENTRE OTROS DOS NÚMEROS?

57. Encuentra un múltiplo de 26 que esté comprendido entre 660 y 700.

PRIMERO. Se divide el menor de los dos números, 660, entre el número del que se quiere hallar el múltiplo, 26.

$$\begin{array}{r} 660 \overline{) 26} \\ 10 \quad 25 \end{array}$$

SEGUNDO. Se aumenta en una unidad el cociente, y se multiplica por el número del que se quiere obtener el múltiplo.

$$\text{MÚLTIPLO} = (25 + 1) \cdot 26 = 676$$

Se comprueba que el número obtenido cumple la condición pedida: el número 676 es múltiplo de 26 y está comprendido entre 660 y 700.

58. ● Determina un número entre 235 y 289 que sea múltiplo de 29.

59. ● Halla los múltiplos de 11 comprendidos entre 40 y 100.
60. ● Calcula cuatro números que sean múltiplos de 7 y que estén comprendidos entre 60 y 110.
61. ● Escribe el primer múltiplo de 32 que sea mayor que 2000.

DIVISORES DE UN NÚMERO

66. ● Contesta si es verdadero o falso, y razona las respuestas.
- 12 es divisor de 48.
 - 15 es divisor de 3.
 - 9 es divisor de 720.
 - 7 es divisor de 777.
 - 44 es divisor de 44.
 - 100 es divisor de 10.
 - 123 es divisor de 123.
 - 1 es divisor de 17.
67. ● Completa los divisores de 24, 16, 36 y 54.
- Div (24) = {1, 2, , 4, , 8, ,
- Div (16) = {1, 2, , , 16}
- Div (36) = {1, 2, , 4, , , , , 36}
- Div (54) = {1, 2, , , , , , 54}

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULAN TODOS LOS DIVISORES DE UN NÚMERO?

16. Calcula todos los divisores de 63.

PRIMERO. Se divide el número entre 1, 2, 3, ... hasta que el cociente sea menor que el divisor.

$$\begin{array}{l} 63 \overline{) 1} \quad 63 \overline{) 2} \quad 63 \overline{) 3} \quad 63 \overline{) 4} \quad 63 \overline{) 5} \\ 0 \quad 63 \quad 1 \quad 31 \quad 0 \quad 21 \quad 3 \quad 15 \quad 3 \quad 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 63 \overline{) 6} \quad 63 \overline{) 7} \quad 63 \overline{) 8} \\ 3 \quad 10 \quad 0 \quad 9 \quad 7 \quad 7 \end{array} \rightarrow \text{El cociente, 7, es menor que el divisor, 8.}$$

SEGUNDO. De cada división exacta se extraen dos divisores: el divisor y el cociente.

$$63 : 1 = 63 \rightarrow 1 \text{ y } 63 \text{ son divisores de } 63.$$

$$63 : 3 = 21 \rightarrow 3 \text{ y } 21 \text{ son divisores de } 63.$$

$$63 : 7 = 9 \rightarrow 7 \text{ y } 9 \text{ son divisores de } 63.$$

El resto de divisiones no son exactas.

Los divisores de 63 son:

$$\text{Div (63)} = \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$$

FACTORIZACIÓN DE UN NÚMERO

19. ● Escribe y comprueba.
- Escribe diez múltiplos de 2. ¿Son pares todos los números que obtienes?
 - Escribe diez múltiplos de 3. Suma las cifras de cada número. ¿Es siempre la suma un múltiplo de 3?
 - Escribe diez múltiplos de 5. ¿Terminan todos los números en 0 o en 5?

20. ● Observa los siguientes números y contesta.

45 52 70 81 94 125 231

- ¿Qué números son múltiplos de 2?
- ¿Qué números son divisibles por 3?
- ¿De qué números es 5 un divisor?

21. ● Escribe los doce primeros múltiplos de 10, y subraya la última cifra de cada uno.
¿Cómo puedes saber si un número es múltiplo de 10?

82. ● Descompón estos números en producto de factores primos.

a) 56	f) 77	k) 138
b) 100	g) 98	l) 102
c) 187	h) 47	m) 325
d) 151	i) 99	n) 226
e) 155	j) 79	ñ) 402

22. ● La factorización $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, ¿a cuál de los siguientes números corresponde?

- 30
- 60
- 120
- 150
- 300
- 600

83. ● ¿A qué números corresponden estas descomposiciones en factores primos?

- $2^3 \cdot 3 \cdot 5$
- $2 \cdot 3^2 \cdot 7$
- $5 \cdot 7^2 \cdot 11$
- $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$
- $2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$
- $3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$
- $3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$
- $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3$

84. ● ¿Cuál es la descomposición en factores primos de un número primo? Pon un ejemplo.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

89. ● Halla el máximo común divisor de los siguientes pares de números.

- 16 y 24
- 45 y 72
- 12 y 36
- 18 y 27
- 28 y 49
- 18 y 28

90. ● Calcula el máximo común divisor de estos pares de números.

- 4 y 15
- 9 y 13
- 3 y 17
- 12 y 7
- 21 y 2
- 18 y 47

91. ●● Obtén el máximo común divisor de los siguientes números.

- 8, 12 y 18
- 16, 20 y 28
- 8, 20 y 28
- 45, 54 y 81
- 75, 90 y 105
- 40, 45 y 55

94. ● Calcula el mínimo común múltiplo de:

- 12 y 24
- 16 y 18
- 27 y 54
- 21 y 49

95. ● Halla el mínimo común múltiplo de:

- 5 y 12
- 7 y 14
- 12 y 25
- 8 y 15

96. ●● Determina el mínimo común múltiplo de:

- 12, 15 y 18
- 10, 20 y 30
- 6, 30 y 42
- 9, 14 y 21

PROBLEMAS DE DIVISIBILIDAD

97. ● José está haciendo una colección de cromos. Los cromos se venden en sobres con 5 cromos cada uno. ¿Puede comprar 15 cromos? ¿Y 17?



23. ● Rafa ha hecho 40 croquetas.

¿Puede repartirlas en partes iguales en 8 platos sin que le sobre ninguna?
¿Y en 9 platos?

98. ●● Ana tiene un álbum de 180 cromos. Los cromos se venden en sobres de 5 cromos cada uno. Suponiendo que no se repita ningún cromo, ¿cuántos sobres tiene que comprar como mínimo?

99. ●● Luis quiere pegar las 49 fotos de sus vacaciones en filas de 3 fotos cada una. ¿Cuántas filas enteras obtendrá? ¿Le sobra alguna foto? Razona la respuesta.

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE DIVIDE UNA CANTIDAD EN GRUPOS IGUALES?

24. Necesitamos envasar 10 rosquillas en cajas que tengan el mismo número de rosquillas cada una. ¿De cuántas formas se pueden envasar?

PRIMERO. Se calculan todos los divisores de la cantidad.

$$\begin{array}{r} 10 \overline{) 1} \\ 0 \ 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \overline{) 2} \\ 0 \ 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \overline{) 3} \\ 1 \ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \overline{) 4} \\ 2 \ 2 \end{array}$$

El cociente, 2, es menor que el divisor, 4. Por tanto, no seguimos dividiendo.

$$10 : 1 = 10 \rightarrow \text{División exacta} \rightarrow \text{Divisores: 1 y 10}$$

$$10 : 2 = 5 \rightarrow \text{División exacta} \rightarrow \text{Divisores: 2 y 5}$$

SEGUNDO. Los divisores son las formas en que se puede agrupar la cantidad.

Divisores: 1 y 10

Se pueden envasar en 1 caja de 10 rosquillas o en 10 cajas de 1 rosquilla.

Divisores: 2 y 5

Se pueden envasar en 2 cajas de 5 rosquillas o en 5 cajas de 2 rosquillas.

100. ●● Cristina tiene 24 coches de juguete y quiere colocarlos en fila, de modo que en cada fila haya la misma cantidad de coches. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

101. ●●● Carmen cuenta sus 24 coches de juguete de 3 en 3 y Alberto lo hace de 4 en 4. ¿Coinciden en algún número? ¿Qué tienen en común dichos números?

102. ●● Eduardo trabaja en una tienda de animales. Hay 8 canarios y quiere ponerlos en jaulas, con el mismo número de canarios en cada una, sin que sobre ninguno. ¿De cuántas formas puede colocar los canarios en las jaulas?

103. ●● Marta tiene 15 piñas y desea repartirlas en cestos, con el mismo número de piñas en cada uno, sin que le sobre ninguna. ¿De cuántas maneras distintas puede repartirlas?



104. ●● María ha hecho 45 pasteles y los quiere guardar en cajas. ¿De cuántas maneras los puede guardar para que no sobre ninguno?

105. ●● Paco tiene 20 láminas de madera y tiene que ponerlas en montones, con el mismo número de láminas en cada uno, sin que le sobre ninguna. ¿Cuántas láminas puede poner en cada montón?

106. ●● Ana tiene 7 macetas de geranios y las quiere colocar en grupos, de manera que cada grupo tenga el mismo número de macetas y no sobre ninguna. ¿Cuántas macetas puede poner en cada grupo?



25. ● Maite ha regado hoy los geranios y los cactus de la terraza. Riega los geranios cada 3 días y los cactus cada 9 días. ¿Cuántos días tienen que pasar como mínimo hasta que Maite vuelva a regar las dos plantas el mismo día?

26. ● Fran y Raquel van a patinar a la misma pista. Fran va cada 4 días y Raquel, cada 5 días. Hoy han ido los dos. ¿Dentro de cuántos días volverán a coincidir por primera vez en la pista de patinaje?

