Juan Jesús Pascual

SUPERAR LAS MATEMÁTICAS

PRIMER CURSO

Educación Secundaria

Contenidos:

- Más de 2000 ejercicios para resolver.
- Más de 500 ejercicios con guía de resolución.
- Más de 100 ejercicios detalladamente resueltos.
- Breves notas teóricas de cada uno de los temas.
- Curiosidades y notas históricas.

Presentación:

Cuando se realiza el salto de Educación Primaria a Educación Secundaria, hay alumnos que necesitan un refuerzo, especialmente en matemáticas. El presente texto se ha escrito con la vista puesta en lo dificultoso del paso de un nivel a otro.

El libro es una colección de más de 2500 ejercicios y problemas preparados para ser resueltos, aunque muchos de ellos cuentan con indicaciones y pistas para facilitar el estudio y su resolución e incluso otros están completamente desarrollados, con el fin de que sirvan de modelo. La dificultad de los enunciados tiene una forma creciente, de manera que los más fáciles suelen estar al principio y los más dificultosos al final. En todos los ejercicios se busca que la persona que los vaya haciendo se sienta cómoda desde el principio y que esto incremente la motivación y la seguridad.

Está especialmente indicado para ser usado en clase y de forma autónoma cuando es necesario reforzar algún tema. También como preparación y repaso ante los diferentes exámenes que se realizan a lo largo de curso o durante las vacaciones. Y, cómo no, por los padres que, queriendo ayudar a sus hijos en las tareas, se acercan a unas matemáticas que ya tenían olvidadas y que desean poner al día.

ÍNDICE:

1. Enteros.

2. Potencias y raíces.

3. Divisibilidad.

4. Fracciones.

5. Números decimales.

1. ENTEROS

Los números naturales, que se denotan con el símbolo , son los primeros que usaron los humanos para contar: hace 22000 años, nuestros antepasados hicieron cuentas en el peroné de un babuino, conocido como *Hueso de Ishango*.

El conjunto de números naturales se escribe como sigue: .

Los número enteros*, que se denotan con el símbolo , es el conjunto de los números naturales y los números naturales con un signo negativo delante, es decir:

Estos números negativos "nacen" al restar dos naturales cuando el primero es menor que el segundo. Por ejemplo: .
Aquí está la primera dificultad con la que los estudiantes se pueden encontrar en este curso:

"¿Cómo puedo quitar al cuatro siete unidades? ¡No se puede quitar de donde no hay!"

Por si sirve de consuelo, hasta hace cuatro siglos en Occidente se usaban los números enteros con poca soltura.

La jerarquía de operaciones:
Primero: Resolución de corchetes y paréntesis
Segundo: Realización de las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparecen, de izquierda a derecha.
Tercero: Realización de las sumas y las restas en el orden en que aparecen, de izquierda a derecha.
Cuarto: Simplificar siempre que se pueda antes de lanzarte a operar. Simplifica también el resultado, cuando sea posible.

La regla de multiplicación de signos:
Es primordial tener siempre presente la siguiente regla de multiplicación de signos:

$$+\cdot+=+$$
$$+\cdot-=-$$
$$-\cdot-=+$$
$$-\cdot+=-$$

* Aunque otros autores no lo hacen, nosotros hemos incluido el 0 dentro del conjunto $\mathbb{N}$.

A. SUMAS Y RESTAS SIN PARÉNTESIS

1) Realiza las siguientes operaciones:

resuelto **a)** $3-5 =$ -2

b) $4-7 =$ ....

c) $12-25 =$ ....

d) $16-20 =$ ....

e) $40-49 =$ ....

f) $3-18 =$ ....

resuelto **g)** $12+4-20 =$ $16-20 = -4$

h) $2-3-4 =$ ....

i) $-12-4-20 =$ ....

j) $13-2-5 =$ ....

k) $16-21-15 =$ ....

l) $-6-12+14 =$ ....

m) $13-5-4+1 =$ ....

n) $-3+2-7-11 =$ ....

o) $-12-20+11 =$ ....

p) $-7+1-13-9 =$ ....

q) $23-30-41-1 =$ ....

r) $-11-9-12-3 =$ ....

s) $-6-10+5 =$ ....

t) $-5+10-6 =$ ....

u) $4-7-10+11 =$ ....

v) $-1-4+6-2+15 =$ ....

w) $-3-6-11+9-1 =$ ....

x) $-2+10-7-2+8 =$ ....

B. SUMAS Y RESTAS CON PARÉNTESIS

2) Realiza las siguientes operaciones:

resuelto **a)** $-(-3) =$ ..3...

b) $-(-7) =$ ....

c) $-(+3) =$ ....

d) $-(-11) =$ ....

e) $+(-8) =$ ....

resuelto **f)** $-(+1)-(-2) =$ $-7-2-1 = -10$

g) $-(+5)+(-1) =$ ....

h) $-(-2)+(-3) =$ ....

i) $-(-4)-(-3) =$ ....

j) $-7-(+2)+(-1) =$ ....

k) $3+(-11)-(+7)=$ ....

l) $-(-5)-(-15)+(-6)=$ ....

o) $-1-(-2)-(-4)=$ ....

p) $-4-(-5)-(+1)=$ ....

q) $5+(-1)-(-7)=$ ....

r) $10-(+5)+(-2)=$ ....

s) $-1+(-25)-(-25)=$ ....

t) $-70-(+20)+(-10)=$ ....

m) $-(+100)+(-150)-(-200)=$

resuelto **n)** $-(-5)-(+4)-(-6)-1=$
$= -7-2-1=-10$

u) $30+(-50)-(+70)+(-20)=$

v) $13+(-15)-(-14)-(-2)=$

w) $-(+90)+(-30)-(-40)-10=$

x) $-(+11)+(-5)+(-20)+40=$

y) $-(-16)-(-32)+(-17)-(-11)=$

z) $-(+3)-4-(-7)+(-1)-(+2)=$

C. MULTIPLICACIONES

3) Realiza las siguientes operaciones:

resuelto **a)** $4\cdot(-3)=-12$

b) $3\cdot(-2)=$ ....

c) $2\cdot(-5)=$ ....

d) $-4\cdot 7=$ ....

e) $-9\cdot(-1)=$ ....

f) $-10\cdot(-20)=$ ....

g) $-(-3)\cdot(-3)=$ ....

resuelto **h)** $-2\cdot 3\cdot(-3)=-6\cdot(-3)=18$

i) $-3\cdot 4\cdot(-1)=$ ....

j) $-3\cdot(-5)\cdot 4=$ ....

k) $(-6)\cdot 3\cdot(-1)=$ ....

k) $-4\cdot(-6)\cdot(-2)=$ ....

l) $3\cdot(-10)\cdot(-7)=$ ....

m) $-(+6)\cdot 3\cdot(-10)=$ ....

n) $-(+1)\cdot(-2)\cdot(-3)=$ ....

o) $-(-5)\cdot(-1)\cdot(-6)=$ ....

p) $-(+1)\cdot(-5)(-2)\cdot(-1)=$ ....

q) $3\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot(-2)=$ ....

r) $-4\cdot 2\cdot(-1)\cdot(-3)=$ ....

s) $-(+2)\cdot(-4)(-3)\cdot(-1)=$ ....

t) $-3\cdot(-1)(-2)\cdot3=$ ....

u) $5\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot2=$ ....

v) $-7\cdot2\cdot(-1)\cdot(-4)=$ ....

w) $-2\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot2=$

x) $-1\cdot(-3)\cdot6\cdot(-2)=$

y) $-(-1)\cdot3\cdot(-1)\cdot(-3)=$

D. MULTIPLICACIONES, SUMAS Y RESTAS

Propiedad distributiva de la suma

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Propiedad distributiva de la resta

$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$

La propiedad distributiva es la operación contraria a "sacar factor común", que veremos en el tema 6.

4) Completa la tabla:

	Raíz	Operando el paréntesis	Aplicando la ley distributiva
resuelto	$4\cdot(4-2)=$	$4\cdot2=8$	$4\cdot4-4\cdot2=16-8=8$
	$5\cdot(-12+4)=$	$5\cdot(-8)=$	$5\cdot(-12)+5\cdot4=$
	$3\cdot(-12-2)=$		
	$-5\cdot(3-6)=$		
	$-3\cdot(-3+5)=$		
	$-7\cdot(-3-2)=$		
	$9\cdot(3-7)=$		
	$(3+5)\cdot4=$		
	$(5-13)\cdot6=$		
	$(4-15)\cdot(-2)=$		
	$(-1-2)\cdot(-7)=$		
	$-(1-3)\cdot(-2)=$		
	$-(4-3)\cdot(-5)=$		

5) Realiza las siguientes operaciones:

resuelto **a)** $3-2\cdot5=$ $3-10=-7$

b) $10-3\cdot2=$ ....

c) $9-4\cdot3=$ ....

d) $10-7\cdot4=$ ....

e) $3-3\cdot(-1)=$ ....

f) $11-2\cdot(-1)=$ ....

g) $-8-3\cdot(-4)=$ ....

h) $-2-6\cdot(-2)=$ ....

i) $4-2\cdot(-5)=$ ....

resuelto **j)** $2\cdot(-3)-5=$ $-6-5=-11$

k) $5\cdot6-25=$ ....

l) $2\cdot7-10=$ ....

m) $-3\cdot2+11=$ ....

n) $3\cdot(-2)+9=$ ....

o) $5\cdot(-5)-2=$ ....

p) $-1\cdot(-3)+5=$ ....

q) $-6\cdot2-3=$ ....

r) $10\cdot(-1)+12=$ ....

s) $-8\cdot3+29=$ ....

t) $9\cdot(-2)+20=$ ....

u) $-5\cdot2-10=$ ....

v) $11\cdot(-3)+5=$ ....

w) $5\cdot4-20=$ ....

x) $-8\cdot2-16=$ ....

y) $-2\cdot(-1)-4=$ ....

z) $-10\cdot(-3)+(-35)=$ ....

6) Realiza las siguientes operaciones:

resuelto **a)** $(-3-4)\cdot(-5)+10=$ $-12\cdot(-5)+10=60+10=10$

b) $(-1-3)\cdot(-2)+5=$ ....

c) $(-2-5)\cdot4+10=$ ....

d) $(-1+6)\cdot2+3=$ ....

e) $(-7+4)\cdot3+1=$ ....

f) $(9-2)\cdot(-1)+4=$ ....

g) $(3-1)\cdot(-2)-1=$ ....

h) $(-2-1)\cdot(-5)+7=$ ....

i) $11-(5-2)\cdot2=$ ....

j) $9+(4-7)\cdot5=$ ....

k) $-12-(3-5)\cdot6=$ ....

l) $7+(1-2)\cdot(-5)=$ ....

m) $-3-(2-7)\cdot(-1)=$ ....

n) $-9-(4-3)\cdot(-2)=$ ....

o) $2\cdot(-2)-2\cdot(-3)=$ ....

p) $-2\cdot(-1)-3\cdot(-4)=$ ....

q) $-7\cdot(-3)+3\cdot(-5)=$ ....

r) $-2\cdot(-5)-7\cdot(-1)=$ ....

s) $3\cdot(-2)\cdot(-1)-6=$ ....

t) $-2\cdot(-5)\cdot(-1)+3=$ ....

u) $-1\cdot 4\cdot(-3)-6=$ ....

v) $2-3\cdot(-1)\cdot(-3)=$ ....

w) $5+4\cdot(-2)\cdot(-1)=$ ....

x) $-5-(-3)\cdot(-2)\cdot 2=$ ....

y) $-10-(-2)\cdot(-1)\cdot(-3)=$ ....

E. MULTIPLICACIONES, DIVISIONES, SUMAS Y RESTAS. CORCHETES

7) Realiza las siguientes operaciones:

resuelto a) $-3\cdot[-4+(-2)]+5=-3\cdot(-4-2)+5=-3\cdot(-6)+5=18+5=23$

b) $-5\cdot[7-(+3)]-2=$ ....

c) $3\cdot[4-(+1)]+5=$ ....

d) $-2\cdot[1-(-1)]+2=$ ....

e) $[7-(+3)]\cdot(-1)-3=$ ....

f) $[9-(-3)]:6-5=$ ....

g) $[16-(+2)]:7-3=$ ....

h) $[9\cdot(-7)-5]:7=$ ....

i) $20:[-6-4\cdot(-4)]=$ ....

j) $6:[-1-10:(-2)]=$ ....

k) $12:[-6:(-2)-3\cdot(-1)]=$ ....

l) $[9-(-3)]:3-3\cdot(-2)=$ ....

m) $36:[-2\cdot(-1)+4\cdot(-5)]=$ ....

F. OPUESTO Y VALOR ABSOLUTO

Valor absoluto de un número
El valor absoluto de un número p, que se denota como $|p|$ es la parte positiva de ese número. Ejemplo: El valor absoluto de -3 se escribe así: $|-3|$ y tiene el valor 3.

Opuesto de un número
El opuesto de un número q, que se denota como $\text{op}(q)$ es ese número cambiado de signo. Ejemplo: el opuesto de 3 se escribe así: $\text{op}(3)$ y tiene el valor de -3.

8) Realiza las siguientes operaciones:

resuelto **a)** $|-3|=3$

b) $|-2|=$ ....

c) $|-5|-4=$ ....

d) $|-2|+1=$ ....

e) $|-9|+(-1)=$ ....

f) $|6|-(-5)=$ ....

g) $-|-3|-(-8)=$ ....

h) $|-3|-3-|-2|=$ ....

e) $|2|-|-5|+|3|=$ ....

f) $|-10|-|-5|+|3|=$ ....

resuelto **g)** $\text{op}(3)=-3$

h) $\text{op}(-3)=$ ....

i) $\text{op}(-3)+\text{op}(-4)=$ ....

j) $\text{op}(5)+\text{op}(-2)=$ ....

k) $-\text{op}(-2)+\text{op}(7)=$ ....

l) $\text{op}(2)-\text{op}(-3)+\text{op}(5)=$ ....

m) $\text{op}(-1)+\text{op}(2)-\text{op}(-4)=$ ....

n) $|-4|-\text{op}(3)=$ ....

o) $|-3|-\text{op}(-1)=$ ....

p) $\text{op}(4)-|-2|=$ ....

q) $-\text{op}(-1)-|-3|=$ ....

r) $\text{op}(-2)-|-2|+\text{op}(1)=$ ....

s) $\operatorname{op}(1) - |-1| - \operatorname{op}(-2) =$ ....

t) $[\operatorname{op}(3) + |-3|] \cdot \operatorname{op}(-1) =$ ....

G. OTROS EJERCICIOS

9) Completa la tabla

$\times$	3	(-4)	$(2-5)$
-3	$-3 \cdot 3 =$		
$2-5$			
$-(3-5)$			
$4-2\cdot 3$		$(4-2\cdot 3)\cdot(-4) =$	
$4\cdot(-3)-1$	$[4\cdot(-3)-1]\cdot 3 =$		

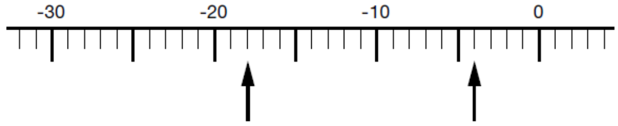
10) La temperatura más alta registrada ha sido en California* (USA): 57ºC, en 1913 y la más baja en la Antártida: $-89^{\circ}\mathrm{C}$. ¿Cuál es la diferencia que hay entre estas dos temperaturas?
Solución:

11) Un tiburón está a 520 m bajo el nivel del mar. ¿Si asciende 450 m, cuál será su distancia a la superficie?
Solución:

12) Un globo aerostático que está a 3520 m de altura desciende 730 m. Luego asciende 1015 m y por último sube 210 m más. ¿A qué altura se encuentra ahora?
Solución:

*En septiembre del 2012, la Organización Meteorológica Mundial cambió el record de temperatura máxima que tenía el desierto libio, de 58º, en el año 1922, por un registro recogido en el Valle de la Muerte, en California, de 57º, medido en 1913. Esto ha sido así al haberse demostrado ¡90 años después! un error de medida.

13) ¿Qué dos números nos están indicando las dos flechas en la siguiente escala?



Solución:

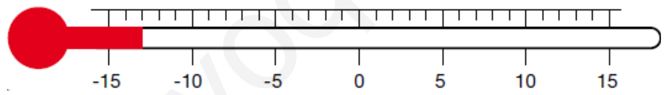
14) Encuentra dos números enteros consecutivos cuya suma es -11

Solución:

15) El punto más alto de la tierra es el Monte Everest, a 8848 m de altura sobre el nivel del mar. El punto más bajo, en tierra firme, es la costa del Mar Muerto, a 417 m por debajo del nivel del mar. ¿Cuál es la diferencia de alturas entre esos dos puntos?

Solución:

16) A la vista del siguiente termómetro (ºC), contesta a las siguientes cuestiones:



a) ¿Qué temperatura está indicando?

b) Si la temperatura aumenta en 17 grados, qué temperatura marcará?

c) Una vez alcanzada esa nueva temperatura, cuántos grados marcará el termómetro si desciende 11º C?

Solución:

17) Durante una ola de frío, se registran las siguientes temperaturas mínimas:

CIUDAD	Oviedo	León	Huelva	Ávila	Ceuta	Cádiz	Gijón
ºC	-4	-7	9	-11	12	7	-1

a) ¿Cuál es la diferencia de temperatura entre la ciudad más fría y la más cálida?
b) ¿Cuál es la diferencia de temperatura entre Ávila y Oviedo? ¿Y entre Ávila y León?
c) Construye una tabla en la que la temperatura de todas estas ciudades sea ocho grados mayor.

Solución:

18) Un edificio tiene15 plantas, 5 de ellas subterráneas. Tomamos el ascensor en la planta 0.
a) Descendemos hasta la planta -4 y luego subimos hasta la planta 7. ¿Cuántos plantas hay entre esos dos niveles?
b) Si estamos en la planta 8 y bajamos13 plantas, en qué nivel nos encontraremos?

Solución:

19) Escribe el número adecuado que haga que las siguientes igualdades sean ciertas

a) $\square + 4 = 10$ **e)** $2 \cdot \square + 5 = 11$ **i)** $6 - 25 : \square + 4 = 5$

b) $\square + 10 = 17$ **f)** $3 \cdot \square - 5 = 1$ **j)** $12 - 6 : \square + 3 = 12$

c) $\square + 6 = 17$ **g)** $14 : \square - 3 = -1$ **k)** $13 - 3 = 12 - 10 : \square$

d) $2 \cdot \square - 3 = 7$ **h)** $3 - 5 = 2 \cdot \square$ **l)** $3 - 11 = 12 - 10 \cdot \square$

El problema más difícil del mundo

Desde hace casi 300 años, millones de matemáticos intentan demostrar si es cierta o no la siguiente afirmación:

"Todo número par mayor que dos puede escribirse como suma de dos números primos**"*

Ejemplos:

$6 = 3 + 3$; $8 = 3 + 5$; $10 = 5 + 5$; $12 = 5 + 7$; Etc.

¿Será esto cierto, por ejemplo, para el número: 2349845739238209438272341483968362942829383593993702? ¡Nadie lo sabe!

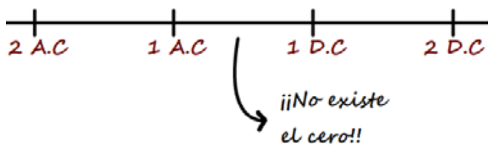
Hay prestigio y mucho dinero para el primero que desvele el misterio.

Este enigmático problema se llama **Conjetura de Goldbach**, propuesta por Christian Goldbach en 1742.

El cero

El concepto de 0 tardó mucho en manejarse en nuestra cultura. Tanto que en la forma que tenemos de nombrar los años de la historia, que viene del año 532 D.C, el año cero no existe. Así, hay año 2 antes de Cristo, año 1 antes de Cristo, año 1 después de Cristo, año 2 después de Cristo. ¡Pero no hay año cero. Se desconocía el año cero y así se ha quedado la numeración histórica!

CRONOLOGÍA HISTÓRICA



*Números pares son números enteros que son múltiplos de dos. Los que no cumplen esto son impares. Ejemplo de números pares: $\{..., -6\ -4, -2,\ 2,\ 4,\ 6,\ ....,\ 2050, ...\}$

**Número primo es un número natural mayor que 1 que sólo es divisible por si mismo y por la unidad. Ejemplo de números primos: $\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23, ...\}$

2. POTENCIAS Y RAICES

A. CONCEPTO DE POTENCIA

Potencia:
Es el producto reiterado de un número por si mismo. Se expresa del siguiente modo: a^b , en donde a es la **base** (es el número que se multiplica por si mismo) y b el **exponente** (indica el número de veces que hay que multiplicar a por sí misma a la base).

a^b → exponente
↓
base

Ejemplo: 3^5 significa $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, es decir, el tres multiplicado 5 veces por sí mismo.

Exponente cero, a^0
Cualquier potencia con exponente cero tiene valor 1. Ejemplo: $9999999^0 = 1$

1) Completa la siguiente tabla

POTENCIA	BASE	EXPONENTE	SE LEE ASÍ	VALOR
3^4				81
2^6			Dos elevado a seis	
5^3		3		
11^2	11			
2^5				
7^3				
13^2				
10^3				
10^5				
$\left(\frac{3}{2}\right)^4$				

2) Escribe en forma de potencia los siguientes productos:

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$ ...2^4..........................

b) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$ ....

c) $11 \cdot 11 \cdot 11 =$ ....

d) $13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 =$ ....

e) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 =$ ....

f) $17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 =$ ....

g) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$ ....

h) $(-13) \cdot (-13) =$ ....

i) $(-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) =$ ....

j) $(-23) \cdot (-23) \cdot (-23) =$ ....

k) $(-29) \cdot (-29) \cdot (-29) =$ ....

3) Desarrolla y halla el valor de cada una de estas potencias

resuelto **a)** $(-5)^2 =$ $(-5)\cdot(-5) = 25$ ....

resuelto **b)** $(-5)^3 =$ $(-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = -125$ ....

c) $(-2)^2 =$ ....

d) $(-7)^3 =$ ....

e) $(-11)^2 =$ ....

f) $(-3)^3 =$ ....

g) $(-3)^4 =$ ....

h) $(-2)^5 =$ ....

i) $(-5)^4 =$ ....

j) $(-7)^4 =$ ....

k) $(-10)^5 =$ ....

l) $(-10)^8 =$ ....

B. POTENCIA DE POTENCIA

Potencia de potencia
los exponentes se multiplican.
$\left(a^b\right)^c = a^{b\cdot c}$. Ejemplo: $\left(3^4\right)^7 = 3^{4\cdot 7} = 3^{28}$

4) Expresa en forma de potencia, a^b, las siguientes potencias de potencia

resuelto **a)** $\left(3^4\right)^2 = 3^{4\cdot 2} = 3^8$

b) $\left(2^4\right)^6 =$ ....

c) $\left(5^3\right)^7 =$ ....

d) $\left(2^{-3}\right)^{-3} = 2^{-3\cdot(-3)} =$ ....

e) $\left(2^{-5}\right)^{-2} =$ ....

f) $\left(7^{-2}\right)^{-3} =$ ....

g) $\left(11^2\right)^{-9} =$ ....

h) $\left(3^4\right)^0 =$ ....

i) $\left(17^5\right)^0 =$ ....

j) $\left(13^0\right)^6 =$ ....

k) $\left[\left(2^3\right)^2\right]^2 =$ ....

l) $\left[\left(3^{-3}\right)^{-2}\right]^{-2} =$ ....

m) $\left[\left(5^2\right)^4\right]^{-1} =$ ....

n) $\left[\left(7^{-2}\right)^{-1}\right]^3 =$ ....

o) $\left[\left(11^{-7}\right)^{-3}\right]^{-2} =$ ....

p) $\left[\left(13^{-15}\right)^2\right]^{-11} =$ ....

q) $\left\{\left[\left(2^5\right)^2\right]^3\right\}^4 =$ ....

r) $\left\{\left[\left(5^{-1}\right)^{-1}\right]^4\right\}^3 =$ ....

s) $\left\{\left[\left(29^{-5}\right)^{-2}\right]^{-1}\right\}^3 =$ ....

t) $\left\{\left[\left(3^3\right)^{-1}\right]^{-2}\right\}^{-2} =$ ....

C. PRODUCTO DE POTENCIAS:

Multiplicación de potencias con la misma base
Los exponentes se suman.
$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$. Ejemplo: $3^4 \cdot 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$

5) Expresa en forma de potencia, a^b, los siguientes productos de potencias

resuelto **a)** $2^4 \cdot 2^2 = 2^{4+2} = 2^6$

b) $3 \cdot 3^2 \cdot 3^6 = 3^{1+2+6} = \boxed{}^{\boxed{}}$

c) $5^4 \cdot 5^{-2} =$ ....

d) $7^{-4} \cdot 7^{-2} =$ ....

e) $11^{-1} \cdot 11^3 \cdot 11^{-2} =$ ....

f) $2^{-1} \cdot 2^3 \cdot 2^{-2} =$ ....

g) $13^2 \cdot 13^2 \cdot 13^{-6} =$ ....

h) $17^{-5} \cdot 17^4 \cdot 17^{-1} \cdot 17^{-1} =$ ....

i) $3^{-5} \cdot 3^{-6} \cdot 3^{-1} \cdot 3^{11} =$ ....

j) $2^9 \cdot 2^{-10} \cdot 2^8 \cdot 2^{-12} =$ ....

6) Escribe la base de cada potencia en forma de potencia. Luego opera la potencia de potencia que aparece.

resuelto **a)** $27^3 = \left(3^3\right)^3 = 3^{3\cdot 3} = 3^9$

$27 = 3^3$

b) $32^4 =$ ....

$32 = 2^5$

Si tienes dificultades con la descomposición de números acude al tema 3, punto C: Factorización

c) $125^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$125 =$

d) $343^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$343 =$

e) $121^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$121 =$

f) $1000^7 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$1000 =$

resuelto **g)** $27^5 \cdot 81^7 = \left(3^3\right)^5 \cdot \left(3^4\right)^7 = 3^{3\cdot 5} \cdot 3^{4\cdot 7} = 3^{15} \cdot 3^{28} = 3^{15+28} = 3^{43}$

$27 = 3^3 \quad 81 = 3^4$

h) $25^3 \cdot 5^4 \cdot 125^2 = \left(5^2\right)^3 \cdot 5^4 \cdot \left(5^3\right)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$25 = 5^2 \quad 125 = 5^3$

i) $49 \cdot 7^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$49 =$

j) $8^3 \cdot 4^4 \cdot 16^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$8 = \qquad 4 = \qquad 16 =$

k) $3^5 \cdot 81^4 \cdot 9^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

l) $4^2 \cdot 16^3 \cdot 2^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

D. DIVISIONES DE POTENCIAS

División de potencias con la misma base
Los exponentes se restan.
$a^b : a^c = a^{b-c}$.
Ejemplo: $3^7 : 3^4 = 3^{7-4} = 3^3$

7) Expresa en forma de potencia, a^b, las siguientes divisiones de potencias

resuelto **a)** $5^3 : 5^2 = 5^{3-2} = 5^1 = 5$

b) $2^5 : 2^3 =$ ....

c) $7^{15} : 7^{11} =$ ....

d) $3^9 : 3^4 =$ ....

e) $13^{102} : 13^{94} =$ ....

f) $a^{12} : a^8 =$ ....

g) $a^{3b} : a^{2b} =$ ....

resuelto **h)** $11^3 : 11^{-3} = 11^{3-(-3)} = 11^{3+3} = 11^6$

i) $2^{15} : 2^{-3} =$ ....

j) $3^7 : 3^{-10} =$ ....

k) $2^{10} : 2^{-15} =$ ....

l) $5^{14} : 5^{-3} =$ ....

m) $b^{16} : b^{-20} =$ ....

n) $p^{3q} : p^{-2q} =$ ....

o) $17^{-2} : 17^{-3} =$ ....

p) $23^{-7} : 23^{-9} =$ ....

q) $29^{-100} : 29^{-120} =$ ....

r) $c^{-19} : c^{-18} =$ ....

resuelto **s)** $4^5 : 4^2 = (2^2)^5 : (2^2)^2 = 2^{10} : 2^4 = 2^6$

t) $4^7 : 4^5 =$ ....

u) $9^3 : 9^2 =$ ....

v) $8^2 : 4^3 =$ ....

w) $9^5 : 27^2 =$ ....

x) $3^8 : 27^3 =$ ....

y) $3^3 : 27^3 =$ ....

E. EXPONENTES NEGATIVOS

8) Expresa las siguientes fracciones, cuyo denominador es una potencia de exponente negativo, en forma de potencia con exponente positivo:

resuelto **a)** $\frac{1}{2^{-3}} = 2^3$

resuelto **b)** $\frac{1}{5^{-6}} = 5^6$

c) $\frac{1}{11^{-2}} =$ ....

d) $\frac{1}{7^{-7}} =$ ....

e) $\frac{1}{3^{-7}} =$ ....

f) $\frac{1}{11^{-9}} =$ ....

g) $\frac{1}{4^{-9}} =$ ....

resuelto **h)** $\frac{1}{81^{-4}} = \frac{1}{(2^2)^{-9}} = \frac{1}{2^{-18}} = 2^{18}$

i) $\frac{1}{16^{-4}} =$ ....

j) $\frac{1}{9^{-4}} =$ ....

k) $\frac{1}{25^{-4}} =$ ....

l) $\frac{1}{49^{-6}} =$ ....

m) $\frac{1}{121^{-5}} =$ ....

n) $\frac{1}{125^{-4}} =$ ....

o) $\dfrac{1}{27^{-5}} =$ ....

q) $\dfrac{1}{4^{-9}} =$ ....

p) $\dfrac{1}{343^{-8}} =$ ....

r) $\dfrac{1}{1000^{-7}} =$ ....

9) Expresa las siguientes potencias en forma de fracción:

resuelto a) $2^{-5} = \dfrac{1}{2^5}$

resuelto g) $25^{-5} = \dfrac{1}{25^5} = \dfrac{1}{\left(5^2\right)^5} = \dfrac{1}{5^{10}}$

b) $5^{-10} =$ ....

h) $16^{-10} =$ ....

c) $11^{-16} =$ ....

i) $121^{-6} =$ ....

d) $7^{-19} =$ ....

j) $125^{-5} =$ ....

e) $3^{-27} =$ ....

k) $81^{-4} =$ ....

f) $13^{-15} =$ ....

l) $27^{-5} =$ ....

F. EJERCICIOS MIXTOS

10) Opera y expresa el resultado en forma de potencia. Si el exponente es negativo, escribe el resultado como una fracción, en donde el denominador es una potencia con exponente positivo.

resuelto a) $\left(5^2\right)^3 : \left(5^3\right)^7 = \dfrac{\left(5^2\right)^3}{\left(5^3\right)^7} = \dfrac{5^{2\cdot 3}}{5^{3\cdot 7}} = \dfrac{5^6}{5^{21}} = 5^{6-21} = 5^{-15} = \dfrac{1}{5^{15}}$

b) $\left(3^2\right)^3 : \left(3^3\right)^3 =$ ....

c) $\left(7^3\right)^2 : \left(7^3\right)^{-1} =$ ....

d) $\left(2^5\right)^3 : 4^2 =$ ....

resuelto **e)** $\dfrac{\left(3^2\right)^5\cdot 3^3}{\left(3^3\right)^2}=\dfrac{3^{10}\cdot 3^3}{3^8}=\dfrac{3^7}{3^8}=3^{7-8}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$

f) $\dfrac{\left(7^2\right)^3:7^4}{\left(7^3\right)^2}=$ ....

g) $\dfrac{\left(2^4\right)^2:2^3}{\left(2^3\right)^2}=$ ....

h) $\dfrac{\left(5^3\right)^3:\left(5^4\right)^2}{\left(5^2\right)^2\cdot 5}=$ ....

i) $\dfrac{\left(11^4\right)^2:11^6}{\left(11^3\right)^2}=$ ....

j) $\dfrac{\left(3^3\right)^3}{\left(3^6\right)^3:3^4}=$ ....

k) $\dfrac{\left(7^2\right)^2}{7^4\cdot 7^3}=$ ....

l) $\dfrac{\left(23^6\right)^6}{\left(23^7\right)^5\cdot 23^2}=$ ....

m) $\dfrac{3^{-5}:\left(3^2\right)^2}{3:\left(3^3\right)^{-1}}=$ ....

n) $\dfrac{11^5\cdot\left(11^2\right)^2}{11:\left(11^3\right)^{-2}}=$ ....

o) $\dfrac{\left(2^2\right)^3\cdot 2^5\cdot 2^{-5}}{2^4:2^3}=$ ....

p) $\dfrac{\left(5^{-2}\cdot 5^{-3}\right)^{-1}:5^2}{5^3:\left(\left(5^2\right)^2\right)^{-1}}=\dfrac{\left(5^{-6}\right)^{-1}:5^2}{5^3:5^{-4}}=\dfrac{5^6:5^2}{5^3:5^{-4}}=$ ....

q) $\dfrac{\left(2^{-2}\right)^{-3}:\left(2^{-3}\right)^{2}}{\left(2^{-3}\right)^{-1}\cdot\left(2^{-1}\right)^{-2}}=$ ....

G. RAÍCES CUADRADAS

11) Halla el valor de cada una de las siguientes raíces, siguiendo los mismos pasos que el ejercicio resuelto

resuelto **a)** Raíz de 25.
$\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$

b) Raíz de 16.
$\sqrt{16}=\sqrt{\boxed{}^{\,2}}=4$

c) Raíz de 64.

....

d) Raíz de 4.

....

e) Raíz de 100.

....

f) Raíz de 225.

....

g) Raíz de 49.

....

h) Raíz de 144.

....

i) Raíz de 169.

....

j) Raíz de 81.

....

k) Raíz de 10000.

....

l) Raíz de 400.

....

m) Raíz de 441.

....

n) Raíz de 196.

....

o) Raíz de 289.

....

p) Raíz de 2500.

....

12) Realiza las operaciones indicadas

resuelto **a)** $\left(\sqrt{121}-\sqrt{4}\right)-\sqrt{25}=(11-2)-5=9-5=4$

b) $\left(\sqrt{16}-\sqrt{4}\right)+\sqrt{9}=$ ....

c) $\left(\sqrt{49}-\sqrt{25}\right)+\sqrt{16}=$ ....

d) $\left(\sqrt{100}-\sqrt{64}\right)+\sqrt{25}=$ ....

e) $\left(\sqrt{100}-\sqrt{121}\right)-\sqrt{36}=$ ....

f) $\left(\sqrt{4}-\sqrt{25}\right)-\sqrt{81}=$ ....

resuelto **g)** $\sqrt{49}-\left(\sqrt{16}-\sqrt{100}\right)=7-(4-10)=7-(-6)=7+6=13$

h) $\sqrt{81}-\left(\sqrt{64}-\sqrt{169}\right)=$ ....

i) $\sqrt{25}-\left(\sqrt{4}-\sqrt{49}\right)=$ ....

j) $\sqrt{49}+\left(\sqrt{16}-\sqrt{36}\right)=$ ....

k) $\sqrt{100}-\left(\sqrt{64}+\sqrt{9}\right)=$ ....

l) $\sqrt{25}\cdot\sqrt{4}+\sqrt{64}=$ ....

m) $\sqrt{81}\cdot\sqrt{9}-\sqrt{25}=$ ....

n) $-\sqrt{49}\cdot\sqrt{100}+\sqrt{25}=$ ....

o) $\sqrt{4}\cdot\left(-\sqrt{81}\right)-\sqrt{25}=$ ....

p) $\sqrt{36}-\sqrt{4}\cdot\sqrt{81}=$ ....

q) $\sqrt{100}-\sqrt{9}\cdot\sqrt{4}=$ ....

r) $-\sqrt{121}-\sqrt{100}\cdot\left(-\sqrt{144}\right)=$ ....

s) $\sqrt{36}:\left(-\sqrt{25}+2\right)=$ ....

t) $\left(\sqrt{36}-\sqrt{100}\right):\sqrt{4}=$ ....

u) $2\cdot\sqrt{64}-\left(-\sqrt{25}+3\cdot\sqrt{16}\right)=$ ....

v) $\sqrt{100}:\sqrt{25}-\left(-\sqrt{121}-\sqrt{144}\right)=$ ....

w) $\left(\sqrt{49}-\sqrt{36}\right)\cdot\sqrt{4}-\left(-\sqrt{25}\right)=$ ....

x) $\left(-\sqrt{100}+\sqrt{144}\right)^2=$ ....

y) $\left(-\sqrt{81}+\sqrt{64}\right)^2+\sqrt{169}=$ ....

z) $\left(\sqrt{49}-\sqrt{100}\right)^2:\sqrt{9}-4^2:\sqrt{16}=$ ....

13) Completa la tabla

Raíz	Cuadrado perfecto anterior	Cuadrado perfecto posterior	Valor aproximado
$\sqrt{8}$	$2^2+4=8$	$3^2-1=8$	$2<\sqrt{8}<3$
$\sqrt{3}$	$1^2+2=3$	$2^2-1=3$	$\square<\sqrt{3}<\square$
$\sqrt{6}$	$\square^2+2=6$	$\square^2+2=6$	$\square<\sqrt{6}<\square$
$\sqrt{10}$			
$\sqrt{13}$			
$\sqrt{28}$			
$\sqrt{41}$			
$\sqrt{52}$			
$\sqrt{65}$			
$\sqrt{93}$			

H. OTROS EJERCICIOS

14) Completa la siguiente tabla

	$a=3; b=-1$	$a=-2; b=5$
a^2+b^2	$3^2+(-1)^2=9+1=10$	$(-2)^2+5^2=4+25=29$
a^2-b^2		
a^2-b^3		
$2b^2-a$		
$3a^3+2b^3$		
$(a-b)^2$		
$(a+b)^3$		
$-(b-a)^2$		
$(b^2-3a^2)^2$		

3. DIVISIBILIDAD

A. DIVISIONES

Para una división se cumple:

$$\left.\begin{array}{l|l} \text{Dividendo} & \text{divisor} \\ \hline \quad\text{resto} & \text{cociente} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cociente} + \text{resto}$$

1) Completa la siguiente tabla

División	D	d	c	r	$D = d \cdot c + r$
$51 : 3$	51	3	17	0	$51 = 3 \cdot 17 + 0$
$98 : 7$					
$121 : 5$					
$482 : 8$					
$327 : 6$					
$678 : 4$					
$973 : 2$					
$765 : 3$					
$3452 : 20$					
$9876 : 48$					

Nomenclatura:
D es el dividendo
d es el divisor
c es el cociente
r es el resto

B. MÚLTIPLOS Y DIVISORES

Múltiplos de un número:
Son los que se obtienen multiplicando dicho número por 1, por 2, por 3… etc.

Divisores de un número:
Son todos los números menores o iguales que el número y que lo dividen de forma exacta

resuelto **2)** Escribe los 5 primeros números múltiplos del 2.

Solución:

Múltiplos de un número son los que se obtiene multiplicando ese número por 1, por 2, por 3… etc.

Así: $2 \cdot 1$; $2 \cdot 2$; $2 \cdot 3$; $2 \cdot 4$; $2 \cdot 5$ son los cinco primero múltiplos del dos, e decir: 2, 4, 6, 8 y 10.

3) Escribe los 5 primeros números múltiplos del 3.
Solución:

4) Escribe los 5 primeros números múltiplos de 5.
Solución:

resuelto **5)** Halla los divisores de 10.
Solución:
Los divisores de un número son aquellos menores o iguales que el número y que lo dividen de forma exacta.
Así:
$10 : \boxed{1} = 10$; $10 : \boxed{2} = 5$; $10 : \boxed{5} = 2$; $10 : \boxed{10} = 1$, es decir: el 1, el 2, el 5 y el 10 dividen de forma exacta al 10, por lo que son sus divisores.

6) Halla los divisores de 12.
Solución:

7) Halla los divisores de 16.
Solución:

C. FACTORIZACIÓN

Descomposición factorial
Para descomponer un nº compuesto en factores primos se divide ese número por los números primos, tantas veces como haga falta, siguiendo el orden ascendente: 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc.

resuelto **8)** Descompón en productos de factores primos cada uno de los siguientes números: 30, 99, 480, 504, 264, 1323, 1575, 648, 1024, 1089

resuelto

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r|l} 99 & \end{array} \Rightarrow 90 =$$

$$\begin{array}{r|l} 480 & \end{array} \Rightarrow 480 =$$

$$\begin{array}{r|l} 504 & \end{array} \Rightarrow 504 =$$

$$\begin{array}{r|l} 264 & \end{array} \Rightarrow 264 =$$

$$\begin{array}{r|l} 1323 & \end{array} \Rightarrow 1323 =$$

$$\begin{array}{r|l} 1575 & \end{array} \Rightarrow 1575 =$$

$$\begin{array}{r|l} 648 & \end{array} \Rightarrow 648 =$$

$$\begin{array}{r|l} 1024 & \end{array} \Rightarrow 1024 =$$

$$\begin{array}{r|l} 1089 & \end{array} \Rightarrow 1089 =$$

D. MÁXIMO COMÚN DIVISOR

> **Máximo común divisisor, M.C.D**
> El M.C.D de varios números es el mayor de los divisores comunes de esos números. O lo que es equivalente: los primos comunes elevados al menor exponente

resuelto **9)** Halla el M.C.D de los números $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ y $b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5$

Solución:

- El M.C.D viene dado por los primos comunes elevados al menor exponente:

$M.C.D(a,b) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

10) Halla el M.C.D de los números $a = 2^4 \cdot 5^3$ y $b = 2^3 \cdot 3^2$

Solución:

- El M.C.D viene dado por los primos comunes elevados al menor exponente:

$M.C.D(a,b) =$

11) Halla el M.C.D de los números $a = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ y $b = 3 \cdot 7^3$

Solución:

resuelto **12)** Halla el M.C.D de 35,45 y70

Solución:

- Descomponemos en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 70 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 35 = 5 \cdot 7 \\ 45 = 3^2 \cdot 5 \\ 70 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \end{array}$$

- El M.C.D viene dado por los comunes elevados al menor exponente:

$$M.C.D(35,45,70) = 5$$

13) Halla el M.C.D de 15 y 20

Solución:

$$\begin{array}{c|c|} 15 & 20 \\ & \\ & \\ & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 15 = \\ 20 = \end{array}$$

$M.C.D(15,20) =$

14) Halla el M.C.D de 90 y 144

Solución:

$$\begin{array}{c|c|} 90 & 144 \\ & \\ & \\ & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 90 = \\ 144 = \end{array}$$

$M.C.D(90,144) =$

15) Halla el M.C.D de 27 y 21 y 18

Solución:

$$\begin{array}{c|c|c|} 18 & 21 & 27 \\ & & \\ & & \\ & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 18 = \\ 21 = \\ 27 = \end{array}$$

$M.C.D(18,21,27) =$

E. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Mínimo común múltiplo, m.c.m

El m.c.m de varios números es el menor de los múltiplos comunes de esos números. O de otro modo: los primos comunes o no comunes elevados al mayor exponente

resuelto

16) Halla el m.c.m de los números $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ y $b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5$

Solución:

- El m.c.m viene dado por los primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente:

$m.c.m(a,b) = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$

17) Halla el m.c.m de los números $a = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $b = 2^2 \cdot 7$
Solución:

18) Halla el m.c.m de los números $a = 3^3 \cdot 5^2$ y $b = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
Solución:

resuelto **19)** Halla el mínimo común múltiplo de 18, 60 y 1350.
Solución:

- Descomponemos en factores primos:

18	2	60	2	1350	2
9	3	30	2	675	3
3	3	15	3	225	3
1		5	5	75	3
		1		25	5
				5	5
				1	

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \end{array}$$

- El m.c.m viene dado por los comunes y no comunes elevados al mayor exponente:

$$m.c.m(18, 60, 1350) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

20) Halla el m.c.m de 18, 33 y 75
Solución:

18	33	75

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 18 = \\ 33 = \\ 75 = \end{array}$$

$m.c.m(18, 33, 75) =$

21) Halla el m.c.m de 35,45 y70
Solución:

$$\begin{array}{c|c|c|} 35 & 45 & 70 \\ & & \\ & & \\ \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 35 = \\ 45 = \\ 70 = \end{array}$$

$m.c.m\,(35,45,70) =$

F. PROBLEMAS

22) ¿De cuántas formas se pueden guardar en cajas 30 manzanas, siendo cajas con igual número de manzanas cada una?
Solución:

resuelto **23)** Un alumno con muchas faltas de asistencia va a clase cada 18 días. Y otro, con más faltas aún, va a clase cada 24 días. Hoy han estado los dos en clase. ¿Dentro de cuántos días volverán a coincidir?
Solución:

Hallamos el $m.c.m\,(18,24)$:

$$\left.\begin{array}{l} 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 24 = 2^3 \cdot 3 \end{array}\right\} \Rightarrow m.c.m\,(18,24) = 72$$

Tenemos que

$10 : \boxed{1} = 10;\ \ 10 : \boxed{2} = 5; 10 : \boxed{5} = 2; 10 : \boxed{10} = 1$, es decir: el 1, el 2, el 5 y el 10 dividen de forma exacta al 10, por lo que son sus divisores.

24) En un reloj A suena la alarma cada 15 minutos. En otro B cada 20 y en otro C cada 25. Si todos se sincronizan, cuánto tiempo pasará para que las alarmas suenen a la vez?
Solución:

25) Hay que almacenar 150 l de leche y 50 l de agua en la despensa del colegio. Como hay poco espacio, los envases tienen que ser iguales y de la mayor capacidad posible. ¿Cuántos envases necesitaremos y qué capacidad tendrá cada uno de ellos?
Solución:

resuelto **26)** Tenemos un cartón de 100 cm de alto y 75 cm de ancho. Queremos hacer, a partir de ese cartón, láminas cuadradas lo más grande posibles.
a) ¿Cuál será la longitud del lado de cada cuadrado?
b) ¿Cuántos cuadrados obtendremos del cartón inicial?
Solución:

a) La longitud del cuadrado será el mayor divisor común de 100 y 75. Hallamos el m.c.d $(75, 100)$:

$$\left.\begin{array}{l} 75 = 3 \cdot 5^2 \\ 100 = 2^2 \cdot 5^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{m.c.m}(70, 100) = 25$$

b) El área del cartón es $A_{cartón} = 70 \cdot 100 = 7000\ cm^2$, mientras que el área de cada cuadrado es $A_{cuadrado} = 25 \cdot 25 = 625\ cm^2$. El número de cuadrados es $\frac{7000}{625} = 11{,}2 \approx 11$ cuadrados. Sobra un poco de material.

27) Tenemos una losa de mármol de 120 cm de alto y 90 cm de ancho. Queremos hacer con ella losetas cuadradas lo más grande posibles.
a) ¿Cuál será la longitud de cada lado de una de esas losetas?
b) ¿Cuántas losetas enteras podremos obtener del mármol inicial?
Solución:

4. FRACCIONES

A. CONCEPTO DE FRACCIÓN

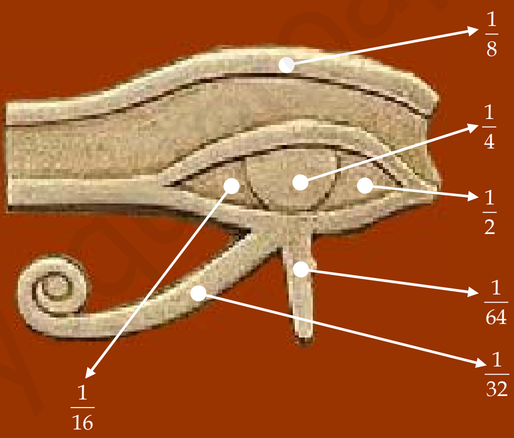
Una fracción son dos cantidades, una a y otra b, que se están dividiendo. Se representa así: $\frac{a}{b}$, en donde a se llama **numerador** y b se llama **denominador**.

Ejemplo de fracción: $\frac{5}{3}$. Ello significa que el 5 está siendo dividido por el 3. El 5 es el numerador y el 3 es el denominador.

El conjunto de fracciones se conoce como **números racionales**, el cual se denota con el símbolo $\mathbb{Q}$. Los números enteros, $\mathbb{Z}$ son realmente un tipo de fracciones.

La antigua civilización egipcia y las fracciones:

Los antiguos egipcios sentían una profunda atracción por las fracciones, tanto que las de mayor uso se simbolizaban mediante trozos del "Ojo de Horus", una especie de amuleto sagrado que daba protección y buena suerte.



Otra cosa interesante era su rechazo a las fracciones que tenían no tenían al 1 como denominador, exceptuando al $\frac{2}{3}$.

Ellos expresaban cualquier fracción como suma de varias fracciones con numerador 1.

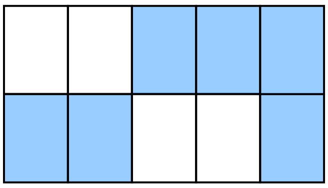
Por ejemplo, en vez de $\frac{2}{5}$ usaban, en su lugar, $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$. Y en vez de $\frac{2}{7}$ preferían $\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$.

Una fracción se puede escribir como suma de fracciones unitarias de muchas formas, pero los egipcios tenían ciertas predilecciones en el modo de hacerlo. Algunas de ellas eran las siguientes: les g las taban las que tenía números pares, ponían como primera fracción a la más pequeña, disponían las fracciones en orden decreciente sin repetición…

1) Completa la tabla siguiente

FRACCIÓN	NUMERADOR	DENOMINADOR	SE LEE ASÍ
$\frac{7}{3}$			
$\frac{3}{5}$			Tres quintos
$\frac{1}{7}$			
$\frac{5}{6}$	5	6	
$\frac{9}{11}$			
$\frac{23}{15}$			

resuelto 2) ¿Qué fracción representa la parte coloreada de la siguiente figura?



Solución:

Nº total de partes: 10

Nº de partes coloreadas: 6

Fracción: $\frac{6}{10}$

3) ¿Qué fracción representa la parte coloreada de la siguiente figura?

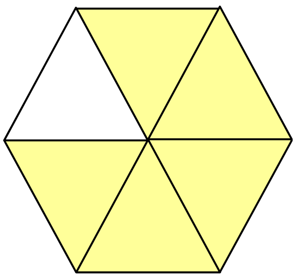
Solución:

Nº de partes: ......

Nº de partes coloreadas: ......

Fracción: $\frac{\square}{\square}$

4) ¿Qué fracción representa la parte coloreada de la siguiente figura?



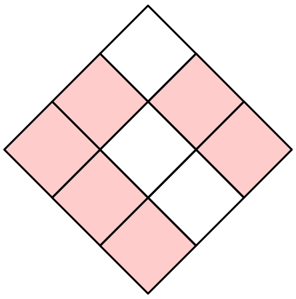
Solución:

Nº de partes: ......

Nº de partes coloreadas: ....

Fracción: $\frac{\square}{\square}$

5) ¿Qué fracción representa la parte coloreada de la siguiente figura?



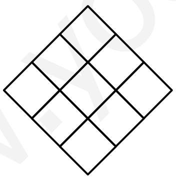
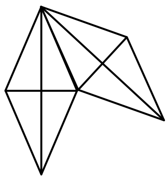
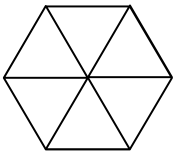
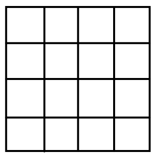
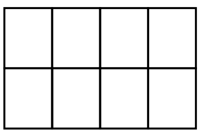
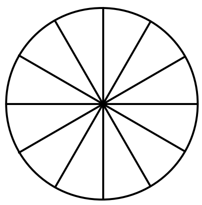
Solución:

Nº de partes: ....
Nº de partes coloreadas: ....
Fracción: $\frac{\square}{\square}$

6) Dibuja una figura que se corresponda con la fracción "siete novenos"
Solución:

7) Dibuja una figura que se corresponda con la fracción "cinco catorceavos"
Solución:

8) Colorea en cada caso la fracción indicada

$\frac{7}{9}$ 	$\frac{5}{8}$ 
$\frac{2}{6}$ 	$\frac{13}{16}$ 
$\frac{3}{8}$ 	$\frac{3}{8}$ 

B. EQUIVALENCIA DE FRACCIONES

Simplificación de fracciones:

Simplificar una fracción es obtener una fracción equivalente más simple. Ello se consigue dividiendo el numerador y el denominador por el mismo número. Cuando esto no se pueda hacer se dice que la fracción es irreducible.

Ejemplo: $\frac{6}{4}$ se puede simplificar en otra fracción equivalente más sencilla si dividimos el numerador y el denominador por 2:

$\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$. Tres medios es una fracción irreducible.

9) Simplifica siempre que sea posible

resuelto **a)** $\frac{105}{315}$

$\frac{105}{315} = \frac{21}{63} = \frac{7}{9}$ No podemos seguir simplificando porque siete novemos es irreducible

Hemos dividido el numerador y el denominador por 5.

Hemos dividido el numerador y el denominador por 3.

resuelto **b)** $\frac{15}{25}$

$\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ No podemos seguir simplificando porque tres quintos es irreducible

Hemos dividido el numerador y el denominador por 3.

c) $\frac{54}{56}$

d) $\frac{64}{128}$

e) $\frac{523}{70}$

f) $\frac{546}{455}$

g) $\frac{468}{330}$

h) $\frac{504}{1080}$

i) $\frac{308}{1176}$

j) $\frac{256}{1024}$

k) $\frac{256}{1024}$

resuelto **10)** Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor:

$$\frac{5}{3},\ \frac{7}{5},\ \frac{11}{6}$$

Solución:

Para poder ordenar las fracciones dadas las escribimos con un denominador común. Eso se hace así:

- Hallo el m.c.m de cada uno de los denominadores y ese será el denominador común:

  $m.c.m\,(3,5,6) = 60$

- Los nuevos nominadores son los antiguos multiplicados por el cociente entre el m.c.m y el denominador antiguo:

$$\frac{7}{5} = \frac{7 \cdot 12}{60} = \frac{84}{60};\quad \frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 20}{60} = \frac{100}{60};\quad \frac{11}{6} = \frac{11 \cdot 10}{60} = \frac{110}{60}$$

Entonces podemos escribir que:

$\frac{84}{60} < \frac{100}{60} < \frac{110}{60}$, o lo que es lo mismo: $\frac{7}{5} < \frac{5}{3} < \frac{11}{6}$.

11) Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor

$\frac{3}{7}, \frac{1}{5}, \frac{7}{15}$ **Solución**:

12) Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor

$\frac{11}{6}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}$ **Solución**:

13) Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor

$\frac{30}{27}, \frac{17}{15}, \frac{33}{30}$ **Solución**:

14) Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor

$\frac{30}{27}, \frac{17}{15}, \frac{33}{30}$ **Solución**:

15) Escribe tres fracciones equivalentes a cada una de las dadas

resuelto **a)** $\frac{6}{5}$ $\quad \frac{6}{5}=\frac{6\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{12}{10}$; $\frac{6}{5}=\frac{6\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{18}{15}$; $\frac{6}{5}=\frac{6\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{24}{20}$

b) $\frac{2}{7}$ ....

c) $\frac{5}{4}$ ....

d) $\frac{11}{9}$ ....

e) $\frac{23}{137}$ ....

f) $-\frac{1}{111}$ ....

g) $\frac{-15}{99}$ ....

h) $-\frac{100}{1000}$ ....

16) Encuentra el término que falta para que las fracciones sean equivalentes

a) $\frac{4}{3}=\frac{8}{\square}$

b) $\frac{5}{2}=\frac{15}{\square}$

c) $\frac{10}{6}=\frac{5}{\square}$

d) $\frac{4}{9}=\frac{\square}{45}$

e) $\frac{3}{7}=\frac{\square}{70}$

f) $\frac{50}{15}=\frac{\square}{3}$

g) $\frac{4}{\square}=\frac{1}{8}$

h) $\frac{21}{\square}=\frac{7}{2}$

i) $\frac{77}{\square}=\frac{11}{3}$

j) $\frac{\square}{3}=\frac{10}{15}$

k) $\frac{\square}{60}=\frac{7}{12}$

l) $\frac{\square}{180}=\frac{17}{60}$

C. FRACCIÓN DE UNA CANTIDAD

En la vida cotidiana es muy común que ciertas cantidades sean aumentadas o disminuidas, expresando ese cambio en forma de fracción.
Ejemplo:

Iván ha gastado $\frac{4}{5}$ de 200 €. ¿Cuántos euros son?

Solución: $\frac{4}{5}\cdot 200=\frac{4\cdot 200}{5}=\frac{800}{5}=160$ € (Multiplicamos la fracción por la cantidad)

17) Completa la tabla:

Fracciones de cantidades	El correspondiente de 25 para la fracción será:	El correspondiente de 100 para la fracción será:
resuelto $\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}\cdot 25=\frac{3\cdot 25}{5}=\frac{75}{5}=25$	$\frac{3}{5}\cdot 100=\frac{300}{5}=60$
$\frac{1}{5}$		
$\frac{3}{10}$		
$\frac{2}{25}$		
$\frac{6}{15}$		
$\frac{1}{50}$		
$\frac{4}{100}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{3}{25}$		
$\frac{7}{30}$		

18) El pasado año la bacteria Erwinia carotovora echó a perder los dos séptimos de las 42.000 toneladas producidas en España de patatas. ¿Cuántas toneladas de patatas se estropearon por esa causa?
Solución:

19) En un examen de lengua suspenden tres quintas partes de una clase de 35 alumnos. a) ¿Cuántos han suspendido? b) ¿Cuántos han aprobado? c) ¿Qué fracción de la clase ha aprobado?
Solución:

D. SUMAS Y RESTAS DE FRACCIONES CON EL MISMO DENOMINADOR

En la suma y resta de fracciones con el mismo denominador, los denominadores se conservan sin cambios, mientras que los numeradores se operan.
Ejemplos:
a) $\frac{1}{5}+\frac{6}{5}=\frac{1+6}{5}=\frac{7}{5}$; b) $\frac{4}{5}-\frac{6}{5}=\frac{4-6}{5}=-\frac{2}{5}$

20) Haz las operaciones indicadas. Simplifica cuando sea posible.

resuelto **a)** $\frac{5}{3}+\frac{3}{3}=\frac{5+4}{3}=\frac{9}{3}=2$

b) $\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=$ ....

c) $\frac{1}{8}-\frac{3}{8}=$ ....

d) $\frac{-1}{7}+\frac{6}{7}=$ ....

e) $\frac{20}{13}-\frac{25}{13}=$ ....

f) $\frac{8}{9}-\frac{11}{9}=$ ....

g) $\frac{10}{2}-\frac{20}{2}=$ ....

h) $\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+\frac{3}{3}=$ ....

i) $\frac{10}{6}-\frac{5}{6}+\frac{9}{6}=$ ....

j) $\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+\frac{3}{3}=$ ....

k) $\frac{5}{4}+\frac{1}{4}-\frac{6}{4}=$ ....

l) $-\frac{11}{7}-\frac{1}{7}-\frac{2}{7}=$ ....

m) $-\frac{4}{9}+\frac{10}{9}-\frac{1}{9}=$ ....

n) $\frac{4}{10}+\frac{1}{10}-\frac{15}{10}=$ ....

o) $\frac{10}{13}-\left(\frac{5}{13}+\frac{3}{13}\right)=$ ....

p) $-\frac{7}{15}-\left(\frac{10}{15}-\frac{3}{15}\right)=$ ....

q) $-\left(\frac{1}{17}-\frac{2}{17}\right)+\frac{10}{17}=$ ....

r) $-\left(\frac{17}{20}+\frac{5}{20}\right)-\frac{13}{20}=$ ....

En la suma y resta de fracciones con distinto denominador hay que escribir todas las fracciones de forma que tengan el mismo denominador.

Ejemplo:

Sea la siguiente suma: $\frac{1}{5}+\frac{7}{6}$. Las fracciones $\frac{1}{5}$ y $\frac{7}{6}$ se pueden escribir de la siguiente forma completamente equivalente: $\frac{1}{5}=\frac{6}{30}$ y $\frac{7}{6}=\frac{35}{30}$

entonces: $\frac{1}{5}+\frac{7}{6}=\frac{6}{30}+\frac{35}{30}=\frac{6+35}{30}=\frac{41}{30}$

E. SUMAS Y RESTAS DE FRACCIONES CON DISTINTO DENOMINADOR

21) Haz las operaciones indicadas:

resuelto **a)** $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{1\cdot 1}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$ ($2|1$, $2|2$)

$m.c.m\,(1,2)=2$

b) $\frac{3}{5}-\frac{6}{1}=\frac{3\cdot\boxed{}}{5}-\frac{6\cdot\boxed{}}{5}=\frac{\boxed{}-\boxed{}}{5}=-\frac{\boxed{}}{5}$ ($5|5$, $5|1$)

$m.c.m\,(1,5)=5$

c) $\frac{4}{6}-7=\frac{4\cdot\boxed{}}{6}-\frac{7\cdot\boxed{}}{6}=\frac{\boxed{}-\boxed{}}{6}=$ ______________ ($6|6$, $6|1$)

$m.c.m\,(1,6)=6$

d) $\frac{1}{4}-\frac{3}{14}=\frac{1\cdot\boxed{}}{28}-\frac{3\cdot\boxed{}}{28}=$ ______________________ ($28|4$, $28|14$)

$$\begin{array}{r|l}4&2\\2&2\\1&\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}14&2\\7&7\\1&\end{array}\qquad \begin{array}{l}4=2^2\\14=2\cdot 7\end{array}\ \Rightarrow\ m.c.m\,(4,14)=2^2\cdot 7=28$$

e) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=$ ______________________________

$$\begin{array}{r|l}2&\\&\\&\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}3&\\&\\&\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}6&\\&\\&\end{array}\qquad\begin{array}{l}2=\\3=\\6=\end{array}\ \Rightarrow\ m.c.m\,(2,3,6)=$$

f) $\frac{1}{2}-\frac{3}{1}+\frac{5}{3}=$

$$\begin{array}{c|c|c|}1 & 2 & 3\end{array} \qquad \begin{array}{l}1=\\2=\\3=\end{array} \Rightarrow m.c.m\,(1,2,3)=$$

g) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=$

$$\begin{array}{c|c|c|}1 & 2 & 6\end{array} \qquad \begin{array}{l}1=\\2=\\6=\end{array} \Rightarrow m.c.m\,(1,2,6)=$$

h) $\frac{60}{20}+\frac{1}{10}-\frac{2}{30}=$

$$\begin{array}{c|c|c|}10 & 20 & 30\end{array} \qquad \begin{array}{l}10=\\20=\\30=\end{array} \Rightarrow m.c.m\,(10,20,30)=$$

i) $\frac{3}{20}+\frac{1}{25}-\frac{11}{60}=$

$$\begin{array}{c|c|c|}20 & 25 & 60\end{array} \qquad \begin{array}{l}20=\\25=\\60=\end{array} \Rightarrow m.c.m\,(20,25,60)=$$

j) $\frac{14}{15}-\frac{1}{45}+3-\frac{2}{75}=$

k) $\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{5}-1\right)=$

l) $-\frac{5}{4}-\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-1\right)=$

m) $\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-2\right)-\frac{1}{3}=$

n) $\frac{1}{2}-\left\{\left(\frac{3}{5}-1\right)+\frac{3}{2}\right\}=$

F. PRODUCTOS Y DIVISIONES

22) Haz las operaciones indicadas:

resuelto **a)** $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 5}=\frac{3}{10}$

b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square}=\frac{\square}{\square}$

c) $\frac{5}{2}\cdot\frac{9}{5}=$ ....

d) $\frac{(-1)}{2}\cdot\frac{3}{5}=$ ....

e) $\frac{(-3)}{2}\cdot\frac{4}{(-5)}=$ ....

f) $\frac{2}{3}\cdot\frac{(-5)}{7}\cdot\frac{9}{5}=$ ....

g) $\frac{1}{2}\cdot\frac{(-2)}{3}\cdot\frac{3}{5}=$ ....

resuelto h) $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}=\frac{3}{4}$

i) $\frac{6}{7}:\frac{(-2)}{3}=\frac{\square\cdot\square}{\square\cdot\square}=\frac{\square}{\square}$

j) $\frac{7}{-2}:\frac{(-3)}{5}=$ ....

k) $\frac{-5}{3}:\frac{(-2)}{11}=$ ....

l) $\frac{-12}{-7}:\frac{(-2)}{3}=$ ....

m) $\frac{4}{100}:\frac{20}{50}=$ ....

G. FRACCIONES Y POTENCIAS

Fracción con exponente positivo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{C}=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}_{\text{C veces}}$$

Fracción con exponente negativo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-C}=\left(\frac{1}{\frac{a}{b}}\right)^{C}=\left(1:\frac{a}{b}\right)^{C}=\left(\frac{b}{a}\right)^{C}=\underbrace{\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}\cdots\frac{b}{a}}_{\text{C veces}}$$

23) Calcula el valor de las siguientes fracciones con exponente positivo

resuelto **a)** $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{27}{8}$

b) $\left(\frac{7}{11}\right)^2 =$ ....

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 =$ ....

d) $\left(\frac{3}{10}\right)^4 =$ ....

e) $\left(-\frac{5}{3}\right)^2 =$ ....

f) $\left(-\frac{7}{2}\right)^3 =$ ....

g) $-\left(\frac{1}{3}\right)^4 =$ ....

h) $\left(\frac{13}{23}\right)^0 =$ ....

i) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 =$ ....

j) $\left(-\frac{1}{10}\right)^5 =$ ....

k) $-\left(\frac{3}{4}\right)^3 =$ ....

l) $-\left(-\frac{7}{5}\right)^2 =$ ....

m) $-\left(-\frac{1}{5}\right)^3 =$ ....

n) $-\left(-\frac{13}{11}\right)^2 =$ ....

24) Calcula el valor de las siguientes fracciones con exponente negativo

resuelto **a)** $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

b) $\left(\frac{7}{11}\right)^{-2} =$ ....

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} =$ ....

d) $\left(\frac{3}{10}\right)^{-4} =$ ....

e) $\left(-\frac{5}{3}\right)^{-2} =$ ....

f) $\left(-\frac{7}{2}\right)^{-3} =$ ....

g) $-\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} =$ ....

h) $\left(-\frac{4}{9}\right)^{-2} =$ ....

H. MIXTOS

25) Realiza las operaciones indicadas. Simplifica previamente los ejercicios k), m) y n).

resuelto **a)** $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}+\frac{5}{2}:\frac{7}{2} = \frac{\cancel{2}}{5}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}+\frac{5\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 7} = \frac{3}{5}+\frac{5}{7} = \frac{46}{35}$

m.c.m $(5,7) = 35$

b) $\frac{3}{2}:\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} =$

c) $\frac{2}{5}:\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=$

d) $\frac{2}{3}:\frac{2}{4}-\frac{4}{2}\cdot\frac{1}{2}=$

e) $\frac{12}{5}\cdot\frac{(-3)}{2}-\frac{5}{(-2)}:\frac{(-7)}{2}=$

f) $\frac{1}{2}\cdot\left\{\left(\frac{2}{3}+1\right)-\frac{1}{2}\right\}=$

g) $\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\right\}:\frac{1}{2}=$

h) $\left\{\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\right\}:\frac{1}{3}=$

i) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{14}-2\right)=$

j) $\frac{1}{2}:\left(1-\frac{1}{5}-\frac{2}{25}\right)-1=$

k) $\frac{100}{20}:\left(1+\frac{20}{50}-\frac{100}{100}\right)-\frac{100}{50}=$

l) $\frac{1}{2}:\left\{\left(\frac{2}{3}+1\right)-\frac{1}{2}:\frac{(-2)}{3}\right\}=$

m) $\frac{100}{20}:\left(1+\frac{20}{50}-\frac{100}{100}\right)-\frac{100}{50}=$

n) $\left(\frac{40}{20}\cdot\frac{45}{90}-\frac{100}{200}\right):\frac{100}{20}-\frac{1000}{500}=$

5. NÚMEROS DECIMALES

Un número decimal es el que está comprendido entre dos números enteros. Tiene una parte entera (a la izquierda de la coma) y una parte decimal (a la derecha de la coma)

A. ORDENACIÓN DE DECIMALES

El mayor de dos números decimales será el que mayor parte entera tenga. Si tienen la misma parte entera, será mayor el que mayor parte decimal tenga. Ejemplos: Entre 3,9 y 4,2 es mayor 4,2, ya que su parte entera es mayor. Pero entre 4,025 y 4,026 es mayor 4,026 ya que su parte entera es mayor.

1) Compara estos pares de números decimales

resuelto **a)** 9,34 y 9,43

La parte entera de los dos números es 9. Por ello nos fijamos sólo en la parte decimal: 34<43. Entonces : 9,34<9,43

b) 9,73 y 8,999999

c) 4,15 y 3,91

d) 14,23 y 14,3

e) 103,75 y 102,9325

2) Ordena de menor a mayor:

resuelto **a)** 10,01; 9,99; 10,101; 11,001

9,99 < 10,01 < 10,101 < 11,001

b) 150,405; 150,450; 150,385; 150,901

c) 0,678; 0,0678; 0,687; 0,0698

d) 3,121; 3,0221; 3,212; 3,2012

e) 250,015; 250,501; 250,105; 250,5

3) Compara estos pares de números decimales y emplea los signos <, >

resuelto **a)** –11,85 y –10,85

De estos dos números negativos será mayor el que menor tenga su valor absoluto. Así que: –11,85 < 10,85

b) –15,85 y –15,58

c) –25,13 y 24,13

d) 100,15 y –1000,15

e) –100,001 y 0,0001

4) Ordena de menor a mayor, empleando el signo $<$

resuelto **a)** $-3,05;\ -3,15;\ 3,01;\ -3,1;\ 3,2$

$-3,15 < -3,1 < -3,05 < 3,01 < 3,02$

b) $60,25;\ -60,2;\ 60,0250;\ -60,100;\ -6,25$

c) $-100,01;\ 100,01;\ -100,01;\ 100,010;\ 100,1$

d) $-0,024,5;\ 0,0251;\ -0,0009,9;\ 0,2309;\ -0,1001$

e) $-5031,7,5;\ 0,005;\ -5030,2;\ 0,0499;\ -0,005$

5) Escribe tres números que estén entre los dos que se indican

resuelto **a)** $-4,15$ y $-4,14$

$-4,15 < -4,149 < -4,146 < -4,144 < -4,14$

b) $-25,25$ y $-25,52$

c) $-60,33$ y $-60,3$

d) $-120,54$ y $-120,53$

e) $-0,001$ y $-0,0009$

B. FRACCIONES Y NÚMEROS DECIMALES

6) Escribe en forma decimal las siguientes fracciones:

resuelto **a)** $\frac{9}{4}$

Hacemos la división:

$$\begin{array}{l|l} 9 & 4 \\ \hline 10 & 2,25 \\ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

b) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{5}{8}$

d) $\frac{9}{11}$

e) $\frac{13}{8}$

División de un nº decimal entre 10, 100, 1000...
La coma se mueve hacia la izquierda tantos lugares como ceros hay.
Ejemplo: 6,034:100 = 0,006034

7) Escribe en forma decimal las siguientes fracciones, pero sin hacer la división

a) $\frac{6}{1000}$

b) $\frac{9}{100}$

c) $\frac{17}{10000}$

d) $\frac{236}{1000}$

e) $\frac{25095}{100}$

División de un nº decimal entre 0,1, 0,001, 0,0001…
La coma se mueve hacia la derecha tantos lugares como ceros hay.
Ejemplo:

C. DIVISIONES Y MULTIPLICACIONES

8) Efectúa las siguientes divisiones mentalmente

resuelto **a)** $75,45:0,01$

Movemos la coma dos lugares hacia la derecha porque dividimos por 0,01, que tiene dos ceros: 7545

b) 430,2:0,1

c) 0,9:0,001

d) 101,902:0,0001

e) 0,001:0,0001

f) 0,001:0,0001

D. CLASIFICACIÓN DE DECIMALES

Decimal exacto: Tiene un número limitado de decimales. Ejemplo: 3,444
Decimal periódico puro: Tiene un número ilimitado de decimales que se repite indefinidamente. Ejemplo: 3,44444444444….
Decimal periódico mixto: Hay decimales que no se repiten y otros que se repiten indefinidamente. Ejemplo: 3,23444444444….

9) Indica de qué tipo es cada uno de los números decimales dados (decimal exacto, periódico puro o periódico mixto)

resuelto **a)** $\frac{6}{5}$

Es decimal exacto porque el número de decimales es finito:

$$\begin{array}{r|l} 6 & 5 \\ \hline 10 & 1{,}2 \\ 0 & \end{array}$$

b) $\frac{2}{7}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{9}{11}$

e) $\frac{4}{15}$

f) $\frac{7}{9}$

Multiplicación de un nº decimal por una potencia de 10.
La coma se mueve hacia la derecha tantos lugares como ceros tiene la potencia de 10.
Ejemplo: $5{,}032 \cdot 10000 = 50320$

10) Realiza las siguientes multiplicaciones

a) $4 \cdot 10000 =$ ....

b) $15 \cdot 1000 =$ ....

c) $1{,}25 \cdot 1000 =$ ....

d) $0{,}03 \cdot 10 =$ ....

e) $92{,}0005 \cdot 100 =$ ....

f) $0{,}09 \cdot 1000000 =$ ....

g) $0{,}002 \cdot 0{,}01 =$ ....

h) $0{,}004 \cdot 0{,}1 =$ ....

i) $0{,}0002 \cdot 0{,}0000001 =$ ....

j) $0{,}00001 \cdot 0{,}01 =$ ....

k) $0{,}00001 \cdot 1000 =$ ....

l) $10000 \cdot 0{,}001 =$ ....

11) Si sumas las columnas obtendrás el mismo valor que sumando las filas o sumando las diagonales. Rellena los cuadros en blanco para que ello sea así.

4,25	6	1,25		3,75
	1,25		3,5	
	1,5	5,25		5,50
2,50	3	4,75		2,75
2,75			0,50	2,25

E. REDONDEO

Redondear un número:

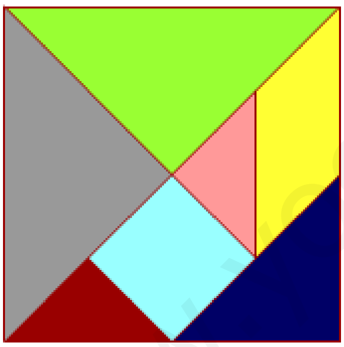
Es aproximarlo según las siguientes reglas:
- Si el valor de la primera cifra que se sustituye es menos que 5, la cifra anterior no varía.
- Si el valor de la primera cifra que se sustituye es mayor o igual que 5, la cifra anterior se aumenta en una unidad.

12) Redondea a las centésimas los siguientes números decimales

	Número decimal	Redondeo a una cifra decimal	Redondeo a dos cifras decimales
resuelto	$3,178 \approx$	3,2	3,18
	$15,366 \approx$		
	$4,246 \approx$		
	$106,325 \approx$		
	$0,263 \approx$		
	$0,053 \approx$		
	$20,267 \approx$		
	$20,394 \approx$		
	$32,846 \approx$		
	$1,055 \approx$		

F. REDONDEO

13) Con la vista puesta en la figura, contesta a las siguientes cuestiones:



a) ¿Cuál es el número de triángulos pequeños necesarios para cubrir todo el cuadrado?
b) ¿Y de triángulos medianos?
c) ¿Y de triángulos grandes?
d) ¿Y de cuadrados pequeños?
e) ¿Y de romboides

14) Fijándote en la figura del ejercicio anterior, completa la siguiente tabla:

	Fracción	Decimal
Triángulo pequeño		
Triángulo mediano		
Triángulo grande		
Cuadrados pequeños		
Romboides		

6. FACTOR COMÚN

FACTOR COMÚN

Cuando una suma tiene varios factores comunes es posible transformar la suma en un producto:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

En este caso, el factor común es a.

El proceso inverso de sacar el factor común es aplicar **la propiedad distributiva**:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

resuelto **1)** 

resuelto **2)** □ · ○ · △ + ⬡ · △ · ◇ = △ · (□ · ○ + ⬡ · ◇)

3) 

4) $2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot (\square + \square)$

5) $3 \cdot a + 3 \cdot b =$ ....

6) $4 \cdot p - 4 \cdot q =$ ....

7) $a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d = a \cdot (\square + \square + \square)$

8) $p \cdot q - r \cdot q = q \cdot (\square - \square)$

9) $p \cdot q + r \cdot q - s \cdot q =$ ....

10) $a \cdot a - a \cdot b + a \cdot c =$ ....

11) $a \cdot b \cdot b + a \cdot a \cdot b = a \cdot b \cdot (\square + \square \cdot \square)$

12) $3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 - 3 \cdot 7 =$ ....

13) $7 \cdot 5 - 7 \cdot 3 + 7 \cdot 11 =$ ....

14) $4 \cdot 3 - 8 \cdot 3 - 3 \cdot 3 =$ ....

15) $9 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 7 \cdot 2 =$ ....

16) $3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 - 2 \cdot 5 =$ ....

17) $2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x + 2 \cdot x \cdot x \cdot y - 3 \cdot 2 \cdot x =$ ....

18) $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 - 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 =$ ....

19) $abc - ab + ac = \boxed{}\left(\boxed{} \cdot \boxed{} - \boxed{} + \boxed{}\right)$

20) $pq + pqr - qr =$ ....

21) $r \cdot s + r = \boxed{r} \cdot \boxed{s} + \boxed{r} \cdot 1 = \boxed{} \cdot \left(\boxed{} + \boxed{}\right)$

22) $x \cdot y + z = \boxed{} \cdot \boxed{} + \boxed{} \cdot 1 = \boxed{} \cdot \left(\boxed{} + \boxed{}\right)$

23) $a \cdot b + a = \boxed{a} \cdot \boxed{b} + \boxed{} \cdot 1 = \boxed{} \cdot \left(\boxed{} + \boxed{}\right)$

24) $3 \cdot 2 + 2 = \boxed{3} \cdot \boxed{2} + \boxed{2} \cdot 1 =$ ....

25) $5 - 5 \cdot x =$ ....

26) $xy + xz + x =$ ....

27) $a + ab + ac =$ ....

28) $p \cdot q + p + p \cdot r =$ ....

29) $a \cdot b^2 + a^2 \cdot b = a \cdot b \cdot b + a \cdot a \cdot b = a \cdot b \cdot \left(\boxed{} + \boxed{}\right)$

30) $p^2 \cdot q + q^2 \cdot p =$ ....

31) $2^2 \cdot 5 + 5^2 \cdot 2 =$ ....

32) $5 \cdot 7^2 + 7 \cdot 5^2 + 5 \cdot 3 =$ ....

33) $p^2 \cdot q^2 + p \cdot q \cdot r = p \cdot p \cdot q \cdot q + p \cdot q \cdot r = \boxed{} \cdot \boxed{} \cdot \left(\boxed{} \cdot \boxed{} + \boxed{}\right)$

34) $r^2 \cdot s + r \cdot s^2 + r \cdot s = r \cdot r \cdot s + r \cdot s \cdot s =$ ....

35) $3x^2 + 6x = 3xx + 2 \cdot 3x =$ ....

36) $3x^2 + 9x =$ ....

37) $25x^2 - 5x^3 =$ ....

38) $8a^3 - 6a^4 =$ ....

39) $2xy + 4xz =$ ....

40) $14p + 7pq + 7r =$ ....

41) $30x^2y - 10x^2y^2 =$ ....

42) $10ab - 2a + 10ac = 2 \cdot 5ab - 2a + 2 \cdot 5ac =$ ....

43) $3abc + 9ab - 3abd =$ ....

44) $4x^3 + 2x^2y - 6x =$ ....

45) $3xy^2 + 15xy - 6x^2y =$ ....

46) $12abc - 36ab + 6a^2bc =$ ....

47) $2xy + 4x^3y^2 - 10x^2y =$ ....

7. SIMPLIFICAR

resuelto **1.** $\frac{x^2 \cdot x^5}{x \cdot x^3} = \frac{x^{2+5}}{x^{1+3}} = \frac{x^7}{x^4} = x^{7-4} = x^3$

2. $\frac{x^3 \cdot x^5}{x^2 \cdot x^4} =$ ---

3. $\frac{x^4 \cdot x^4}{x^5 \cdot x^2} =$ ---

4. $\frac{a^3 \cdot a^5}{a^2 \cdot a^6} =$ ---

5. $\frac{b^3 \cdot b^6 \cdot b^5}{b^4 \cdot b^5} =$ ---

6. $\frac{x^4 \cdot x^3 \cdot x^2}{x^2 \cdot x^6} =$ ---

resuelto **7.** $\frac{3x^3 \cdot 2x^5}{5x^2 \cdot 2x^4} = \frac{3 \cdot 2 \cdot x^{3+5}}{5 \cdot 2 \cdot x^{2+4}} = \frac{3x^8}{5x^6} = \frac{3}{5}x^{8-6} = \frac{3}{5}x^2$

8. $\frac{2x^4 \cdot 3x^3 \cdot 5x^2}{3x^2 \cdot 5x^6} =$ ---

9. $\frac{3x^2 \cdot 5x^2 \cdot 7x^6}{3x^3 \cdot 7x^3} =$ ---

10. $\frac{2a^4 \cdot 3b^3}{2a^2 \cdot 5b^6} =$ ---

11. $\frac{2p^3 \cdot q^2 \cdot 3r^4}{p^2 \cdot 2q^3 \cdot 5r^5} =$ ---

resuelto **12.** $\frac{2a+2b}{2c+2d} = \frac{2(a+b)}{2(c+d)} = \frac{a+b}{c+d}$

13. $\frac{3x+3y}{3z+3t} =$ ---

14. $\frac{ab+bc}{bc} =$ ---

resuelto **15.** $\dfrac{ab^2 - a^2b}{ab} = \dfrac{\cancel{ab}\,(b-a)}{\cancel{ab}} = b - a$

resuelto **16.** $\dfrac{a}{a+ab} = \dfrac{\cancel{a}}{(1+b)\,\cancel{a}} = \dfrac{1}{1+b}$

17. $\dfrac{x}{xy+x} =$

18. $\dfrac{r}{r+rs} =$

19. $\dfrac{4x+4}{4} =$

20. $\dfrac{4x+4}{8} =$

21. $\dfrac{8}{4x+4} =$

22. $\dfrac{24}{2x-4} =$

23. $\dfrac{6x^2}{3x^2-3x} =$

24. $\dfrac{x+3}{2x+3 \cdot 2} = \dfrac{\cancel{x+3}}{2 \cdot \cancel{(x+3)}} = \dfrac{1}{2}$

25. $\dfrac{x+5}{3x+3 \cdot 5} =$

26. $\dfrac{x-5}{3x-15} =$

27. $\dfrac{x+3}{3x+9} =$

28. $\dfrac{x-2}{2x-4} =$

29. $\dfrac{12x-36}{3x-9} =$

30. $\dfrac{3x-5}{18x-30}=$ --

31. $\dfrac{15x^3-5x^2}{30x^2-10x}=$ --

32. $\dfrac{3x^2y-xy}{9xy-3y}=$ --

33. $\dfrac{4xy-2xy^2}{8xy-4xy^2}=$ --

34. $\dfrac{3a^2b^2-a^2}{9ab-3a}=$ --

35. $\dfrac{7pq-14p}{14pq-28p}=$ --

36. $\dfrac{a^2b-ab^2}{a^3b^2-a^2b^3}=$ --

8. ECUACIONES

Concepto de ecuación:

Una ecuación es un signo "=" y letras y números a un lado y a otro. Cada lado se llama "miembro". Las letras se llaman **incógnitas.**

$$\underbrace{3x+4}_{1^{er}\ \text{miembro}} = \underbrace{9-2x}_{2^{o}\ \text{miembro}}$$

Resolver una ecuación es hallar el valor de esos términos desconocidos, que en el ejemplo anterior son las **x**.

Ecuaciones equivalentes

Sumando, o restando, o multiplicando o dividiendo los dos miembros de una ecuación por el mismo número, obtendremos una ecuación equivalente.
Resolver una ecuación no es más que encontrar una ecuación equivalente a la dada en la que en un miembro aparece solo la incógnita.

Ejemplos de ecuaciones equivalentes a una dada.

- La ecuación $x-3=7$ es equivalente a esta otra: $x-3+3=7+3$, en donde a los dos miembros se le ha sumado el número 3.
- La ecuación $x+3=7$ es equivalente a esta otra: $x+3-3=7-3$, en donde a los dos miembros se le ha sumado el número -3
- La ecuación $\frac{x}{3}=7$ es equivalente a esta otra: $\frac{x}{3}\cdot 3=7\cdot 3$, en donde se han multiplicado los dos miembros por 3.
- La ecuación $3x=7$ es equivalente a esta otra: $\frac{3x}{3}=\frac{7}{3}$, en donde se han dividido los dos miembros entre 3.

A. ECUACIONES DEL TIPO $x+a=b$

1) Resuelve las siguientes ecuaciones:

resuelto **a)** $x+2=4$

Solución:

Para x se quede sola en un miembro, restamos el número 2 a ambos miembros:

$$x+2-2=4-2 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

b) $x-4=12$

Solución:

Para que x se quede sola en un miembro, sumamos el número 4 a ambos miembros:

$$x-4+4=12-4 \Rightarrow \text{.........................}$$

c) $x-5=-8$

Solución:

Para que x se quede sola en un miembro, sumamos el número .... a ambos miembros y operamos:

....

resuelto **d)** $x+1-2=-7+5$

Solución:

$x+1-2=-7+5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x-1=-2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x-1+1=-2+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x=-1}$

e) $x-4+10=5-3$

Solución:

$x-4+10=5-3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ .... $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ .... $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ....

f) $x-2+5=3-1$

Solución:

g) $x-1+7=4-2$

Solución:

h) $x+2-1=4-6$

Solución:

i) $-2+x+1=3-8$

Solución:

j) $6+1+x=-9+3$

Solución:

k) $10+2+x=1+4$

Solución:

l) $4-x+5=-2-5$

Solución:

m) $x-4+10=-9-3$

Solución:

n) $-1-x+7=8-11$

Solución:

o) $2-7=4+x-1$

Solución:

p) $-2-7=x+1+5$

Solución:

q) $1+1=3+1+x$

Solución:

r) $10-11=4+3-x$
Solución:

s) $30-15=-x+9-4$
Solución:

t) $4-10=-6-1-x$
Solución:

B. ECUACIONES DEL TIPO ax=b

Ecuación ax=b
Se divide ambos miembros entre a

2) Resuelve las siguientes ecuaciones:

resuelto **a)** $30x=60$

Solución:
El 30 que multiplica a la x se puede quitar dividiendo ambos miembros entre 30:

$$\frac{30x}{30}=\frac{60}{30} \Rightarrow \frac{\cancel{30}x}{\cancel{30}}=\frac{60}{30} \Rightarrow \boxed{x=2}$$

b) $3x=-4$
Solución:
El 3 que multiplica a la x se puede quitar dividiendo ambos miembros entre 3:

c) $-2x=-14$
Solución:

f) $-140x=35$
Solución:

i) $-121x=-11$
Solución:

d) $-30x=5$
Solución:

g) $20x=50$
Solución:

j) $-1024x=-704$
Solución:

e) $24x=-120$
Solución:

h) $-15x=-525$
Solución:

k) $135x=-625$
Solución:

C. ECUACIONES DEL TIPO ax+b=c

> Ecuación ax+b=c
> Primero se restan ambos miembros por b y luego se dividen ambos miembros entre a.

3) Resuelve las siguientes ecuaciones:

resuelto **a)** $2x+3=12$

Solución:

Para despejar x damos dos pasos:

a. A los dos miembros se les resta 3:

$$2x+3-3=12-3$$

$$2x=9$$

b. Ambos miembros se dividen entre 2:

$$\frac{2x}{2}=\frac{9}{2}\Rightarrow x=\frac{9}{2}$$

b) $9x - 4 = 14$

Solución:

Para despejar x hay que dar dos pasos:

a. Sumar a ambos miembros la cantidad ....

....

....

b. Dividir ambos miembros entre ....

.... (simplifica el resultado)

c) $10x-2=4-2$

Solución:

d) $18x-3+2=-10$

Solución:

e) $5x - 2x + 3x = 8$

Solución:

f) $13x - 12x + 4x = -10$

Solución:

D. ECUACIONES DEL TIPO $ax + b = cx + d$

Ecuación ax+b=cx+d
Se convierte en una ecuación del tipo ex+f=g haciendo lo siguiente:
- A los dos miembros se les resta cx.
- A los dos miembros se les resta b

4) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $9x - 2x = 22 - 4x$

Solución:

Para despejar x hay que dar dos pasos:

a. Sumamos 4x a los dos miembros y simplificamos:

$$9x - 2x + 4x = 22 - 4x + 4x$$

$$11x = 22$$

b. Dividimos ambos miembros entre 11

(simplifica el resultado)

b) $7x - 2 = 3 - 5x$

Solución:

a. Añadimos 5x a los dos miembros y también la cantidad 2, simplificando luego:

b. Dividimos ambos miembros entre 12

c) $3x+9=x-4$

Solución:

a. Restamos x en los dos miembros y luego restamos también en los dos miembros, simplificando:

b. Dividimos ambos miembros entre 2:

d) $5x+3=x-6$

Solución:

h) $17-3x=4x+6$

Solución:

e) $11x-2=-x+1$

Solución:

i) $-12-5x=7x+3$

Solución:

f) $20x-10=-x+5$

Solución:

j) $-12-5x=7x+3$

Solución:

g) $1-x=-3+4x$

Solución:

k) $-12-5x=7x+3$

Solución:

E. ECUACIONES CON DENOMINADOR

> **Ecuaciones con denominador**
> Los denominadores se quitan buscando el común denominador y transformando la ecuación en una del tipo ax+b=c, que resolveremos como de costumbre.

5) Resuelve las siguientes ecuaciones:

resuelto **a)** $\frac{x}{3}+\frac{2}{7}=\frac{1}{3}$

Solución:

$m.c.m(3,7)=21$. Entonces:

$$21|\underline{3} \qquad 21|\underline{7} \qquad 21|\underline{3}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{x\cdot 7}{21}+\frac{2\cdot 3}{21}=\frac{1\cdot 7}{21}\Rightarrow \frac{7x}{21}+\frac{6}{21}=\frac{7}{21}\Rightarrow$$

> cuando todos los denominadores son iguales, se quitan

$$7x+6=7\Rightarrow 7x=1\Rightarrow x=\frac{1}{7}$$

b) $\frac{x}{3}-\frac{1}{4}=2$

Solución:

$m.c.m(4,3)=12$. Entonces:

$$12|\underline{3} \qquad 12|\underline{4} \qquad 12|\underline{1}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{x\cdot \boxed{}}{12}+\frac{1\cdot \boxed{}}{12}=\frac{2\cdot \boxed{}}{12}\Rightarrow \frac{\boxed{}\cdot x}{\cancel{12}}+\frac{\boxed{}}{\cancel{12}}=\frac{\boxed{}}{\cancel{12}}\Rightarrow$$

c) $\frac{3x}{2}+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$

Solución:

$m.c.m(2,4)=4$. Entonces:

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{3x\cdot \boxed{}}{4}+\frac{3\cdot \boxed{}}{4}=\frac{1\cdot \boxed{}}{4}\Rightarrow$$

d) $\frac{5x}{6}-\frac{1}{7}=\frac{3}{3}-5$

Solución:

$m.c.m(3,6,7) =$ ....

$$\frac{\square\cdot\square}{\square}-\frac{\square\cdot\square}{\square}=\frac{\square\cdot\square}{\square}-\frac{\square\cdot\square}{\square}\Rightarrow$$

....

....

e) $-\frac{11x}{2}+\frac{14}{6}-1=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

Solución:

$m.c.m(2,4,6,8) =$

$$-\frac{\square\cdot\square}{\square}+\frac{\square\cdot\square}{\square}-\frac{\square\cdot\square}{\square}=\frac{\square\cdot\square}{\square}+\frac{\square\cdot\square}{\square}\Rightarrow$$

....

....

f) $\frac{3x}{2}+x-2=\frac{1}{4}+2x$

Solución:

$m.c.m(2,4) =$ ....

....

....

F. ECUACIONES EN LAS QUE APARECEN PARÉNTESIS

6) Resuelve las siguientes ecuaciones:

resuelto **a)** $-4(3-x)=-3$

Solución:

$$-4\cdot 3+4\cdot x=-3 \Rightarrow -12+4x=-3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x=-3+12 \Rightarrow 4x=9 \Rightarrow x=\frac{9}{4}$$

b) $-4(3-x)-(-3-5x)=-1+x$

Solución:

c) $-4(3-x)-(-3-5x)=2(x-3x-1)$

Solución:

d) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{x}{8}$

Solución:

m.c.m$(2,8)=$

e) $\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{x+1}{6}=\dfrac{3}{2}$

Solución:

m.c.m$(2,3,6)=$

f) $\frac{3(x-4)}{2}+\frac{5(2x+1)}{3}=\frac{2x}{4}$

Solución:

m.c.m$(2,3,4)=$ ....

....

....

g) $\frac{3(2x-4+x)}{2}-\frac{5(2x-1)}{3}=\frac{2(x-3)}{4}$

Solución:

m.c.m$(2,3,4)=$ ....

....

....

G. OTROS TIPOS DE ECUACIONES

7) Resuelve las siguientes ecuaciones:

resuelto **a)** $\frac{1}{x}=2$

Solución:

$m.c.m(x,1)=x$

$$\frac{1\cdot\boxed{1}}{x}=\frac{2\cdot\boxed{x}}{x}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{2x}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x=1\Rightarrow\quad x=\frac{1}{2}$$

Hay un método que en principio es más sencillo. Consiste en multiplicar en cruz y eliminar los denominadores:

$$\frac{1}{x}=2\Rightarrow 1=2x\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

b) $\frac{3}{2}=\frac{5}{7x}$

Solución:

$$\mathrm{m.c.m}(2,7x)=14x$$

$$\frac{14x}{2} \qquad \frac{14x}{7x}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{\boxed{}\cdot\boxed{7x}}{14x}=\frac{\boxed{}\cdot\boxed{2}}{14x}\Rightarrow\boxed{}x=\boxed{}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

c) $\frac{5}{2}=\frac{1}{7x}-1$

Solución:

$$\mathrm{m.c.m}(1,2,7x)=14x$$

$$\frac{14x}{2} \qquad \frac{14x}{7x} \qquad \frac{14x}{1}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{\boxed{}\cdot\boxed{7x}}{14x}=\frac{\boxed{}\cdot\boxed{2}}{14x}-\frac{\boxed{}\cdot\boxed{14x}}{14x}\Rightarrow$$

----

d) $\frac{5}{2}+3=\frac{1}{3x}-2$

Solución:

$$\mathrm{m.c.m}(1,2,3x)=6x$$

$$\frac{16x}{2} \qquad \frac{16x}{1} \qquad \frac{16x}{3x} \qquad \frac{16x}{1}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{\boxed{}\cdot\boxed{}}{\boxed{}}+\frac{\boxed{}\cdot\boxed{}}{\boxed{}}=\frac{\boxed{}\cdot\boxed{2}}{\boxed{}}-\frac{\boxed{}\cdot\boxed{14x}}{\boxed{}}\Rightarrow$$

----

e) $\dfrac{2x}{1-x}=\dfrac{3}{5}$

Solución:

$m.c.m\,(1,2,7x)=(1-x)\cdot 5$

$$\dfrac{(1-x)\cdot 5}{1-x} \qquad \dfrac{(1-x)\cdot 5}{5}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\dfrac{\boxed{}\cdot\boxed{}}{\boxed{}}=\dfrac{\boxed{}\cdot\boxed{}}{\boxed{}}\Rightarrow$$

---

f) $1-\dfrac{\frac{1}{2}}{x}=1$

Solución:

9. PROBLEMAS DE ECUACIONES

1) Completa la siguiente tabla

	Lenguaje ordinario	Lenguaje algebraico
resuelto	Un número cualquiera más 3	$x+3$
	Un número cualquiera menos 1	
	El doble de un número cualquiera	
	El triple de un número cualquiera	
	La mitad de número cualquiera	
	La quinta parte de un número cualquiera	
	La sexta parte de un número cualquiera	
	La décima parte de un número cualquiera	
	La séptima parte de un número cualquiera menos su mitad	
	Un número menos el doble del anterior	
	Un número más su triple	
	Un número menos su cuadrado	
resuelto	El consecutivo de un número cualquiera	$x+1$
	Un número más dos veces su consecutivo	
	Un número menos el cuadrado de su consecutivo	
	El triple de un número menos el doble de su consecutivo	
	La suma de tres números consecutivos	
	La suma de los cuadrados de dos números consecutivos	
	El resultado de sumar al número el anterior y el posterior	
	El triple del resultado de restar 5 a un número	

resuelto **2)** Fui a la librería con 100 euros y compré 2 libros ¿Cuánto me costaron si uno valía el doble que el otro?
Solución:

- Los euros que cuestan el libro barato: x
- Los euros que cuesta el libro caro: $2x$
- La relación entre los dos libros: $x + 2x = 100$
- Resolvemos la ecuación: $x + 2x = 100$

$$x + 2x = 100 \Rightarrow 3x = 100$$

$$x = \frac{100}{3} = 33,33$$

Conclusiones:
- El libro barato cuesta $33,33$ euros.
- El libro caro cuesta $2 \cdot 33,33 = 66,66$ euros.

3) Fui a la librería con 60 euros y compré 3 libros ¿Cuánto me costaron si el más caro valía el doble de uno y el triple del otro?
Solución:

- Los euros que cuestan el libro barato: ……………………………………
- Los euros que cuesta el libro intermedio: ……………………………………
- Los euros que cuesta el libro más caro: ……………………………………
- La relación entre los tres libros: ……………………………………
- Resolvemos la ecuación: ……………………………………

……………………………………

……………………………………

Conclusiones:
- El libro más barato cuesta ……………………………………
- El libro intermedio cuesta ……………………………………
- El libro más caro cuesta ……………………………………

4) ¿Cuántos años tiene Ricardo si su hermano Pelayo tiene uno más que él y entre los dos suman 25 años?
Solución:

- Años de Ricardo, en función de x: ______________________
- Años de Pelayo, en función de x: ______________________
- La relación entre sus edades: ______________________

- Resolvemos la ecuación: ______________________

____

____

Conclusiones:
- La edad de Ricardo es ______________________
- La edad de Pelayo es ______________________

5) La suma de las edades de mis padres es 84 años. Si mi madre tiene dos años menos que mi padre, ¿que edad tiene cada uno?
Solución:

- Edad de mi padre: ....
- Edad de mi madre:..
- Relación entre sus edades:..
- Resolvemos la ecuación: ....

....

....

Conclusiones:
- La edad de mi padre ....
- La edad de mi madre ....

6) Si al dinero que tengo le sumo su triple y le resto 20€, me quedan 28€. ¿Cuanto dinero tengo?
Solución:

7) Las dos terceras partes de una clase aprueban un examen. Si hay 16 aprobados, ¿cuántos alumnos hay en la clase?
Solución:

8) Si Juan compra dos entradas para el concierto le sobran 12€; en cambio, si compra 3 entradas le sobran 3€. Averigua cuánto cuesta cada entrada.
Solución:

9) Si a la edad que tiene mi prima le sumo dos años me da la mitad de la edad de mi hermano. ¿Cuántos años tienen mi prima y mi hermano?
Solución:

10) Perfecto tiene 40 años y su hijo Iván 10. ¿Cuántos años han de pasar para que la edad de Perfecto sea el triple de la edad de Iván?
Solución:

11) Larisa es tres años más joven que su hermana Ramona y un año mayor que su hermano Eusebio. Entre los tres igualan la edad de su madre, que tiene 38 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?
Solución:

12) Las vacas y las gallinas de una granja dan un total de 60 cabezas y 180 patas. ¿Cuántas vacas y gallinas hay en total?
Solución:

El papiro de Ahmes

Volvemos a hacer referencia a Egipto. Se conserva una colección de problemas matemáticos, de hace 4000 años, en un papiro de 6 metros de largo y 0,3 de ancho, conocido como papiro de Ahmes, reproducido en la imagen inferior. En el contexto del presente tema es posible resolver varios de estos problemas. Dejamos el enunciado de algunos de ellos.

Problema 24 del papiro de Ahmes

13) Una cantidad y su séptima parte suman 19. ¿Cuál es la cantidad?
Solución:

Problema 26 del papiro de Ahmes

14) Una cantidad y su cuarta parte suman 15. ¿Cuál es la cantidad?
Solución:

Problema 29 del papiro de Ahmes

15) A una cierta cantidad se le suman sus dos terceras partes, a la suma se le añade su tercera parte y la tercera parte de todo eso es 10. ¿Cuál es la cantidad?
Solución:

10. PROPORCIONALIDAD

A. PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Dos magnitudes son directamente proporcionales si al aumentar una de ellas la otra aumenta de forma proporcional, o de forma equivalente, si al disminuir una de ellas la otra disminuye de forma proporcional.
Ejemplo:
Si un libro cuesta 20 euros, dos libros costarán 40 euros, tres libros 60 euros, …, etc. Al aumentar el número de libros aumenta el número de euros y al disminuir el número de libros disminuye el número de euros.
Pongamos esto en forma de tabla:

Libros	1	2	3	4	5
Euros	20	40	60	80	100

Observamos que:

$\frac{1}{20}=\frac{2}{40}=\frac{3}{60}=\frac{4}{80}=\frac{5}{100}=0{,}05$. Ese número es la razón de proporcionalidad del problema

1) Observa la siguiente tabla. Intenta completarla y responde a las siguientes cuestiones:
   a) ¿La proporcionalidad es directa o inversa?
   b) ¿Cuál es la razón de proporcionalidad?
   c) ¿Qué distancia se recorre en una jornada?

Velocidad (km/h)	5	6		8			11
Distancia recorrida en una jornada (km)	20		28			40	

2) Observa la siguiente tabla. Intenta completarla y responde a las siguientes cuestiones:
   a) ¿La proporcionalidad es directa o inversa?
   b) ¿Cuál es la razón de proporcionalidad?
   c) ¿Qué masa tiene una silla?

Número de sillas	3				7		9
Masa (kg)	18					48	

resuelto **20)** Quince libros cuestan 300 €. ¿Cuánto costarán 7 libros?
Solución:

1. Tabla de datos

libros	€
15	300
7	x

2. Tabla de proporcionalidad

libros	€
+	+
–	–

$\Rightarrow$ P. Directa

3. Ecuación

$$\frac{15}{7}=\frac{300}{x}\Rightarrow 15\cdot x=300\cdot 7\Rightarrow x=\frac{2100}{15}=140\ €$$

21) Un árbol de 5 m da una sombra de 7 m. ¿Qué sombra da un edificio de 15 m?
Solución:

1. Tabla de datos

altura (m)	sombra (m)
5	7
15	x

2. Tabla de proporcionalidad

altura	sombra

$\Rightarrow$ ....

3. Ecuación

$$\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}\Rightarrow$$

22) Un alumno tarda en escribir 12 palabras en 30 s. ¿Cuánto tiempo tardará en escribir, como mínimo, una redacción de 150 palabras?
Solución:

1. Tabla de datos

palabras	s

2. Tabla de proporcionalidad

palabras	s

$\Rightarrow$ P. Directa

3. Ecuación

23) Un trabajador gana 120 € en dos días. ¿Cuánto ganará en un mes?
Solución:

1. Tabla de datos

2. Tabla de proporcionalidad

⇒ ....

3. Ecuación

---

24) Tres cucharadas suponen 60 ml de sopa. ¿Cuánto supondrán 40 cucharadas?
Solución:

1. Tabla de datos

2. Tabla de proporcionalidad

⇒ ....

3. Ecuación

---

25) En 7 días una familia gasta 420 €. Halla los € que se gastan en 8 semanas.
Solución:

26) Una piscina que inicialmente almacena 10000 ℓ, pierde 20 ℓ debido a filtraciones en sus paredes cada 3 horas. ¿Cuánto tiempo tardará en no haber agua en la piscina?
Solución:

B. PROPORCIONALIDAD INVERSA

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al aumentar una de ellas la otra disminuye de forma proporcional, o de forma equivalente, si al disminuir una de ellas la otra aumenta de forma proporcional.
Ejemplo:
Si un albañil hace una casa en 60 meses, dos albañiles tardarán 30 meses, tres tardarán 20 meses, …, etc. Al aumentar el número de albañiles disminuye el número de meses y al disminuir el número de albañiles aumenta el número de días.
Pongamos esto en forma de tabla:

albañiles	1	2	3	4	5
días	60	30	20	15	12

Observamos que:

$1\cdot 60 = 2\cdot 30 = 3\cdot 20 = 4\cdot 15 = 5\cdot 12 = 60$. Ese número es la razón de proporcionalidad del problema.

3) Observa la siguiente tabla. Intenta completarla y responde a las siguientes cuestiones:
   a) ¿La proporcionalidad es directa o inversa?
   b) ¿Cuál es la razón de proporcionalidad?

Velocidad (km/h)	2	3				7	8
Tiempo de viaje para ir de A a B (minutos)	120		60			34,29	

4) Observa la siguiente tabla. Intenta completarla y responde a las siguientes cuestiones:
   a) ¿La proporcionalidad es directa o inversa?
   b) ¿Cuál es la razón de proporcionalidad?

Número de invitados en una fiesta	7			10				14
Tiempo que tarda la bebida en agotarse (minutos)	140							70

resuelto **27)** Un coche tarda 15 minutos en hacer cierto recorrido cuando va a 120 km/h. ¿Cuánto tardará si va a 50 km/h?

Solución:

1. Tabla de datos

minutos	km/h
15	120
x	50

2. Tabla de proporcionalidad

min	km/h
+	–
–	+

$\Rightarrow$ P.Inversa

3. Ecuación

$$\frac{x}{15}=\frac{120}{50}\Rightarrow 50\cdot x=120\cdot 15\Rightarrow x=\frac{1800}{50}=36 \text{ minutos}$$

28) Cinco asnos comen cierta cantidad de heno en 10 días. ¿Cuántos días tardarán en comer esa misma cantidad de heno 25 asnos?

Solución:

1. Tabla de datos

2. Tabla de proporcionalidad

$\Rightarrow$ ....

3. Ecuación

----

29) 60 obreros hacen un puente en 10 días. ¿Cuántos obreros serán necesarios para hacer ese puente en 3 días?

Solución:

1. Tabla de datos

2. Tabla de proporcionalidad

$\Rightarrow$ ....

3. Ecuación

----

30) Las ruedas delanteras y traseras de un tractor tienen 0,5 y 1,2 metros, respectivamente. Cuando las ruedas delanteras dan 100 vueltas, ¿cuántas vueltas han dado las delanteras?
Solución:

1. Tabla de datos

2. Tabla de proporcionalidad

$\Rightarrow$ ....

3. Ecuación

C. PORCENTAJES

31) Completa la siguiente tabla

	Porcentaje	Fracción	Decimal
resuelto	30%	$\frac{30}{100}$	0,3
		$\frac{70}{100}$	
			0,9
	75%		
			0,05
		$\frac{7}{100}$	
	4%		

32) ¿Cuál es el 30 % de 500?
Solución:

30% de 500: $\frac{30}{100} \cdot 500 = 150$

33) ¿Cuál es el 90 % de 3500?
Solución:

34) ¿Cuál es el 75 % de 5400?
Solución

35) ¿Cuál es el 60 % de 30?
Solución

36) ¿Cuál es el 35 % de 0,9?
Solución:

37) ¿Cuál es el 0,5 % de 25?
Solución:

38) ¿Cuál es el 0,1 % de 0,9?
Solución:

39) ¿Cuál es el 0,01 % de 15?
Solución

resuelto **40)** Si en una clase de 27 alumnos hay 21 con los ojos marrones, ¿cuál es el porcentaje de éstos?
Solución:

$$\frac{21}{27}\cdot 100 = 77,8\%$$

41) En un pueblo de 2000 habitantes, 800 son mujeres. ¿Cuál es el porcentaje de mujeres? ¿Y de hombres?
Solución:

42) En un país de con una población activa de 20 millones de personas, 5 millones no tienen trabajo. ¿Cuál es el porcentaje de desempleados en ese país? ¿Y el porcentaje de ocupados?
Solución:

43) Un arriesgado inversor de bolsa ha perdido en un día 500 € de los 20000 € que invirtió. ¿Cuál ha sido el porcentaje de las pérdidas?
Solución:

44) En una sala hay 80 personas, siendo chicas el 60 % de sus integrantes. ¿Cuántas chicas hay en la sala? ¿Y chicos?

Solución:

45) En cierto país, cursan la ESO un millón ochocientos mil alumnos. El 15% de las chicas no consigue superar estos estudios, mientras que en el caso de los chicos, la cifra se eleva al 50%. Responde a las siguientes cuestiones:

a) El número de chicas que no superan la ESO.

b) El número de chicos que no superan la ESO.

c) El porcentaje total de personas que no superan la ESO.

Solución:

46) Cierto concesionario de coches hace un descuento del 17 % al que se compre uno antes de que acabe el mes. Si estamos interesados en un coche de 20000 €, ¿por cuánto nos saldrá si nos beneficiamos de esa oferta?

Solución:

11. UNIDADES

A. UNIDADES DE MASA

En el Sistema Internacional, SI, la unidad principal de masa es el kilogramo, kg. Los submúltiplos del kg son: el hectogramo, hg, el decagramo, dag, el gramo, g, el decigramo, dg, el centigramo, cg, y el miligramo, mg.

Para expresar una unidad dada en otra menor hay que multiplicar por 10 tantas veces como posiciones las separe. Para expresar una unidad dada en otra mayor hay que dividir por 10 tantas veces como posiciones las separe.

1 kg en las demás unidades	1 mg en las demás unidades
1 kg son 10 hg	1 mg son 0,1 cg
1 kg son 100 dag	1 mg son 0,01 dg
1 kg son 1000 g	1 mg son 0,001 g
1 kg son 10000 dg	1 mg son 0,0001 dag
1 kg son 100000 cg	1 mg son 0,00001 hg
1 kg son 1000000 mg	1 mg son 0,000001 kg

El paso de una unidad a otra se ve en el siguiente esquema:

$$\boxed{\text{kg}} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{hg} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{dag} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{g} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{dg} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{cg} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{mg}$$

Otras unidades importantes: tonelada y quintal métrico.

- 1000 kg son una tonelada, t: $1000\ \text{kg} = 1\ \text{t}$
- 100 kg son un quintal métrico: $100\ \text{kg} = 1$ quintal métrico

1) Expresa en kg:

a) 15 hg $\quad 15\ hg \cdot \dfrac{1\ kg}{10\ hg} = \dfrac{15 \cdot 1\ kg}{10} = 1{,}5\ kg$

b) 82,5 hg $\quad 82{,}5\ hg \cdot \dfrac{1\ kg}{10\ hg} = \dfrac{\boxed{}\ kg}{\boxed{}} = \ldots\ldots\ldots\ kg$

c) 1600 dag $\quad 1600\ dag \cdot \dfrac{\boxed{}\ kg}{100\ dag} = \dfrac{\boxed{}\ kg}{\boxed{}} = \ldots\ldots\ldots\ kg$

d) 3,25 dag $3{,}25\ dag \cdot \dfrac{\boxed{}\ kg}{\boxed{}\ dag} = \dfrac{\boxed{}\ kg}{\boxed{}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ kg$

e) 20000 dg ....

f) 450,25 dg ....

g) 300 cg ....

h) 15,5 cg ....

i) 15000 mg ....

j) 3500,05 mg ....

k) 10 t ....

l) 0,005 t ....

m) 300 quintales ....

n) 0,15 quintales ....

2) Expresa en g:

a) 0,05 kg $0{,}05\ kg \cdot \dfrac{1000\ g}{1\ kg} = \dfrac{0{,}05 \cdot 1000\ g}{1} = 5\ g$

b) 10,3 kg $10{,}3\ kg \cdot \dfrac{1000\ g}{1\ kg} = \dfrac{\boxed{}\ g}{\boxed{}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ g$

c) 0,25 hg $0{,}25\ hg \cdot \dfrac{\boxed{}\ g}{1\ hg} = \dfrac{\boxed{}\ g}{\boxed{}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ g$

d) 10,3 hg $10{,}3\ hg \cdot \dfrac{\boxed{}\ g}{\boxed{}\ hg} = \dfrac{\boxed{}\ g}{\boxed{}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ g$

e) 0,205 dag ....

f) 7,3 dag ....

g) 1025 dg ....

h) 0,15 dg ....

i) 12 cg ....

j) 3,06 cg ....

k) 1008 mg ....

l) 15,45 mg ....

m) 0,001 quintales ....

n) 0,015 quintales ....

o) 0,25 quintales ....

p) 1,05 quintales ....

q) 0,00003 toneladas ....

r) 0,0025 toneladas ....

s) 0,85 toneladas

3) Completa la tabla

km^2	ha	a	m^2	cm^2
0,15				
	0,25			
		70		
			150,05	
				530,75
0,0001				
	0,75			
		1,25		

B. UNIDADES DE LONGITUD

En el Sistema Internacional, SI, la unidad principal de superficie es el metro , m. Los submúltiplos del m son: el decímetro, dm, el centímetro, cm, y el milímetro, mm.
Los múltiplos del m son: el decámetro, dam, el hectómetro, hm, y el kilómetro, km.

Para expresar una unidad dada en otra menor hay que multiplicar por 10 tantas veces como posiciones las separe. Para expresar una unidad dada en otra mayor hay que dividir por 10 tantas veces como posiciones las separe.

1 m en sus tres unidades inferiores	1 m en sus tres unidades superiores
1 m son 10 dm	1 m son 0,1 dam
1 m son 100 cm	1 m son 0,01 hm
1 m son 1000 mm	1 m son 0,001 km

El paso de una unidad a otra se ve en el siguiente esquema:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & \cdot 10 & & \cdot 10 & & \cdot 10 & & \cdot 10 & & \cdot 10 & & \cdot 10 & \\
 & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & \\
\text{km} & & \text{hm} & & \text{dam} & & \boxed{\text{m}} & & \text{dm} & & \text{cm} & & \text{mm} \\
 & \nwarrow\swarrow & & \nwarrow\swarrow & & \nwarrow\swarrow & & \nwarrow\swarrow & & \nwarrow\swarrow & & \nwarrow\swarrow & \\
 & :10 & & :10 & & :10 & & :10 & & :10 & & :10 &
\end{array}
$$

4) Expresa en m:

a) 5 km $\quad 5\ \text{km} \cdot \dfrac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = \dfrac{5 \cdot 1000\ \text{m}}{1} = 5000\ \text{m}$

b) 450 dm $\quad 450\ \text{dm} \cdot \dfrac{1\ \text{m}}{10\ \text{dm}} =$ .... m

c) 0,6 hm $\quad 0{,}6\ \text{hm} \cdot \dfrac{\boxed{}\ \text{m}}{\boxed{}\ \text{hm}} =$ .... m

d) 100 mm $\quad \boxed{}\ \text{mm} \cdot \dfrac{\boxed{}\ \text{m}}{\boxed{}\ \text{mm}} =$ ....

e) 0,015 dam ....

f) 300 cm ....

g) 0,9 dm ....

5) Completa la tabla

km^2	ha	a	m^2	cm^2
0,15				
	0,25			
		70		
			150,05	
				530,75

C. UNIDADES DE SUPERFICIE. ÁREA Y HECTÁREA

En el Sistema Internacional, SI, la unidad principal de superficie es el metro cuadrado, m^2. Los submúltiplos del m^2 son: el decímetro cuadrado, dm^2, el centímetro cuadrado, cm^2 y el milímetro cuadrado, mm^2.
Los múltiplos del m^2 son: el decámetro cuadrado, dam^2 (también conocido como área, a), el hectómetro cuadrado, hm^2 (también conocido como hectárea, ha) y el kilómetro cuadrado, km^2.

Para expresar una unidad dada en otra menor hay que multiplicar por 100 tantas veces como posiciones les separe. Para expresar una unidad dada en otra mayor hay que dividir por 100 tantas veces como posiciones les separe.

1 m^2 expresado en unidades menores	1 m^2 expresado en unidades mayores
1 m^2 son 100 dm^2	1 m^2 son 0,01 dam^2
1 m^2 son 10000 cm^2	1 m^2 son 0,0001 hm^2
1 m^2 son 1000000 mm^2	1 m^2 son 0,000001 km^2

El paso de una unidad a otra se ve en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & \cdot 100 & & \cdot 100 & & \cdot 100 & & \cdot 100 & & \cdot 100 & & \cdot 100 & \\ & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & \\ km^2 & & hm^2 & & dam^2 & & \boxed{m^2} & & dm^2 & & cm^2 & & mm^2 \\ & \nwarrow\swarrow & & \nwarrow\swarrow & & \nwarrow\swarrow & & \nwarrow\swarrow & & \nwarrow\swarrow & & \nwarrow\swarrow & \\ & :100 & & :100 & & :100 & & :100 & & :100 & & :100 & \end{array}$$

Otras unidades importantes: área y hectárea.

- A los decámetros cuadrados también se les conoce como áreas, a: $1\ dam^2 = 1\ a$
- A los hectómetros cuadrados también se les conoce como hectáreas, ha: $1\ hm^2 = 1\ ha$

6) Expresa en m^2:

a) $45\ dam^2$ $\quad 45\ dam^2 \cdot \dfrac{100\ m^2}{1\ dam^2} = \dfrac{45 \cdot 100\ m^2}{1} = 4500\ m^2$

b) $34{,}2\ dm^2$ $\quad 34{,}2\ dm^2 \cdot \dfrac{1\ m^2}{100\ dm^2} = \dfrac{1234{,}2\ m^2}{100} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ m^2$

c) $5{,}5\ hm^2$ $\quad 5{,}5\ hm^2 \cdot \dfrac{10000\ m^2}{1\ hm^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

d) $0{,}0045\ km^2$ $\quad 0{,}0045\ km^2 \cdot \dfrac{\boxed{}\ m^2}{\boxed{}\ km^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

e) $1500\ mm^2$ $\quad \boxed{}\ mm^2 \cdot \dfrac{\boxed{}\ m^2}{\boxed{}\ mm^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

f) $15000\ cm^2$ $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

g) $0{,}016\ hm^2$ $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

7) Expresa en ha las siguientes magnitudes:

a) $500\ m^2$ $\quad 500\ m^2 \cdot \dfrac{1\ ha}{10000\ m^2} = \dfrac{500\ ha}{10000} = 0{,}05\ ha$

b) $4000\ dm^2$ $\quad 4000\ dm^2 \cdot \dfrac{1\ ha}{1000000\ m^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ha$

c) $0{,}5\ km^2$ $\quad 0{,}5\ km^2 \cdot \dfrac{\boxed{}\ ha}{\boxed{}\ km^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

d) $50{,}5\ hm^2$ $\quad \boxed{}\ hm^2 \cdot \dfrac{\boxed{}\ ha}{\boxed{}\ hm^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

e) $75\ dam^2$ $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

f) $25000\ cm^2$ $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

g) $35{,}5\ a$ $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

8) Completa la tabla:

km^2	ha	a	m^2	cm^2
0,15				
	0,25			
		70		
			150,05	
				530,75

D. UNIDADES DE VOLUMEN

En el Sistema Internacional, SI, la unidad principal de volumen es el metro cúbico, m^3. Los submúltiplos del m^3 son: el decímetro cúbico, dm^3, el centímetro cúbico, cm^3 y el milímetro cúbico, mm^3.
Los múltiplos del m^3 son: el decámetro cúbico, dam^3, el hectómetro cúbico, hm^3 y el kilómetro cúbico, km^3.

Para expresar una unidad dada en otra menor hay que multiplicar por 1000 tantas veces como posiciones les separe. Para expresar una unidad dada en otra mayor hay que dividir por 1000 tantas veces como posiciones les separe.

1 m^3 expresado en unidades menores	1 m^2 expresado en unidades mayores
1 m^3 son 10^3 dm^3	1 m^3 son 10^{-3} dam^3
1 m^3 son 10^6 cm^3	1 m^3 son 10^{-6} hm^3
1 m^3 son 10^9 mm^3	1 m^3 son 10^{-9} km^3

El paso de una unidad a otra se ve en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & \cdot 10^3 & & \cdot 10^3 & & \cdot 10^3 & & \cdot 10^3 & & \cdot 10^3 & & \cdot 10^3 & \\ & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & & \nearrow\searrow & \\ km^3 & & hm^3 & & dam^3 & & \boxed{m^3} & & dm^3 & & cm^3 & & mm^3 \\ & \nwarrow\swarrow & & \nwarrow\swarrow & & \nwarrow\swarrow & & \nwarrow\swarrow & & \nwarrow\swarrow & & \nwarrow\swarrow & \\ & :10^3 & & :10^3 & & :10^3 & & :10^3 & & :10^3 & & :10^3 & \end{array}$$

Otras unidades importantes: El litro. Sus múltiplos y submúltiplos.

- Un decímetro cúbico, dm^3 es un litro, l.
- Múltiplos del litro: decalitro, dal (10 litros), hl (100 l), kilolitro, kl (1000 l).
- Submúltiplos del litro: decilitro, dl (0,1 l), centilitro, cl (0,01 l), mililitro, ml (0,001 l).

9) Expresa en hm^3

a) $18\ dam^3$ $\quad 18\ dam^3 \cdot \dfrac{1\ hm^3}{1000\ dam^3} = \dfrac{18 \cdot 1\ hm^3}{1000} = 0{,}018\ hm^3$

b) $23{,}4\ dam^3$ $\quad 23{,}4\ dam^3 \cdot \dfrac{1\ hm^3}{\boxed{}\ dam^3} =$ ....

c) $142{,}53\ cm^3$ $\quad 142{,}53\ cm^3 \cdot \dfrac{1\ hm^3}{\boxed{}\ cm^3} =$ ....

d) $0{,}3\ km^3$ $\quad 0{,}3\ km^3 \cdot \dfrac{1\ hm^3}{\boxed{}\ km^3} =$ ....

e) $32400\ m^3$ ....

f) $7000\ dm^3$ ....

g) $40000000\ mm^3$ ....

10) Expresa en litros:

a) 4,25 kℓ $\quad 4{,}25\ kl \cdot \dfrac{1000\ l}{1\ kl} = \dfrac{4{,}25 \cdot 1000\ l}{1} = 4250\ l$

b) 3,27 hℓ $\quad 3{,}27\ hl \cdot \dfrac{100\ l}{1\ hl} =$ ....

c) 400,81 dℓ $\quad 400{,}81\ dl \cdot \dfrac{1\ l}{\boxed{}\ dl} =$ ....

d) 0,13 daℓ $\quad \boxed{}\ dal \cdot \dfrac{1\ l}{\boxed{}\ dal} =$ ....

e) 120 mℓ ....

f) 0,025 dℓ ....

g) 0,001 hℓ ....

11) Expresa en m^3

a) $5\,\ell$ $\quad 5\ l \cdot \dfrac{1\ m^3}{1000\ l} = \dfrac{5 \cdot 1\ m^3}{1000} = 0{,}005\ m^3$

b) $66\ c\ell$ $\quad 66\ cl \cdot \dfrac{1\ dl}{10\ cl} \cdot \dfrac{1\ m^3}{1000\ dl} =$ ....

c) $3000\ m\ell$ $\quad 3000\ ml \cdot \dfrac{1\ l}{\boxed{}\ ml} \cdot \dfrac{\boxed{}\ m^3}{1000\ l} =$ ....

d) $15\ k\ell$ $\quad 15\ kl \cdot \dfrac{\boxed{}\ l}{\boxed{}\ kl} \cdot \dfrac{\boxed{}\ m^3}{\boxed{}\ l} =$ ....

e) $100\ h\ell$ $\quad \boxed{}\ hl \cdot \dfrac{\boxed{}\ l}{\boxed{}\ hl} \cdot \dfrac{\boxed{}\ m^3}{\boxed{}\ l} =$ ....

f) $450\ d\ell$ $\quad \boxed{}\ dl \cdot \dfrac{\boxed{}\ l}{\boxed{}\ dl} \cdot \dfrac{\boxed{}\ m^3}{\boxed{}\ l} =$ ....

g) $70{,}05\ da\ell$ $\quad \boxed{}\ dal \cdot \dfrac{\boxed{}\ l}{\boxed{}\ dal} \cdot \dfrac{\boxed{}\ m^3}{\boxed{}\ l} =$ ....

12) Completa la tabla

km^3	m^3	l	cm^3	ml
0,005				
	0,25			
		300		
			2500	
				51000

Los ingenieros de la NASA también se confunden con las unidades

Cuando los profesores te adviertan de tus errores en el manejo de unidades, puedes decirles que nadie está libre de errores, ni siquiera los reputados trabajadores de la NASA.
En 1999, se arruinó una misión espacial a Marte al estrellarse la sonda Mars Climate Orbiter contra la superficie del planeta rojo. Los ingenieros que diseñaron la nave usaron unidades en el sistema anglosajón, ibf (pies, libras) mientras que los ingenieros encargados del sofware utilizaron el Sistema Internacional, S.I (metros, kilogramos).
Un error que cometen muchos alumnos pero que como mucho les lleva al suspenso. En el caso de los científicos, supuso una pérdida de más de 300 millones de euros

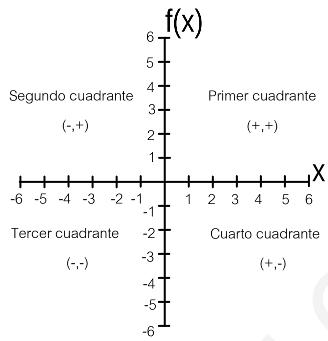
12. FUNCIONES

A. REPRESENTACIÓN DE PUNTOS EN UN PLANO

Plano cartesiano

Un plano cartesiano consiste en dos rectas numéricas perpendiculares: el eje X y el eje Y, que se cortan el en origen de coordenadas, determinando 4 zonas, llamadas cuadrantes.

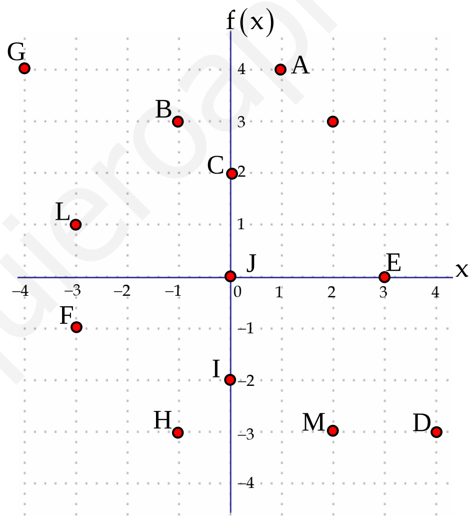
Los puntos quedan definidos en el plano cartesiano mediante dos valores, uno dado por el eje X y otro por el eje Y, llamados coordenadas del punto y que se denotan así: (x,y).



resuelto **1)** Representa en un plano cartesiano los siguientes puntos:

A(1,4); B(-1,3); C(0,2); D(4,-3); E(3,0);
F(-3,-1); G(-4,4); H(-1,-3); I(0,-2); J(0,0);
K(2,3); L(-3,1); M(2,-3)

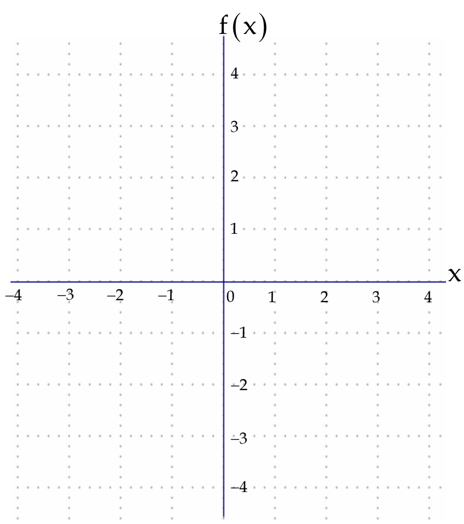
Solución:



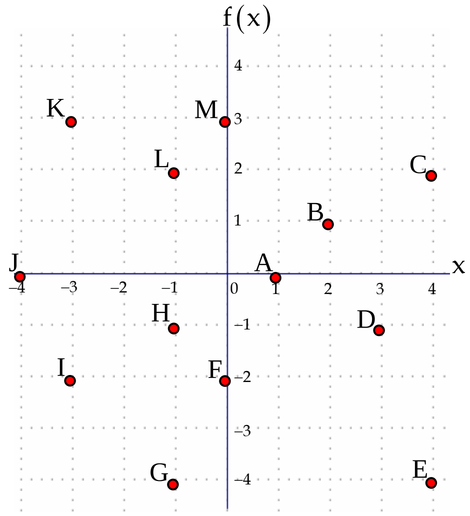
2) Representa en un plano cartesiano los siguientes puntos:

A(1,3); B(-1,2); C(0,3); D(4,-2); E(2,0);
F(-3,-2); G(-4,3); H(-2,-2); I(0,-3); J(0,0);
K(2,4); L(-3,2); M(2,-4)

Solución:



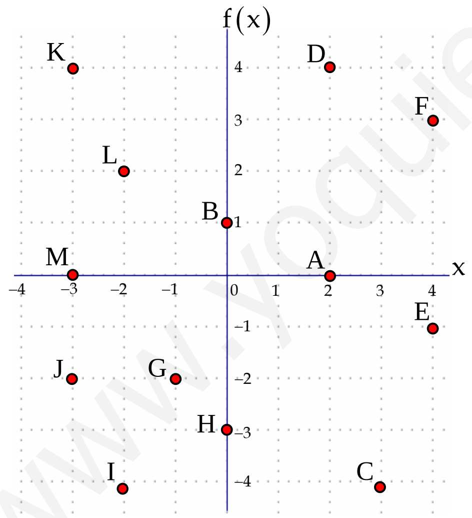
resuelto **3)** Indica las coordenadas de cada uno de los puntos representados en el siguiente sistema cartesiano.



Solución:

A(1,0); B(2,1); C(4,2); D(3,-1);
E(-4,-4);F(0,-2); G(-1,-4); H(-1,-1);
I(-3,-2); J(-4,0);K(-3,3); L(-1,2);
M(0,3)

4) Indica las coordenadas de cada uno de los puntos representados en el siguiente sistema cartesiano.



Solución:

A(,); B(,); C(,); D(,);

E(,); F(,); G(,); H(,);

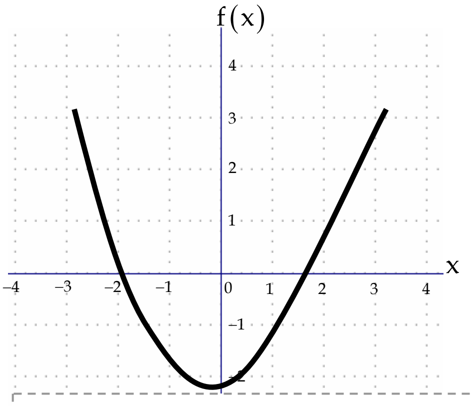
I(,); J(,); K(,); L(,);

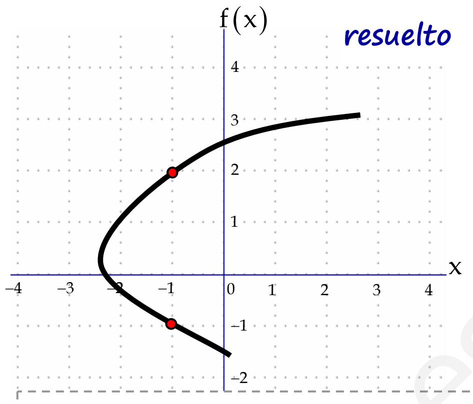
M(,)

B. CONCEPTO DE FUNCIÓN

Función
Una función es una relación entre x y f(x) de tal manera que a cada valor de x le corresponde un único valor de f(x). A x se le llama variable independiente y a f(x) variable dependiente

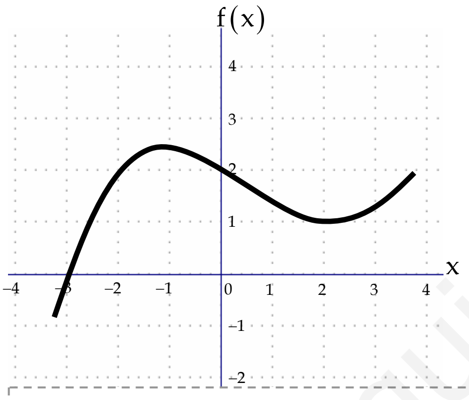
5) Indica cuál de las siguientes gráficas se corresponden con una función y por qué.

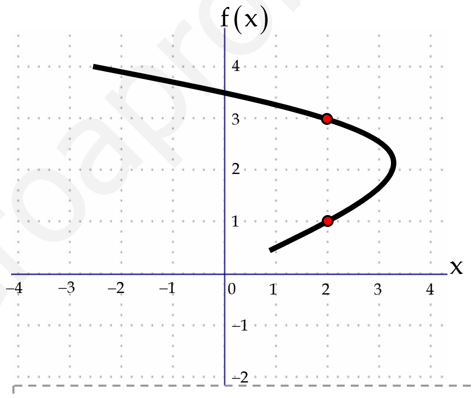


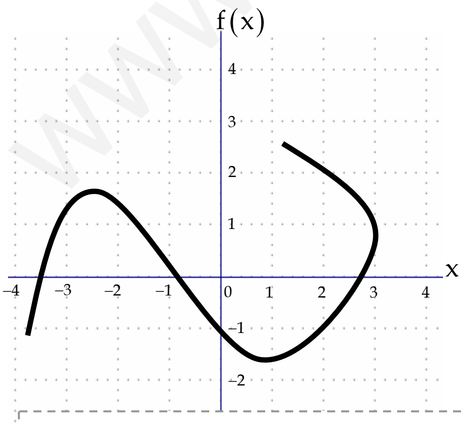


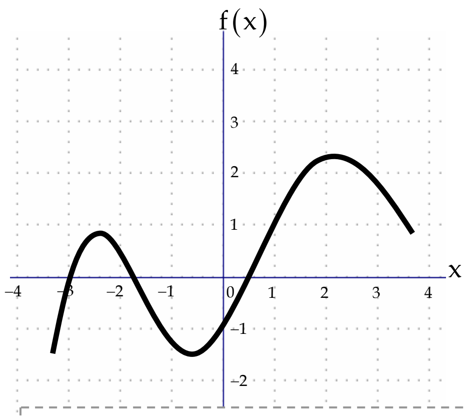
resuelto

No es función. Hay valores de x para los que la función tiene más de un valor. Por ejemplo: para x=−1 la función vale 2 y −1.









C. EXTRACCIÓN DE PUNTOS EN UNA FUNCIÓN

6) Halla el valor de $f(x)=2\cdot x-7$ para los siguientes valores de x:

a) $x=4$ b) $x=0$ c) $x=-4$ d) $x=\frac{3}{8}$

Solución:

a) Si $x=4$, entonces:

$f(4)=2\cdot 4-7=1$

b) Si $x=0$, entonces:

$f(\quad)=2\cdot\boxed{}-7=\boxed{}$

c) Si $x=-4$, entonces:

$f(\quad)=$ --

d) Si $x=\frac{3}{8}$, entonces:

$f(\quad)=$ --

7) Halla el valor de $f(x)=\frac{x^2-x+1}{2-x}$ para los siguientes valores de x:

a) $x=3$; b) $x=0$; c) $x=-3$; d) $x=\frac{1}{2}$

Solución:

a) Si $x=3$, entonces:

$f(3)=\frac{3^2-3+1}{2-3}=-7$

b) Si $x=0$, entonces:

$f(\quad)=$ --

c) Si $x=-3$, entonces:

$f(\quad)=$ --

d) Si $x=\frac{1}{2}$, entonces:

$f(\quad)=$ --

8) Extrae cinco puntos pertenecientes a la función $f(x)=\frac{3}{2}x^2-4x+1$ eligiendo los siguientes valores de x:

a) $x=2$; b) $x=1$; c) $x=0$; d) $x=-1$; e) $x=-2$

Solución:

x	f(x)		Puntos
2	$\frac{3}{2}\cdot 2^2-4\cdot 2+1=-1$	$\Rightarrow$	$A(2,-1)$
1		$\Rightarrow$	B(,)
0		$\Rightarrow$	C(,)
-1		$\Rightarrow$	D(,)
-2		$\Rightarrow$	E(,)

9) Extrae cinco puntos pertenecientes a la función $f(x)=\frac{10-2x-3x^2}{x^3}$

Solución:

Elegimos 5 valores de x y los llevamos a la función. Cada par (x,y) será un punto de la función.

x	f(x)		Puntos
2		$\Rightarrow$	A(,)
1		$\Rightarrow$	B(,)
0		$\Rightarrow$	C(,)
-1		$\Rightarrow$	D(,)
-2		$\Rightarrow$	E(,)

D. REPRESTACIÓN DE UNA FUNCIÓN

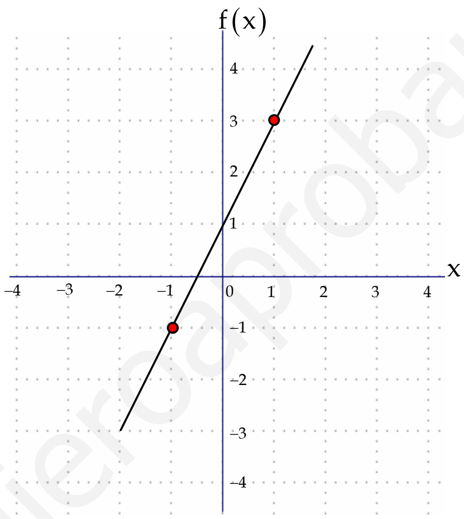
resuelto **10)** Representa la función $f(x)=2x+1$.

Solución:

Construyo una tabla de valores para obtener dos puntos de la función, por ejemplo $x=1;\ x=-1$

x	f(x)		Puntos
1	$f(1)=2\cdot 1+1=3$	$\Rightarrow$	$A(1,3)$
-1	$f(-1)=2\cdot(-1)+1=-1$	$\Rightarrow$	$B(-1,-1)$

Llevamos estos dos puntos al plano cartesiano

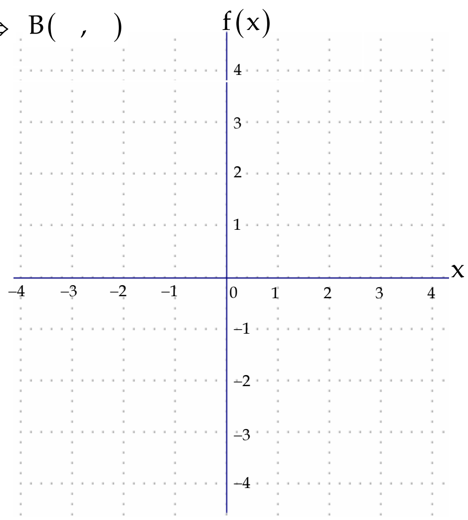


11) Representa la función $f(x)=-2x+1$ para los valores de x dados en la tabla:

Solución:

x	f(x)		Puntos
1		$\Rightarrow$	A(,)
-1		$\Rightarrow$	B(,)

Llevamos estos dos puntos al plano cartesiano



12) Representa la función $f(x)=x-3$, tomando, para x, los siguientes dos puntos: $x=3;\ x=0$

Solución:

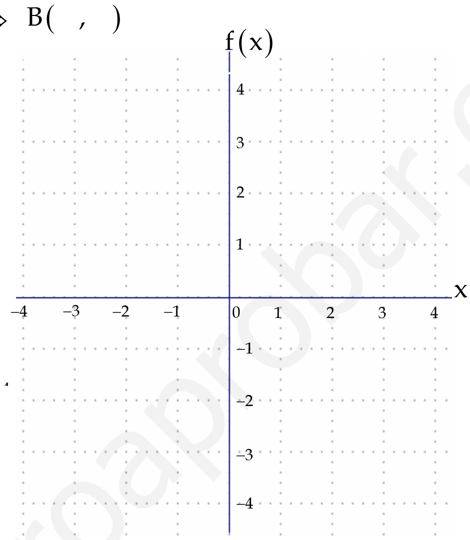
x	f(x)
1	
-1	

Puntos

$\Rightarrow$ A(,)

$\Rightarrow$ B(,)

Llevamos estos dos puntos al plano cartesiano:



13) Representa la función $f(x)=-3x$, tomando, para x, los siguientes dos puntos: $x=1;\ x=-1$

Solución:

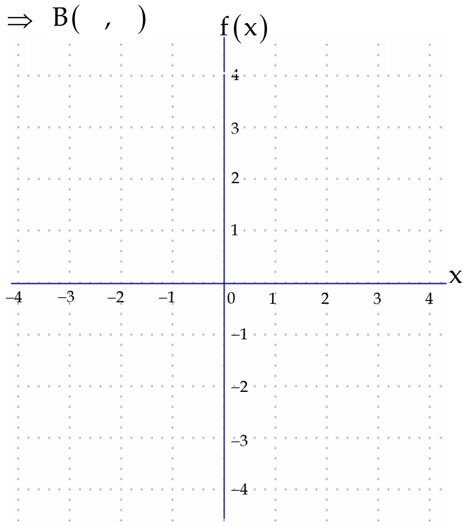
x	f(x)
1	
-1	

Puntos

$\Rightarrow$ A(,)

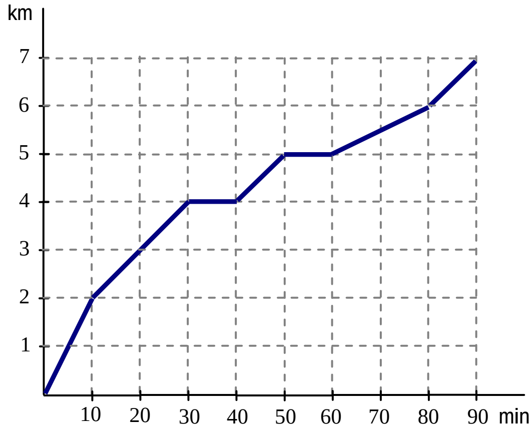
$\Rightarrow$ B(,)

Llevamos estos dos puntos al plano cartesiano:



E. INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS

14) La siguiente gráfica representa la distancia recorrida por un futbolista durante un partido.



a) ¿Cuántos km recorre al cabo de 90 minutos?

…………………………………

b) ¿Cuántos km ha recorrido en los 10 primeros minutos?

…………………………………

c) ¿Cuántos minutos ha estado sin correr? ¿Cuáles han sido esos dos intervalos del partido?

……………………………………………………………………………………

d) ¿Cuánto tiempo tardó en recorrer los primeros 6 km?

……………………………………………………………………………………

13. RECTAS Y ÁNGULOS

A. POSICIÓN RELATIVA DE RECTAS EN EL PLANO

Posición relativa de rectas en el plano

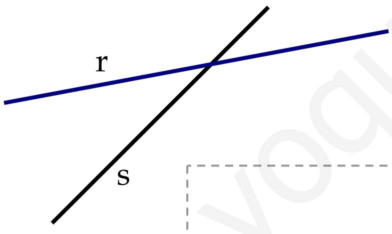
r y s son paralelas

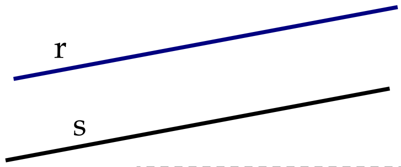
r y s son secantes oblicuas

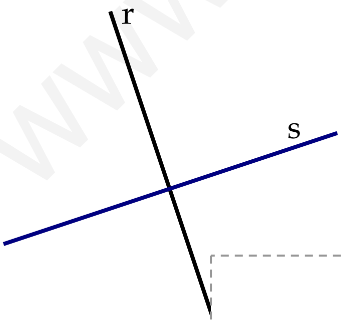
r y s son secantes perpendiculares

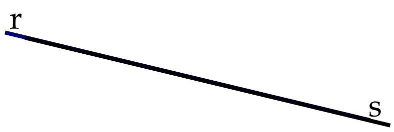
Paralelas: no se cortan nunca
Secantes oblicuas: se cortan y su ángulo no es de 90º
Secantes perpendiculares: se cortan y su ángulo es de 90º

1) Indica en cada caso las posiciones relativas de las siguientes rectas. (paralelas, secantes oblículas, secantes perpendiculares)

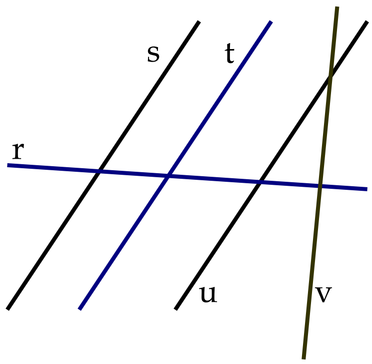






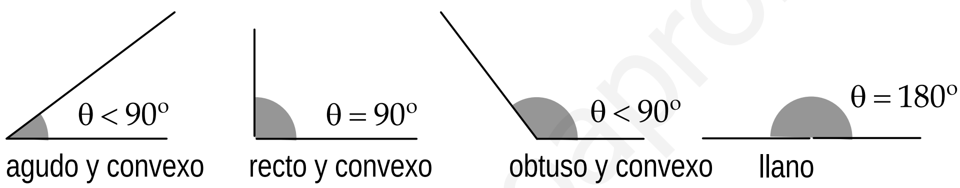


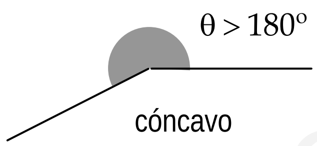
2) Indica en cada caso las posiciones relativas de las siguientes rectas.



B. CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS, SEGÚN SU MEDIDA

Clasificación de ángulos, según su medida





Convexo: ángulo menor que 180º

Cóncavo: ángulo mayor que 180º

3) Indica de qué tipo son los siguientes ángulos, según su medida y explica por qué. (Llano, obtuso, recto, agudo, convexo, cóncavo)

a) 45º Es agudo (ángulo menor que 90º) y convexo (ángulo menor que 180º)

b) 100º

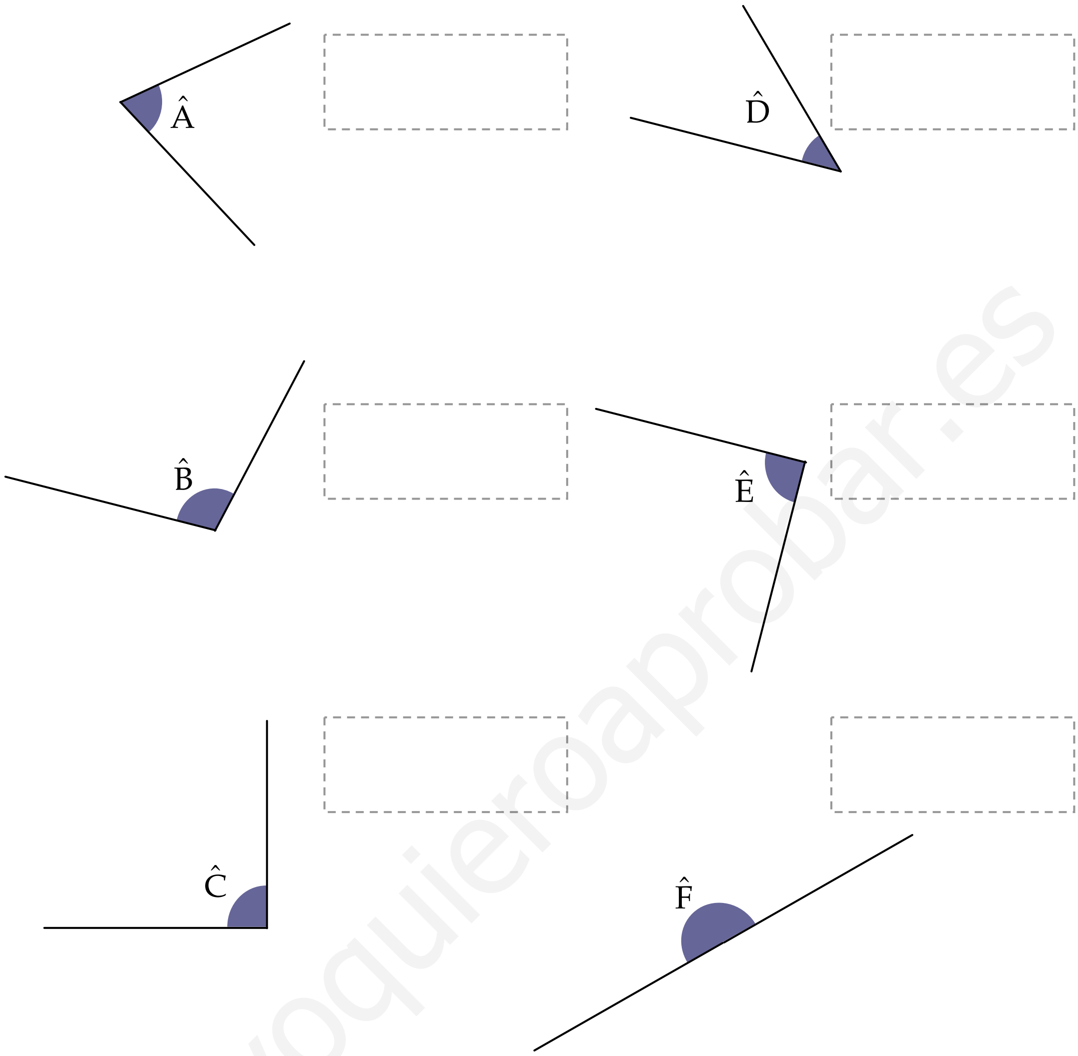
c) 60º

d) 150º

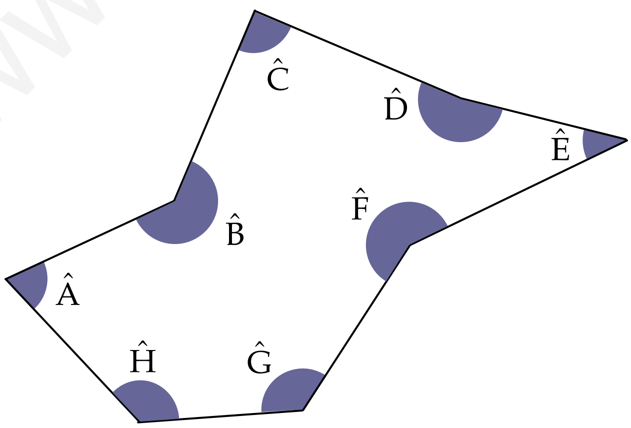
e) 30º

f) 90º

4) Clasifica los siguientes ángulos según sus medidas
(Llano, obtuso, recto, agudo)



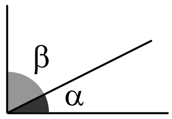
5) Indica de qué tipo es cada ángulo correspondiente a la siguiente figura
(Llano, obtuso, recto, agudo)



C. ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS Y SUPLEMENTARIOS

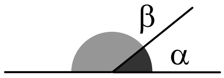
Ángulos complementarios

Los ángulos α y β son complementarios si: $\alpha + \beta = 90^{\circ}$



Ángulos complementarios

Los ángulos α y β son suplementarios si: $\alpha + \beta = 180^{\circ}$



6) Halla el ángulo complementario de cada uno de los siguientes ángulos:

a) 30° Se tiene que cumplir: $30^{\circ}+x = 90^{\circ}$. Entonces $x = 60^{\circ}$

b) $50{,}7^{\circ}$

c) $65{,}4^{\circ}$

d) $34{,}5^{\circ}$

e) $22{,}1^{\circ}$

f) $89{,}3^{\circ}$

7) Halla el ángulo suplementario de cada uno de los siguientes ángulos:

a) 80° Se tiene que cumplir: $80^{\circ}+x = 180^{\circ}$. Entonces $x=100^{\circ}$

b) 90°

c) $120{,}5^{\circ}$

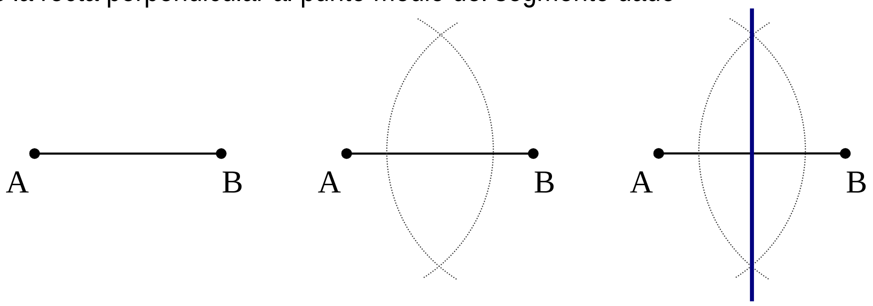
d) $10{,}06^{\circ}$

e) $15{,}37^{\circ}$

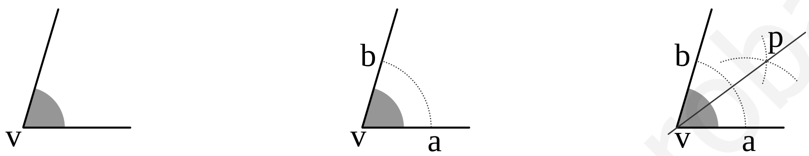
f) $179{,}9^{\circ}$

D. MEDIATRÍZ DE UN SEGMENTO Y BISECTRÍZ DE UN ÁNGULO

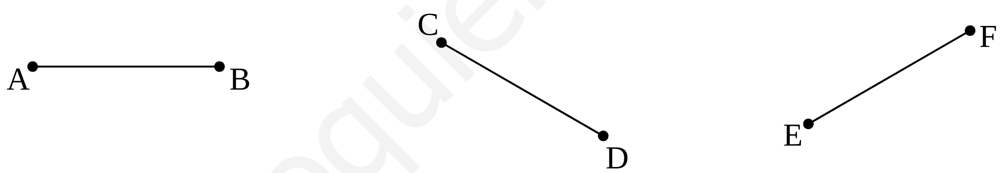
Mediatriz de un segmento
Es la recta perpendicular al punto medio del segmento dado



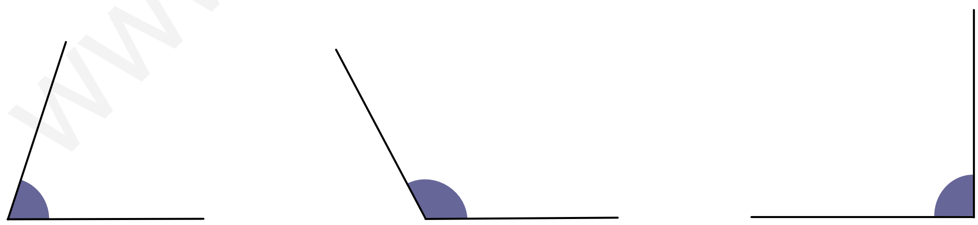
Bisectriz de un ángulo
Es la recta que pasa por el vértice y divide al ángulo en dos partes iguales

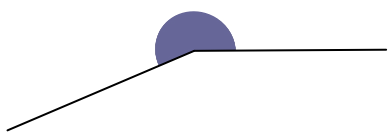


8) Halla la mediatriz de cada uno de los siguientes segmentos



9) Halla la bisectriz de cada uno de los siguientes ángulos





14. POLÍGONOS

A. CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS

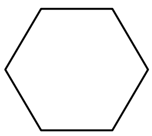
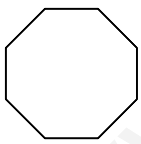
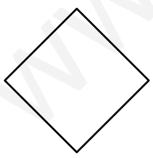
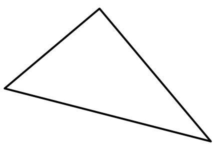
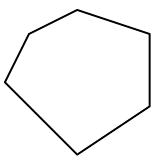
Nº de lados	Nombre
3	triángulo
4	cuadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octógono
9	eneágono
10	decágono
11	endecágono
12	dodecágono

Tamaño de los ángulos	Nombre
Ángulos menores que 180º	convexos
Algún ángulo mayor que 180º	cóncavos

Tamaño de los lados	Nombre
Todos no iguales	irregulares
Todos iguales	regulares

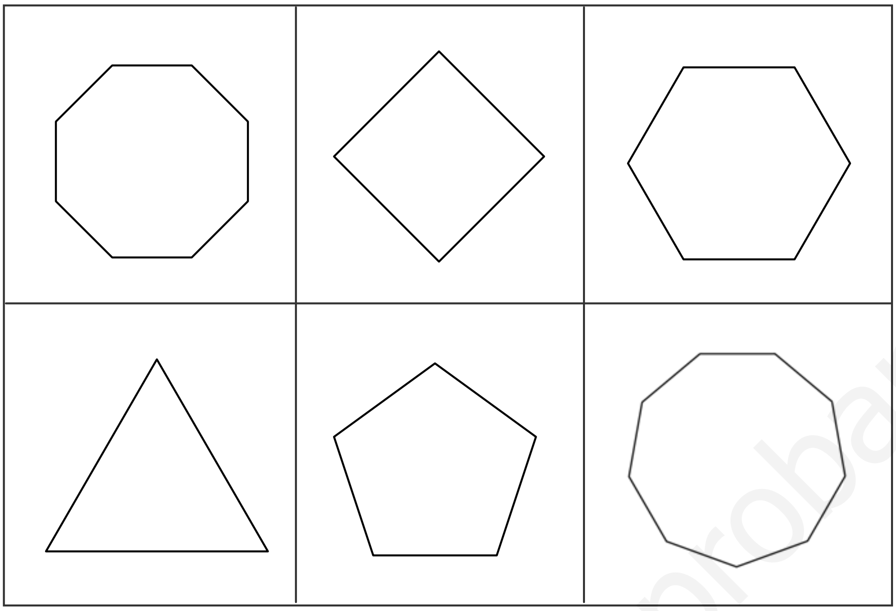
1) Completa la siguiente tabla:

Suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados
$180^{o} \cdot (n-2)$

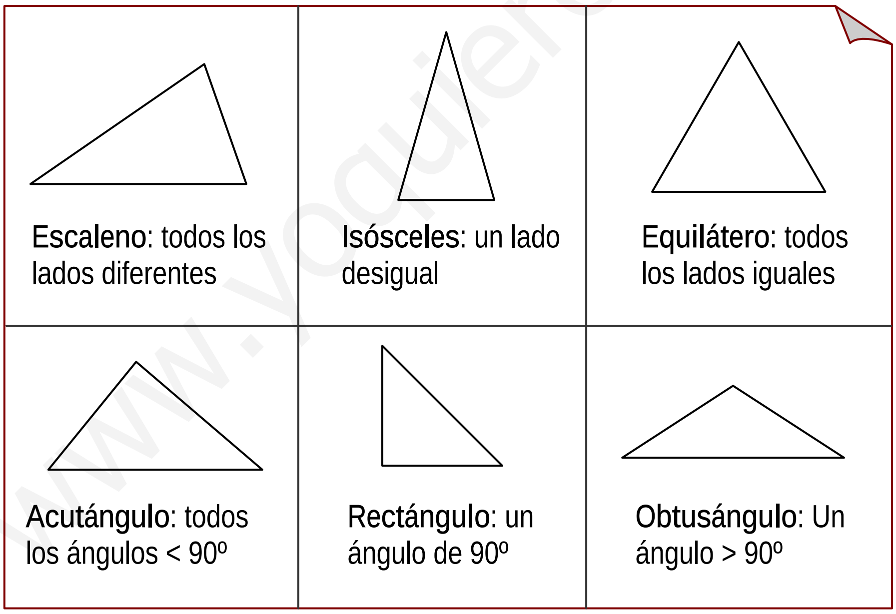
	NOMBRE DEL POLÍGONO	REGULAR/ IRREGULAR	SUMA ÁNGULOS INTERIORES
	Hexágono	Regular	$180 \cdot (6-2) = 720$
			
			
			
			

B. ELEMENTOS DE UN POLÍGONO

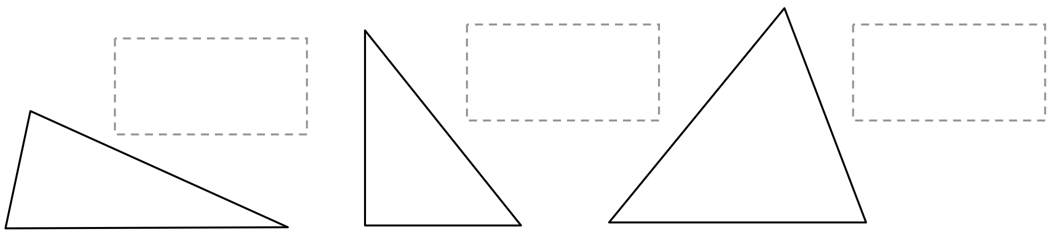
2) Con ayuda de una regla y un compás, dibuja el radio y la apotema de cada uno de estos polígonos

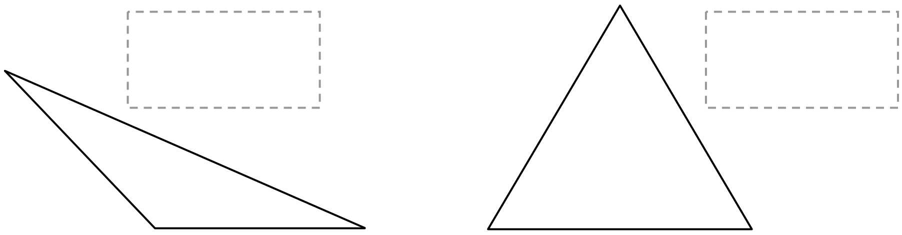


C. CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

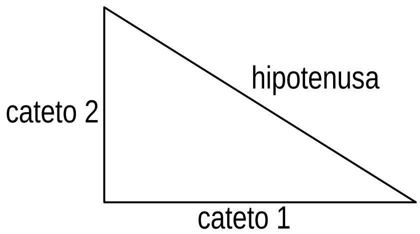


3) Pon los siguientes adjetivos a los triángulos que correspondan:
a) Lados: escaleno, isósceles y equilátero; b) Ángulos: acutángulo, rectángulo, obtusángulo





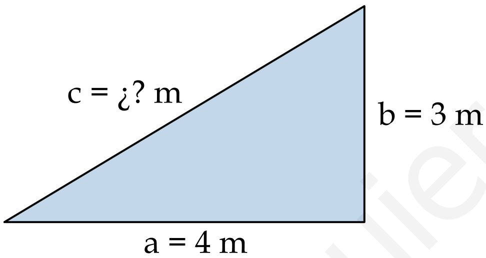
D. TEOREMA DE PITÁGORAS



El lado más largo de un triángulo rectángulo se llama **hipotenusa**. Los otros dos lados son los **catetos**.
La siguiente relación entre los lados es el **teorema de Pitágoras**:

$$\text{hipotenusa}^2 = (\text{cateto } 1)^2 + (\text{cateto } 2)^2$$

4) Para el siguiente triángulo rectángulo, calcula el lado desconocido c.



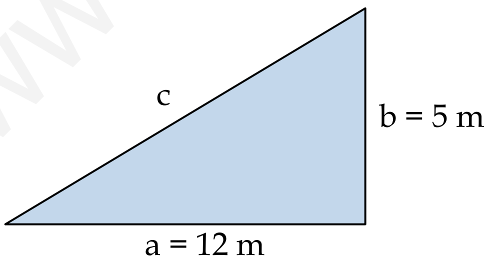
Solución:

Usamos el Teorema de Pitágoras, el cuál está dado por: $a^2 + b^2 = c^2$
Sustituyamos los datos del enunciado:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 4^2 + 3^2 = c^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 9 \Rightarrow$$

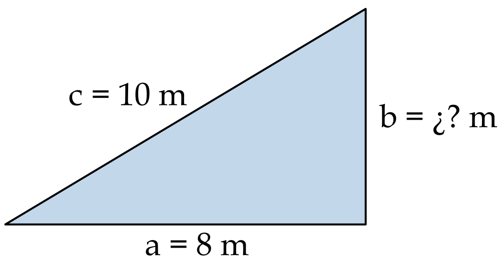
$$\Rightarrow c = \sqrt{25} \Rightarrow c = 5 \text{ m}$$

5) Para el siguiente triángulo rectángulo, calcula el lado desconocido b.



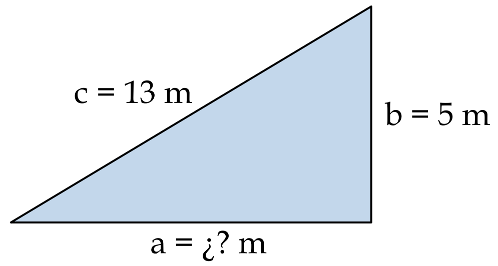
Solución:

6) Para el siguiente triángulo rectángulo, calcula el lado desconocido b.



Solución:

7) Para el siguiente triángulo rectángulo, calcula el lado desconocido a.



Solución:

8) Halla el cateto de un triángulo rectángulo, sabiendo que la hipotenusa mide 5 cm y que el cateto conocido, que es el mayor, mide 4 cm. Haz un dibujo explicativo.
Solución:

9) Halla el cateto de un triángulo rectángulo, sabiendo que la hipotenusa mide 25 cm y que el cateto conocido, que es el mayor, mide 24 cm. Haz un dibujo explicativo.
Solución:

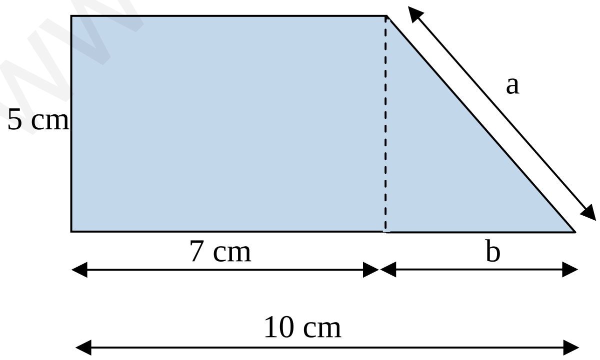
10) Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Datos: Las longitudes de los catetos son 5 y 12 cm, respectivamente. Haz un dibujo explicativo.
Solución:

11) Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Datos: Las longitudes de los catetos son 8 y 15 cm, respectivamente. Haz un dibujo explicativo.
Solución:

12) Halla el cateto de un triángulo rectángulo, sabiendo que la hipotenusa mide 41 cm y el cateto mayor 40 cm.
Solución:

13) Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales y miden 2 m.
Solución:

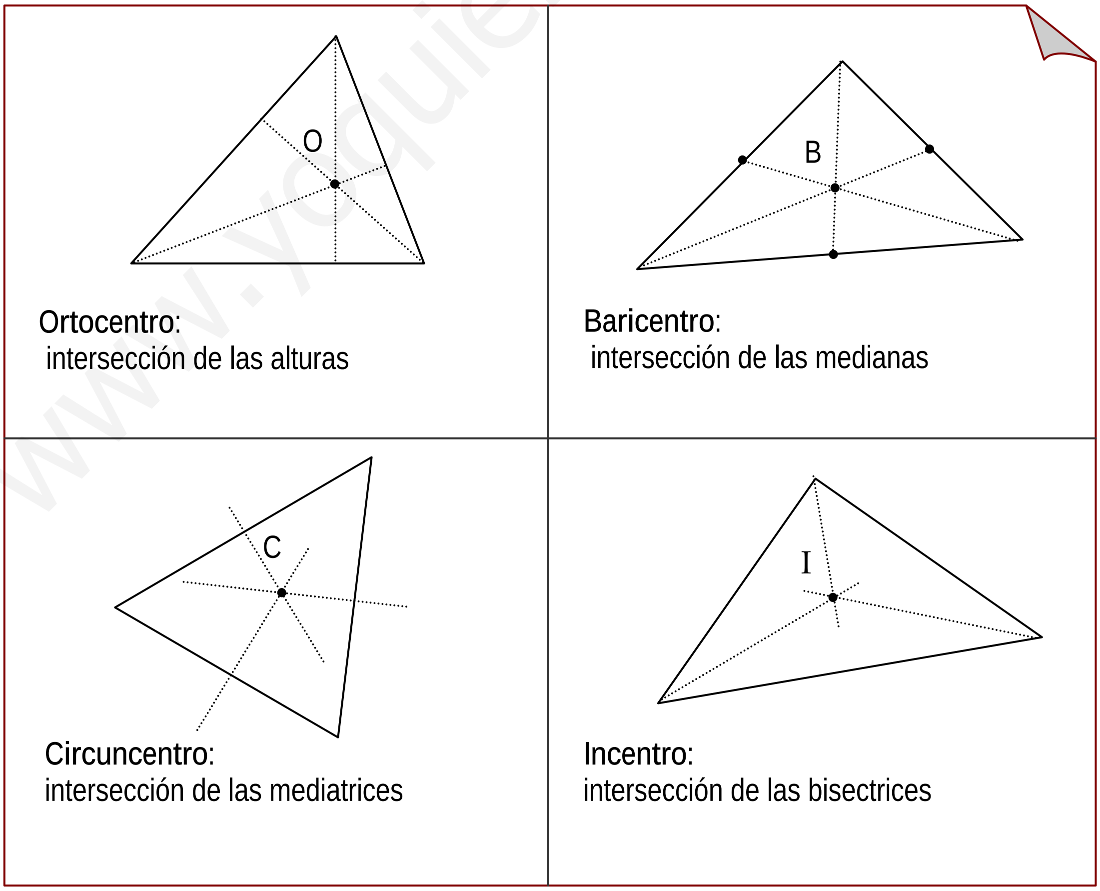
14) Calcula el perímetro de la siguiente figura



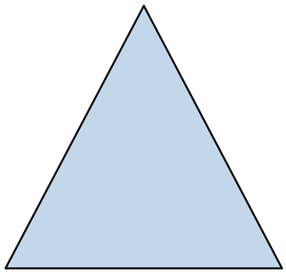
15) Halla la altura de un trapecio isósceles, cuyas bases miden 5 y 7 m y los lados oblicuo 6 m.
Solución:

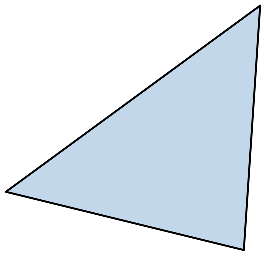
16) Halla la altura de un trapecio rectángulo, cuyas bases miden 5 y 7 m y el lado oblicuo 6 m.
Solución:

E. ORTOCENTRO, BARICENTRO Y CIRCUNCENTRO

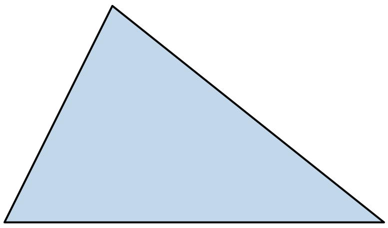


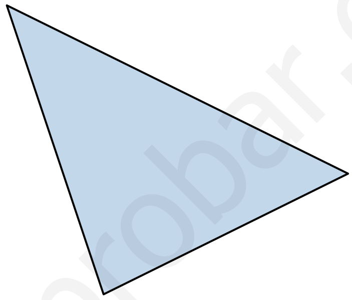
17) Para los siguientes triángulos equiláteros, obtén el punto en donde se cortan las alturas, llamado ortocentro.



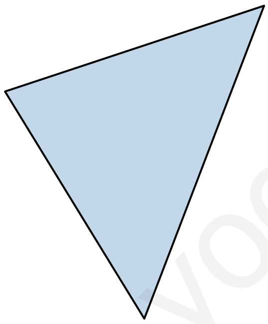


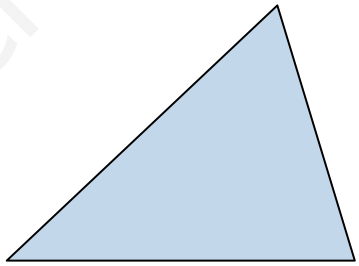
18) Para el siguientes triángulos, obtén el punto en donde se cortan las medianas, llamado baricentro



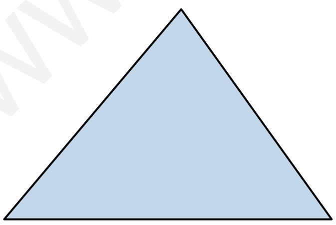


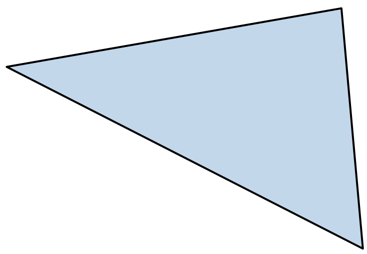
19) Para los siguientes triángulos, obtén el punto en donde se cortan las mediatrices, llamado circuncentro.





20) Para los siguientes triángulos, obtén el punto en donde se cortan las bisectrices, llamado incentro





Como bien sabes, hay más de un trío de números, x, y, z, que cumplen la igualdad siguiente: $x^2 + y^2 = z^2$, por ejemplo: $x = 3$; $y = 4$; $z = 5$, ya que:

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow 9 + 16 = 25$$

Pero, ¿hay un trío de números, x, y , z, que cumplan la igualdad siguiente: $x^3 + y^3 = z^3$?

En la noche del 11 de enero de 1665, Pierre de Fermat afirmó que la búsqueda de esos tres números era un esfuerzo inútil. Lo escribió en el pequeño hueco de un libro:

"He encontrado una demostración realmente admirable, pero el margen del libro es muy pequeño para ponerla".

Esa misma noche Fermat murió. Durante los siguientes días, sus más próximos allegados buscaron en su habitación la prueba, tal vez garabateada en alguna hoja; Durante los siguientes siglos, los matemáticos más afamados intentaron reconstruir con desesperación la demostración.

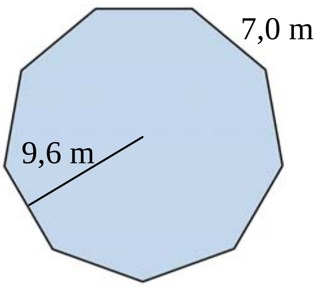
En 1995, Andrew Willes lo consiguió.

15. ÁREAS DE POLÍGONOS

A. ÁREA DE POLÍGONOS REGULARES

$$A = \frac{\text{apotema} \cdot \text{perímetro}}{2}$$

1) Calcula el perímetro y el área del siguiente polígono regular



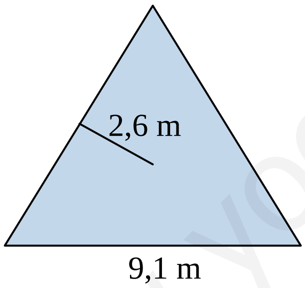
Solución:

El perímetro es la suma de la longitud de cada lado:

El área se calcula utilizando la expresión $A = \frac{ap \cdot \text{perímetro}}{2}$

$A =$

2) Calcula el perímetro y el área del siguiente polígono regular



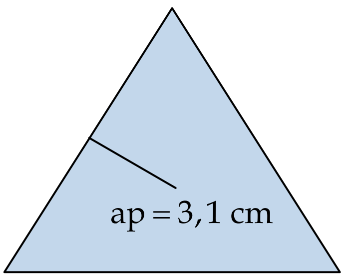
Solución:

El perímetro es la suma de la longitud de cada lado:

El área se calcula utilizando la expresión $A = \frac{ap \cdot \text{perímetro}}{2}$

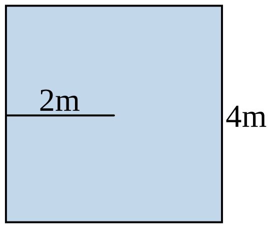
$A =$

3) Calcula el área del triángulo equilátero de la figura, sabiendo que su perímetro es 32,2 cm y el apotema de 3,1 cm.



Solución:

4) Calcula el perímetro y el área del siguiente polígono regular



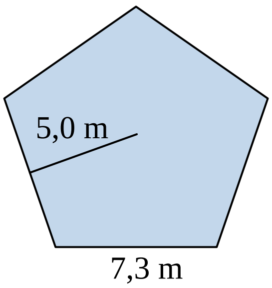
Solución:

El perímetro es la suma de la longitud de cada lado:

El área se calcula utilizando la expresión $A = \frac{ap \cdot \text{perímetro}}{2}$

$A =$

5) Calcula el perímetro y el área del siguiente polígono regular



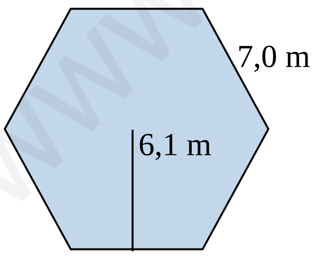
Solución:

El perímetro es la suma de la longitud de cada lado:

El área se calcula utilizando la expresión $A = \frac{ap \cdot \text{perímetro}}{2}$

$A =$

6) Calcula el perímetro y el área del siguiente polígono regular



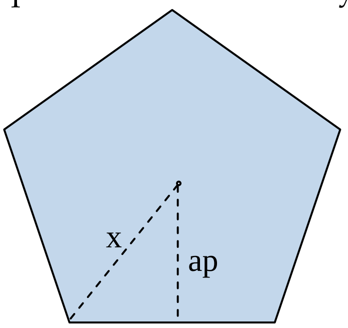
Solución:

El perímetro es la suma de la longitud de cada lado:

El área se calcula utilizando la expresión $A = \frac{ap \cdot \text{perímetro}}{2}$

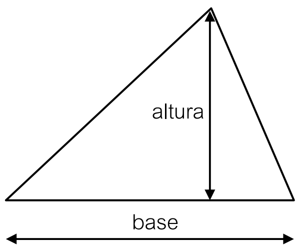
$A =$

7) Calcula la distancia x entre un vértice y el centro de un pentágono sabiendo que su área es de 30 m² y que el perímetro es de 20 m.



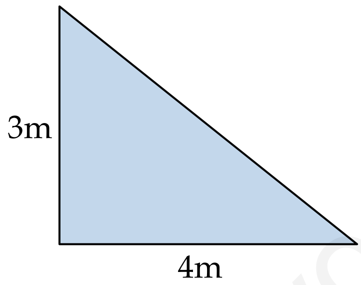
Solución:

B. ÁREA DE TRIÁNGULOS



$$A_{\text{triángulo}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

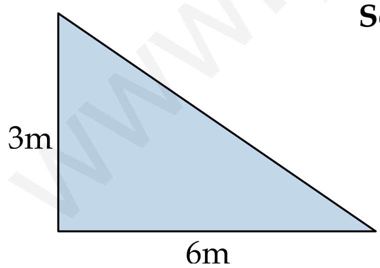
8) Calcula el área del triángulo



Solución:

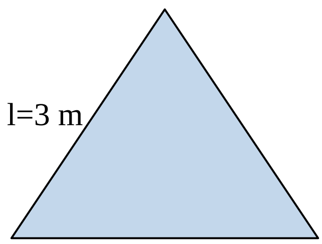
$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ m}^2$$

9) Calcula el área del triángulo



Solución:

10) Calcula el área del triángulo equilátero.



Solución:

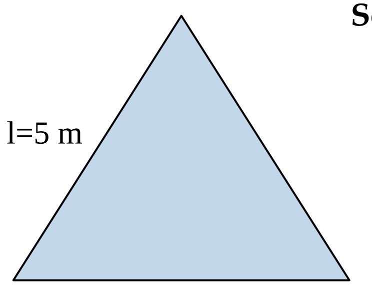
- Obtenemos el valor de la altura h

$$h = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ m}$$

- Área:

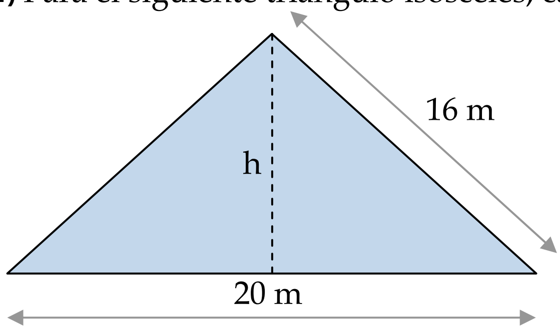
$$A = \frac{l \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ m}^2$$

11) Calcula el área del triángulo equilátero.



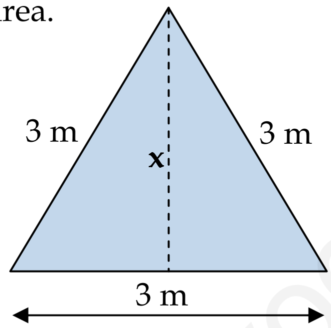
Solución:

12) Para el siguiente triángulo isósceles, calcula el perímetro, la altura y el área.



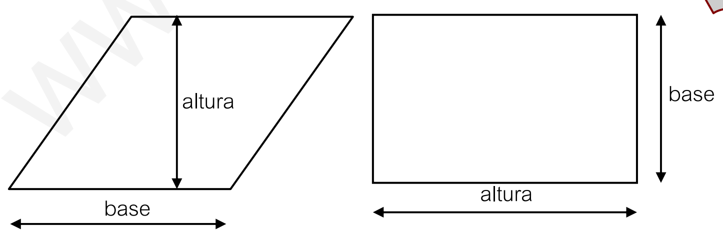
Solución:

13) Para el siguiente triángulo equilátero, halla el valor de x, el perímetro y el área.



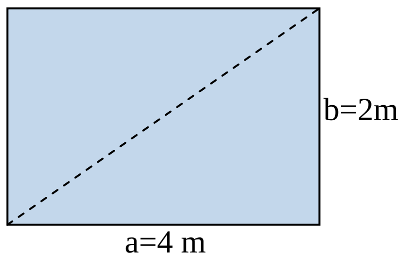
Solución:

C. ÁREA RECTÁNGULOS Y ROMBOIDES



$A = \text{base} \cdot \text{altura}$

14) Calcula el perímetro y el área del rectángulo de la figura.

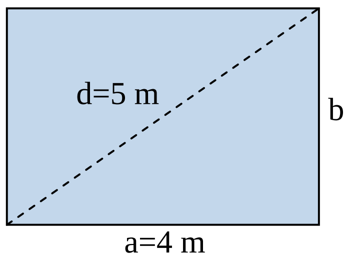


Solución:

15) Calcula el perímetro y área de un rectángulo de lados $a = 2\text{m}$ y $b = 13\text{m}$

Solución:

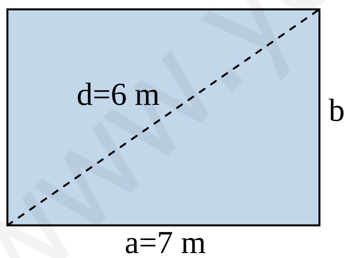
16) Calcula el perímetro y el área del rectángulo de la figura.



Solución:

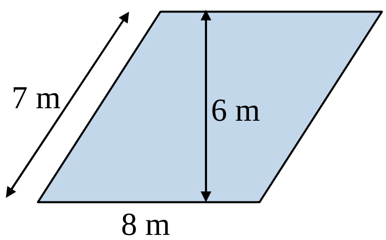
- Obtenemos el valor de b:
  $b = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\text{ m}$
- Perímetro:
  $P = 2\cdot 4 + 2\cdot 3 = 14\text{ m}$
- Área:
  $A = a\cdot b = 4\cdot 3 = 12\text{ m}^2$

17) Calcula el perímetro y el área del rectángulo de la figura.



Solución:

18) Calcula el perímetro y el área del romboide de la figura

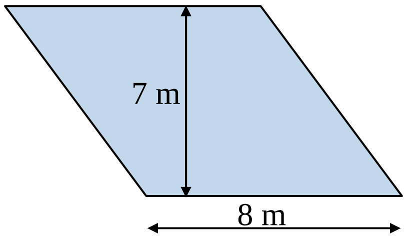


Solución:

19) Calcula el área de un romboide cuya base y altura miden $\sqrt{3}$ m.

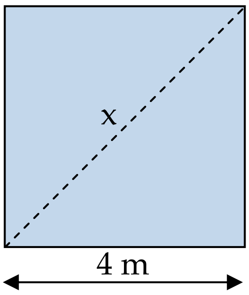
Solución:

20) Calcula el perímetro y el área del romboide de la figura



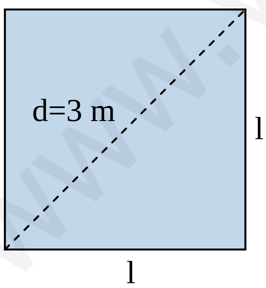
Solución:

21) Para el siguiente cuadrado, halla x, el perímetro y el área.



Solución:

22) Calcula el perímetro y el área del cuadrado de la figura.



Solución:

- Obtenemos el valor de l:

$$2l^2 = 3^2 \Rightarrow l = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ m}$$

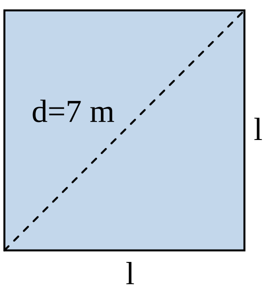
- Perímetro:

$$P = 4 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} \text{ m}$$

- Área:

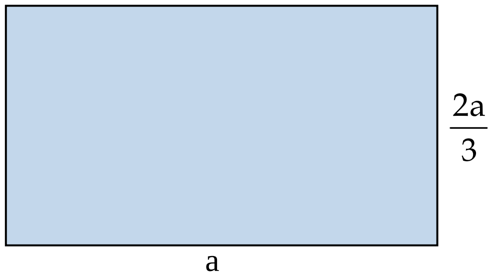
$$A = l^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{4} \text{ m}^2$$

23) Calcula el perímetro y el área del cuadrado de la figura.



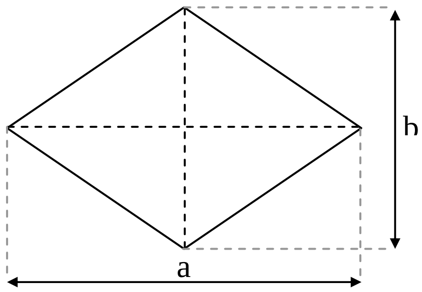
Solución:

24) La altura de un rectángulo es dos tercios de la base. ¿Cuál es su área si el perímetro es de 50 cm?



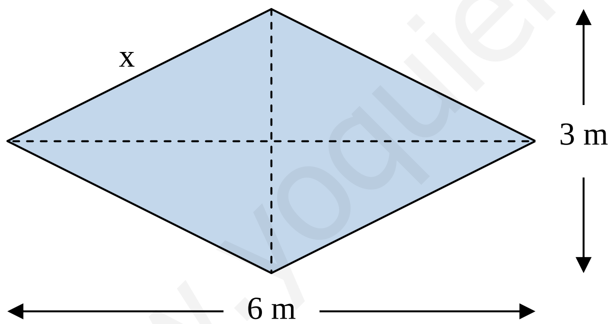
Solución:

D. ÁREA DE ROMBOS



$$A = \frac{a \cdot b}{2}$$

25) Para el siguiente rombo, halla x, el perímetro y el área.

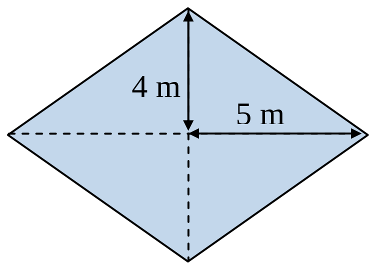


Solución:

26) Halla el área de un rombo, sabiendo que la diagonal mayor es de 10 m y la diagonal menos es un quinto menor.

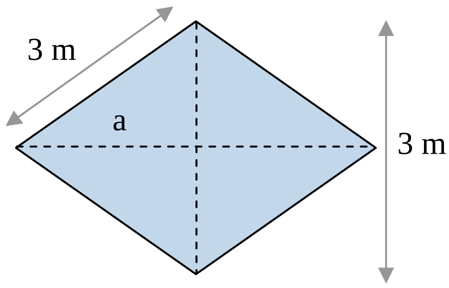
Solución:

27) Halla el área del siguiente rombo.



Solución:

28) Halla el área del siguiente rombo.



Solución:

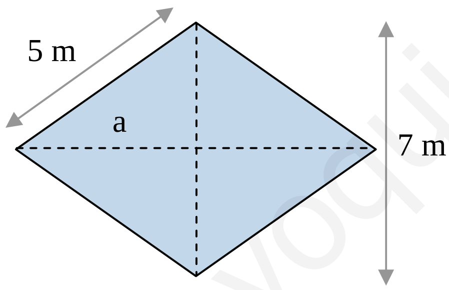
- Hallamos la diagonal mayor, $D = 2a$

$$a = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ \text{m} \Rightarrow D = 3\sqrt{3}\ \text{m}$$

- El área es, entonces:

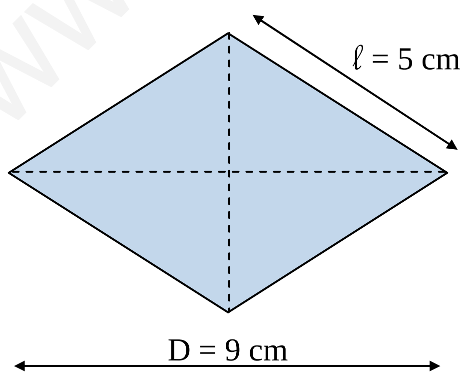
$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}\ \text{m}^2$$

29) Halla el área del siguiente rombo.



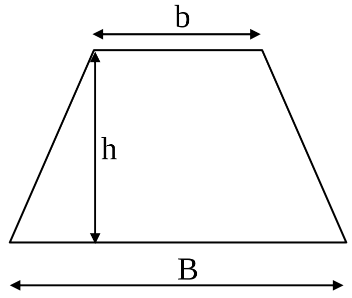
Solución:

30) La diagonal mayor, D, de un rombo mide 9 cm y cada lado 5 cm. Con estos datos, calcula su perímetro y su área.



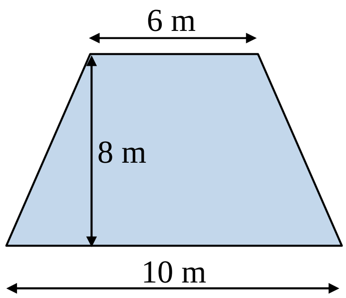
Solución:

E. ÁREA DE TRAPECIOS



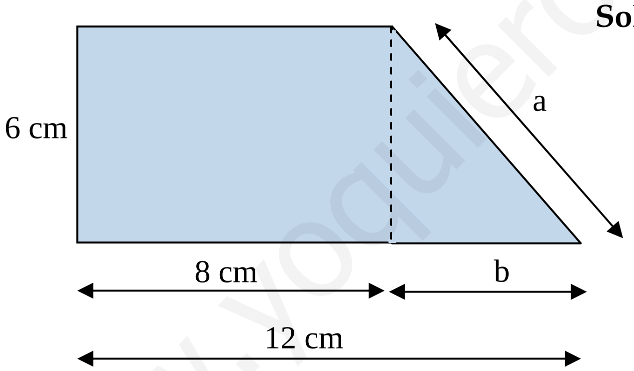
$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

31) Calcula el perímetro y el área del trapecio.



Solución:

32) Calcula el perímetro y el área del trapecio.



Solución:

16. CIRCUNFERENCIAS Y CÍRCULOS

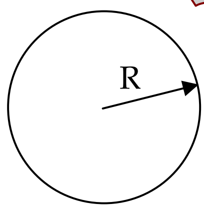
A. LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA. ÁREA DE UN CÍRCULO

Longitud de una circunferencia

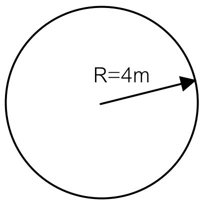
$L = 2\pi \cdot R$

Área de un círculo

$A = \pi \cdot R^2$



resuelto **1)** Calcula la longitud de la circunferencia y el área del círculo



Solución:

- La longitud de la circunferencia está dada por: $L = 2\pi R$. Entonces:

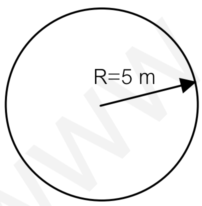
$$L = 2\pi \cdot 1 = 2 \cdot 3{,}14 = 6{,}28 \text{ m}$$

- El área de la circunferencia está dada por $A = \pi R^2$. Entonces:

$$A = \pi \cdot 1^2 = 3{,}14 \text{ m}^2$$

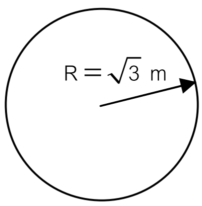
2) Calcula la longitud de la circunferencia y el área del círculo

Solución:



3) Calcula la longitud de la circunferencia y el área del círculo

Solución:



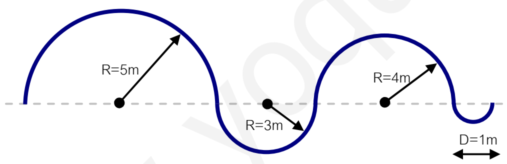
4) Calcula el área de un círculo sabiendo que la longitud de la circunferencia es $L = 12$ m

Solución:

5) Calcula la longitud de una circunferencia, sabiendo que el área de su círculo es $A = 13\ m^2$

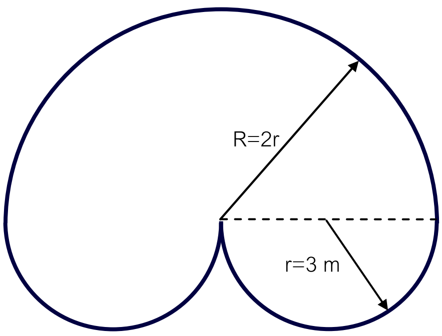
Solución:

6) Calcula la longitud de la figura



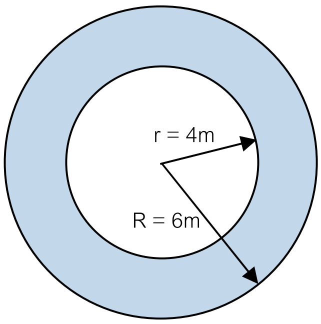
Solución:

7) Calcula la longitud de las curvas que forman la figura



Solución:

resuelto **8)** Calcula el área sombreada de la figura, conocida como corona circular

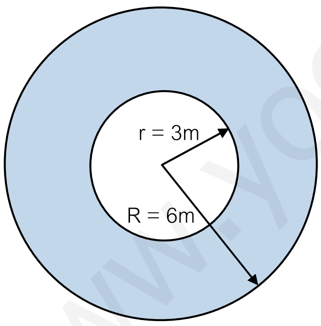


Solución:

El área de la corona circular es la diferencia entre las áreas de los dos círculos:

$$A = \pi R^2 - \pi r^2 =$$
$$= \pi \cdot \left(R^2 - r^2\right) =$$
$$= 3,14 \cdot \left(6^2 - 4^2\right) = 62,8 \text{ m}^2$$

9) Calcula el área sombreada de la figura, conocida como corona circular



Solución:

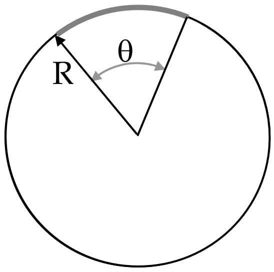
10) Calcula el área de una corona circular cuyo radio mayor, R, es el triple que el menor, r. Dato: $r = 3\text{m}$

Solución:

B. LONGITUD DE UN ARCO. ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR

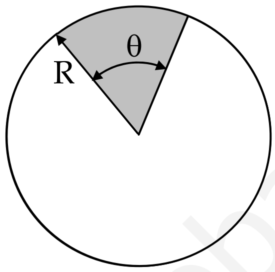
Longitud de un arco de circunferencia

$$L_{arco} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot \theta}{360}$$

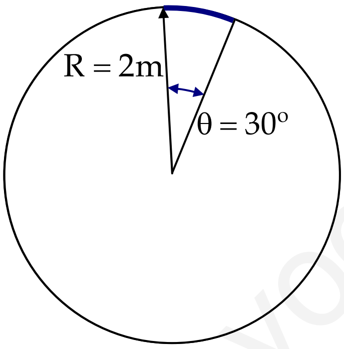


Área de un sector circular

$$A_{sector} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \theta}{360}$$



resuelto **11)** Calcula la longitud de arco

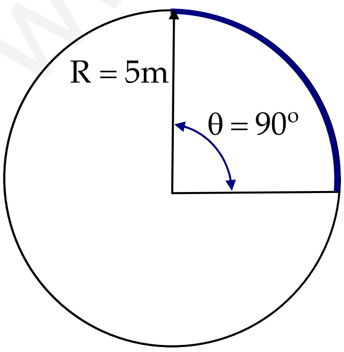


Solución:

$$L_{arco} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot \theta}{360} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 30}{360} = 1{,}57 \text{ m}$$

$$A_{sector} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \theta}{360} = \frac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 30}{360} = 2{,}36 \text{ m}^2$$

12) Calcula la longitud de arco

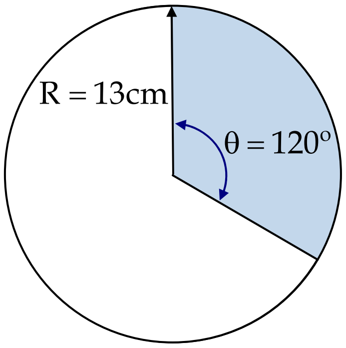


Solución:

$L_{arco} =$

$A_{sector} =$

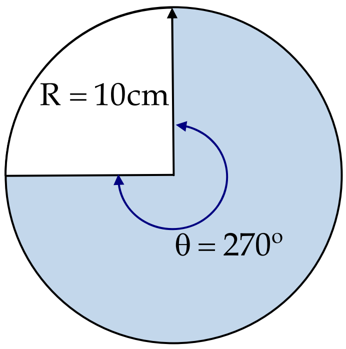
13) Halla el área del sector



Solución:

$$A_{sector} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \theta}{360} = \frac{3,14 \cdot 13^2 \cdot 120}{360} = 176,9 \text{ cm}^2$$

14) Halla el área del sector



Solución:

$A_{sector} =$

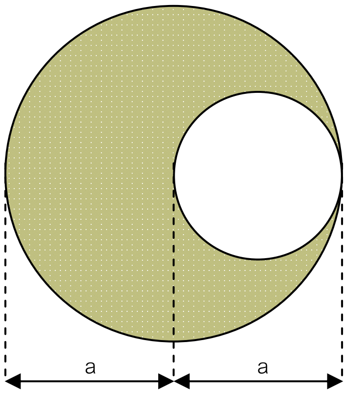
15) Halla el área del sector de un círculo de 15 m de radio y un ángulo de 45º

Solución:

C. OTROS EJERCICIOS

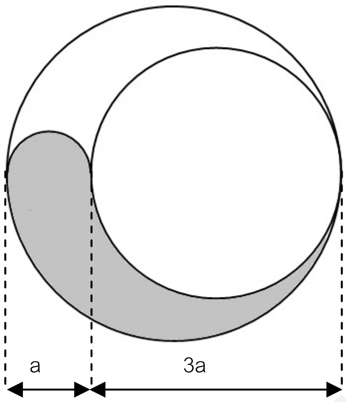
16) Cuántas vueltas habrá dado la rueda trasera de una bicicleta, de radio 50 cm, cuando se hayan recorrido 3,14 km?

17) Calcula el área sombreada de la figura, sabiendo que $a = 4m$



Solución:

18) Calcula el área sombreada de la figura, sabiendo que $a = 1m$



Solución:

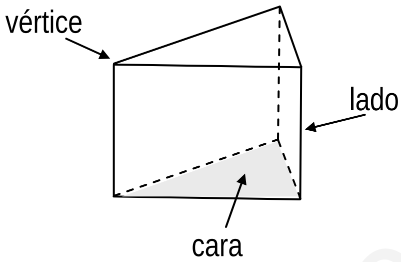
El número π

17. CUERPOS GEOMÉTRICOS

A. CONCEPTO DE POLIEDRO. POLIEDROS REGULARES

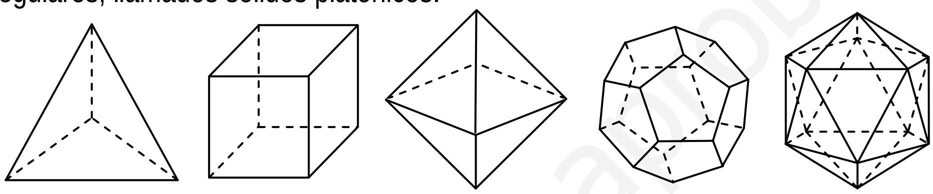
Poliedro:

Es un cuerpo tridimensional cuyas caras son polígonos. Los lados de las caras son las aristas. Los lados se unen en los vértices.



Poliedro regular:

Es un poliedro cuyas caras son polígonos regulares. Sólo hay cinco poliedros regulares, llamados sólidos platónicos.



Tetraedro | Cubo | Octaedro | Dodecaedro | Icosaedro

Relación de Euler

Para un poliedro regular siempre se verifica la siguiente relación:

$$\text{caras} + \text{vértices} = \text{aristas} + 2$$

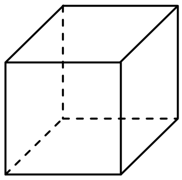
Hay algo en la relación de Euler que llama poderosamente la atención:

¿Cómo es posible que haya tenido que pasar tanto tiempo para que alguien se diese cuenta de la bella regularidad que verifican todos los poliedros regulares?

Desde los remotos tiempos en donde florecían las matemáticas griegas, miles y miles de brillantes matemáticos y estudiosos, manejaron los poliedros regulares. Ninguno de ellos cayó en el bello vínculo entre sus caras, vértices y aristas. La relación que Euler descubrió estuvo miles de años oculta a los ojos de todos

1) A la vista de los siguientes poliedros indica, para cada uno, el número de caras, vértices y aristas. Estudia si se verifica la relación de Euler.

resuelto

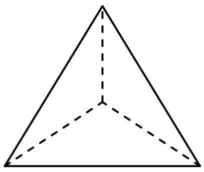


Caras: 6 Vértices: 8 Aristas: 12

Relación de Euler:

$$\text{Caras} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 2$$

$$6 + 8 = 12 + 2 \Rightarrow 14 = 14$$

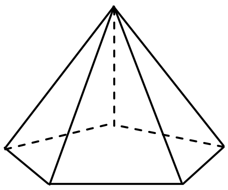


Caras: Vértices: Aristas:

Relación de Euler:

$$\text{Caras} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 2$$

$$+ \qquad = \qquad +2 \Rightarrow$$

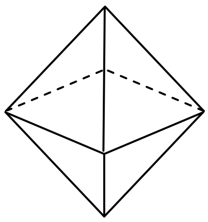


Caras: Vértices: Aristas:

Relación de Euler:

$$\text{Caras} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 2$$

$$+ \qquad = \qquad +2 \Rightarrow$$

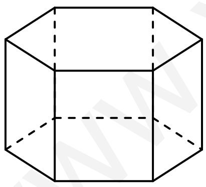


Caras: Vértices: Aristas:

Relación de Euler:

$$\text{Caras} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 2$$

$$+ \qquad = \qquad +2 \Rightarrow$$

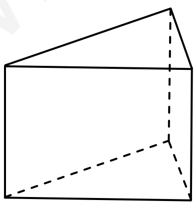


Caras: Vértices: Aristas:

Relación de Euler:

$$\text{Caras} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 2$$

$$+ \qquad = \qquad +2 \Rightarrow$$

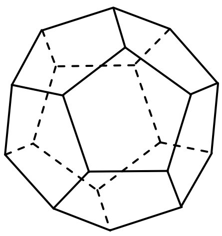


Caras: Vértices: Aristas:

Relación de Euler:

$$\text{Caras} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 2$$

$$+ \qquad = \qquad +2 \Rightarrow$$



Caras: Vértices: Aristas:

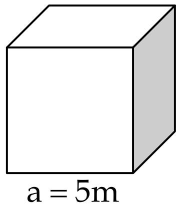
Relación de Euler:

$$\text{Caras} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 2$$

$$+ \qquad = \qquad +2 \Rightarrow$$

B. VOLUMEN DE CUBOS Y PRISMAS

2) Halla el volumen del siguiente cubo:



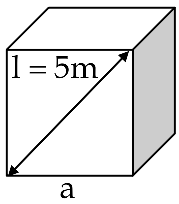
Solución:

$V = a^3 =$

3) Halla el volumen de un cubo que tiene 4 m de arista o lado.

Solución:

4) Halla el volumen del siguiente cubo:

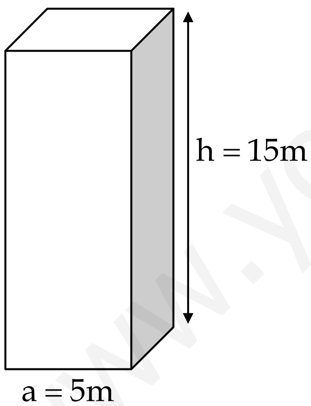


Solución:

Cálculo de a: Cálculo de V:

$V = a^3 =$

5) Halla el volumen del siguiente prisma:



Solución:

$V = A_{Base} \cdot Altura =$

6) Halla el volumen de un prisma cuyas bases son dos cuadrados de lado $a = 4m$ y una altura $h = 7m$

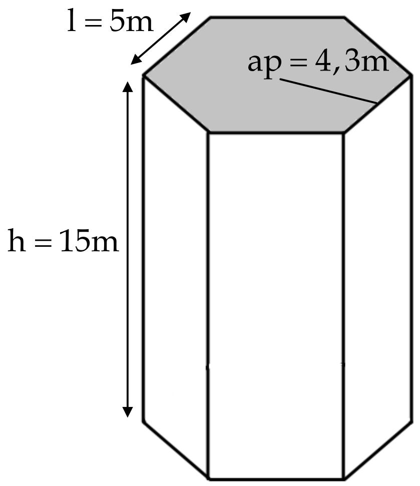
Solución:

$A_{Base} = a^2 =$; $V = A_{Base} \cdot Altura =$

7) Halla el valor del área de una de las caras de un cubo que tiene 4 cm^3

Solución:

8) Halla el volumen del ortoedro

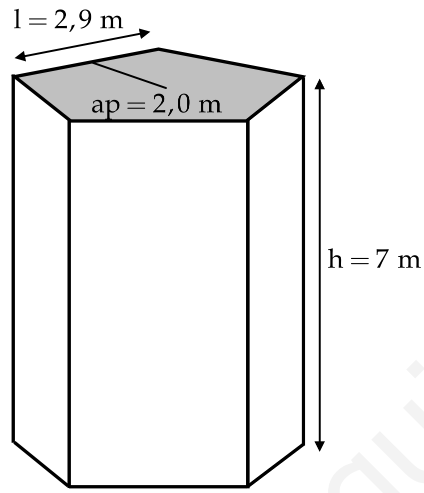


Solución:

$$A_{Base} = \frac{apotema \cdot perímetro}{2} =$$

$$V = A_{Base} \cdot altura =$$

9) Halla el volumen del ortoedro



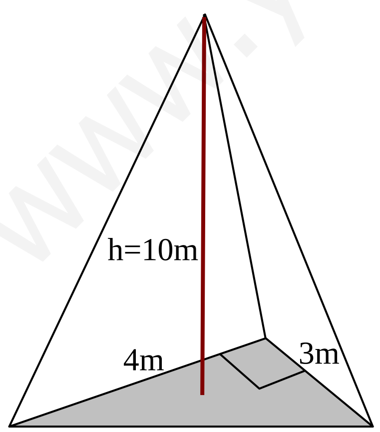
Solución:

$A_{Base} =$

$V =$

C. VOLUMEN DE PIRÁMIDES

10) Halla el volumen de la siguiente pirámide:



Solución:

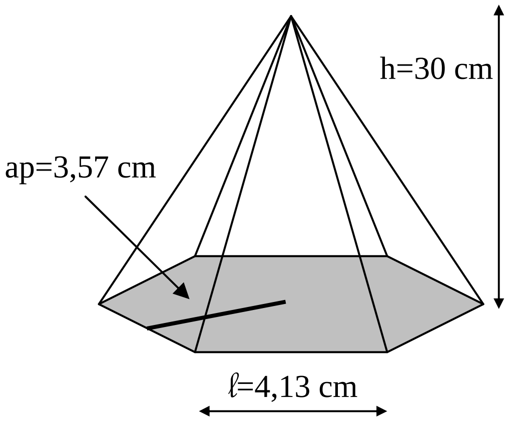
$A_{Base} =$

$$V = \frac{A_{base} \cdot altura}{3} =$$

11) Halla el volumen de una pirámide que tiene por base un triángulo equilátero de 2 cm de lado y cuya altura es de 5 cm

Solución:

12) Halla volumen de la siguiente pirámide:

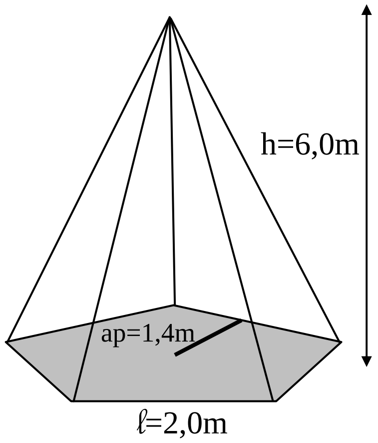


Solución:

$A_{Base} =$

$V = \dfrac{A_{base} \cdot altura}{3} =$

13) Halla el volumen de la pirámide



Solución:

$A_{Base} =$

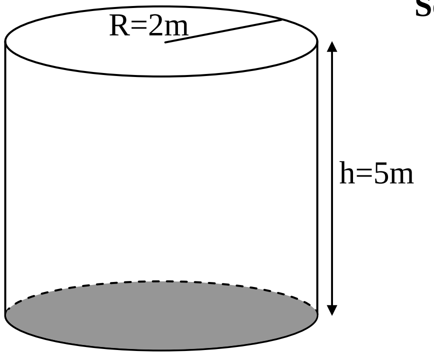
$V = \dfrac{A_{base} \cdot altura}{3} =$

14) Halla el área de una pirámide cuya base es un pentágono regular de 1,4 m de apotema y 2 m de lado, mientras que la altura es de 10 m.

Solución:

D. VOLUMEN DE CILINDROS

15) Halla el volumen del cilindro



Solución:

$A_{Base} =$

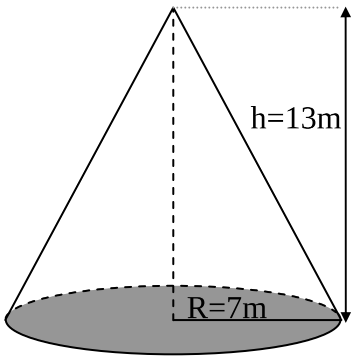
$V = A_{base} \cdot altura =$

16) Halla el volumen de un cilindro de radio $R = 2m$ y altura $h = 8m$

Solución:

E. VOLUMEN DE CONOS

17) Halla el volumen del cono.



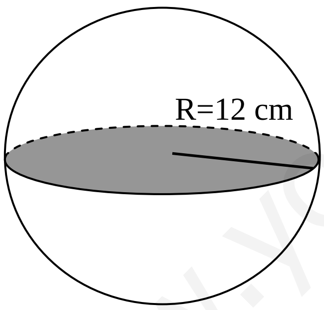
Solución:

$A_{base} = \pi \cdot R^2$

$V = \frac{A_{base} \cdot altura}{3} =$

F. VOLUMEN DE ESFERAS

18) Halla el volumen de la esfera.



Solución:

$V = \frac{4\pi \cdot R^3}{3} =$

19) Halla el volumen de una esfera de radio $R = 9m$

Solución:

20) Halla el radio de una esfera que tiene un volumen de 10 cm^3

Solución:

G. OTROS PROBLEMAS

21) Completa la siguiente tabla para prismas cuyas bases son dos decágonos. Intenta dibujar la figura.

Apotema de la base (m)	Lado del decágono (m)	Área del decágono (m^2)	Altura del prisma (m)	Volumen (m^3)
4,6	3,0	$\frac{ap \cdot P}{2} =$	9	$A_{base} \cdot h =$
1,7	1,1		4	
9,2	6		15	
1,1	0,7		3	

Representación de prisma cuyas bases son decágonos:

22) Completa la siguiente tabla para una pirámide cuya base es un heptágono. intenta dibujar la figura.

Apotema de la base (m)	Lado del decágono (m)	Altura del prisma (m)	Área de la base (m^2)	Expresión del volumen (m^3)
3,2	3,1	4,1	$\frac{ap \cdot P}{2} =$	$\frac{A_{base} \cdot h}{3} =$
4,1	3,9	9,6		
1,3	1,2	3,3		
11,2	10,8	15,5		

Representación de pirámide cuya base es un heptágono:

23) Completa la siguiente tabla para las esferas

Radio (m)	Expresión del volumen (m^3)	Solución (m^3)
7	$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 7^3}{3}$	.... m^3
15,3		
9,6		
19,4		

18. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

A. MEDIA, MEDIANA Y MODA

Media aritmética: La media aritmética, $\bar{x}$, Es la suma de todos los datos dividida por número de datos.
Ejemplo:
Las clasificaciones de un alumno en matemáticas son: 2, 3, 3, 4, 7, 7, 7. La media aritmética de sus notas es $\bar{x} = \frac{2+3+3+4+7+7+7}{6} = \frac{36}{6} = 6$

Media aritmética para datos agrupados: Las notas de cierto alumno vienen dadas por la siguiente tabla, en donde x_i representa cada una de las notas y f_i la frecuencia de cada una de las notas

x_i	f_i
3	2
4	1
5	3
7	2

Es decir: ha sacado dos treses, un cuatro, tres cincos y dos sietes. En ese caso, la media arimética se puede escribir así:

$$\bar{x} = \frac{3\cdot 2 + 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 7\cdot 2}{8} = \frac{39}{8} = 4,9$$

También se puede escribir del siguiente modo, aunque es una manera más primitiva:

$$\bar{x} = \frac{3+3+4+5+5+5+7+7}{8}$$

Moda: La moda, M_o, es el dato que más se repite. Por ejemplo, para los siguientes datos: 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 8, la moda es el 5.
Hay algunos casos especiales:
- Puede haber varias modas cuando hay varios datos que se repiten el mismo número de veces. Por ejemplo, el conjunto de datos 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5 tiene la moda $M_o = 1, 3$ y 5.
- Puede no haber moda. Ello se da cuando todos los datos tiene la misma frecuencia. Este es el caso de los siguientes datos: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5. No hay moda.
- Si los datos que más se repiten son adyacentes, la moda será la media aritmética de esos datos. Ejemplo: Para 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, la moda es $M_o = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2}$

Mediana: La mediana, M_e, es el valor del dato central que hay en un conjunto ordenado impar de datos. Si el número de datos es par, M_e es la media aritmética de los dos datos centrales.
Ejemplo:
- Para el conjunto impar de datos: 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, la mediana es: $M_e = 4$
- Para el conjunto par de datos: 1, 1, 2, 3, 3, 3, la mediana es $M_e = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$

Tipos de frecuencia:
- Frecuencia absoluta es el número de veces que se repite cada dato.
- Frecuencia relativa es el cociente entre el número de veces que se repite cada dato y el número total de datos
- Frecuencia porcentual es la frecuencia relativa multiplicada por 100.

1) Halla la nota media de un alumno que ha obtenido las siguientes clasificaciones: 3, 4, 5, 6, 6, 9. ¿Cuál es la moda? ¿Cuál es la mediana?
Solución:

- La media es el cociente entre la suma de los datos y el número de datos: $\overline{x} = \frac{3+4+5+6+6+9}{6} = \frac{34}{6} = \frac{17}{3} \approx 5{,}7$
- La moda, el valor que más se repite es $M_o = 6$
- La mediana, M_e, es el valor central de la lista de datos ordenados. Como hay dos valores centrales, M_e es la media aritmética de ambos: $M_e = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2}$

2) Halla la temperatura media de las mínimas registradas en cierto lugar durante la semana pasada: $2,\ 6,\ 4,\ 3,\ -2,\ 0,\ 1$. Halla la media, la moda y la mediana.
Solución:

3) Construye una tabla en donde aparezcan los datos, x_i, las frecuencias absolutas, f_i y el producto entre cada dato y su frecuencia, $x_i \cdot f_i$. Halla la media aritmética, la moda y la mediana. Datos: 2, 2, 1, 3, 4, 3, 2.
Solución:

Datos, x_i	Frecuencias, f_i	$x_i \cdot f_i$
1	1	$1 \cdot 1$
2	3	$2 \cdot 3$
3	2	$3 \cdot 2$
4	1	$4 \cdot 1$

- Media aritmética, $\overline{x}$, el cociente entre la suma del producto de cada dato por su frecuencia y la suma del número de datos, está dada por: $\overline{x} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{1+3+2+1} = \frac{17}{7}$
- La moda, Mo, es el dato que más se repite. En nuestro caso $M_o = 2$

- La mediana, M_e, es la media de los datos centrales una vez que han sido ordenados: 1, 2, 2, **2**, 3, 3, 4

4) Construye una tabla en donde aparezcan los datos, x_i, las frecuencias absolutas, f_i y el producto entre cada dato y su frecuencia, $x_i \cdot f_i$. Halla la media aritmética, la moda y la mediana. Datos: 6, 3, 5, 2, 2, 2, 3, 1, 4, 4

Solución:

Datos, x_i	Frecuencias, f_i	$x_i \cdot f_i$
1		
2		
3		
4		
5		
6		

La media aritmética, $\overline{x}$:

La moda, Mo:

La mediana, M_e:

resuelto **5)** Construye una tabla en donde aparezcan los datos, x_i, las frecuencias absolutas, f_i y el producto entre cada dato y su frecuencia, $x_i \cdot f_i$. Halla la media aritmética, la moda y la mediana. Datos: 2, 2, 1, 3, 4, 3, 2

Solución:

Datos, x_i	Frecuencias, f_i	$x_i \cdot f_i$
1		
2		
3		
4		

La media aritmética, $\overline{x}$:

La moda, Mo:

La mediana, M_e:

B. DIAGRAMAS DE BARRAS

Un diagrama de barras es una forma de representar gráficamente las frecuencias absolutas. En el eje X están los valores y en el eje Y están las frecuencias

resuelto **6)** Haz el diagrama de barras para la siguiente tabla

Países	Millones de turistas por año
Francia	77
España	52
Italia	40
Reino Unido	24
Austria	19

Solución:

7) Haz el diagrama de barras para la siguiente tabla

Países	Porcentaje parados
España	25
Grecia	22
Portugal	15
Irlanda	14
Italia	9
Alemania	6
Luxemburgo	5
Países bajos	5
Austria	4

Solución:

8) Algunos de los ríos más largos de la Península Ibérica son los siguientes: Tajo (1007 km), Ebro (910 km), Duero (895 km), Guadiana (818 km) y Guadalquivir (657 km). Con estos datos, haz una tabla y luego construye un diagrama de barras.
Solución:

C. DIAGRAMAS DE SECTORES

Un diagrama de sectores es una forma de representar gráficamente las frecuencias relativas usando un círculo. En él, cada uno de los sectores que forman el círculo representa el número de veces que se da cierto valor, en forma de porcentaje

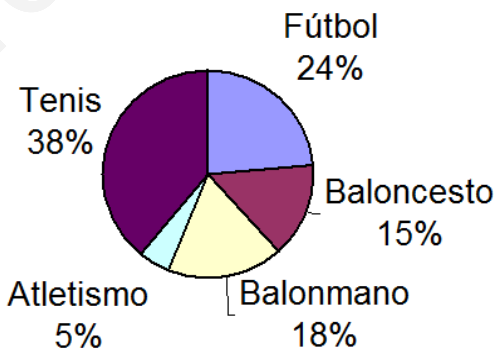
resuelto 9) Haz un diagrama de sectores con la siguiente tabla, perteneciente a los alumnos que practican algún deporte en cierto colegio:

Deportes	Alumnos practicantes
Fútbol	120
Baloncesto	75
Balonmano	90
Atletismo	24
Tenis	200

Solución:

Deportes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia en %	Grados
Fútbol	120	$\frac{120}{509}$	$\frac{120}{509}\cdot 100 \approx 24$	$24\% \cdot \frac{360^o}{100\%} = 86^o$
Baloncesto	75	$\frac{75}{509}$	$\frac{75}{509}\cdot 100 \approx 15$	$15\% \cdot \frac{360^o}{100\%} = 54^o$
Balonmano	90	$\frac{90}{509}$	$\frac{90}{509}\cdot 100 \approx 18$	$18\% \cdot \frac{360^o}{100\%} = 65^o$
Atletismo	24	$\frac{24}{509}$	$\frac{24}{509}\cdot 100 \approx 5$	$5\% \cdot \frac{360^o}{100\%} = 18^o$
Tenis	200	$\frac{200}{509}$	$\frac{200}{509}\cdot 100 \approx 38$	$38\% \cdot \frac{360^o}{100\%} = 137^o$
	N=509			

Ahora, con un compás, trazamos una circunferencia y sobre ella, con la ayuda de un transportador, llevamos los grados correspondientes a cada uno de los deportes.



10) El número de visitas que recibe una web a lo largo de las cuatro estaciones del año es el siguiente: En invierno 500 visitas, en primavera 700, en verano 1700 y en otoño 200. Realiza una tabla en donde aparezcan las frecuencias absolutas, las frecuencias relativas y la frecuencia porcentual. Dibuja un diagrama de sectores.

Solución:

Estaciones	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia en %	Grados
Invierno	500	$\frac{500}{3100}$	$\frac{500}{3100}\cdot 100 \approx 16$	$24\% \cdot \frac{360^o}{100\%} = 86^o$

Primavera	700	$\frac{\square}{3100}$	....	....
Verano	1700	$\frac{\square}{3100}$	....	....
Otoño	200	$\frac{\square}{3100}$	....	....
	N=3100			

Construcción del diagrama de sectores:

11) Éstos son el número de mensajes sms que Abundio envía en cada uno de los siete días de la semana: 30 el lunes, 45 el martes, 40 el miércoles, 50 el jueves, 80 el viernes, 90 el sábado y 10 el domingo. Haz una tabla en donde aparezcan las frecuencias absolutas, las frecuencias relativas y la frecuencia porcentual. Dibuja un diagrama de sectores.
Solución:

D. EXPERIMENTO ALEATORIO VERSUS DETERMINISTA

Suceso Aleatorio:
No es posible predecir lo que va a pasar, por ejemplo, el resultado de todos los partidos de fútbol en alguna jornada de liga

Suceso determinista:
Se puede predecir lo que va a pasar, por ejemplo, al soltar un lápiz, sabremos que éste caerá.

12) Di cuál de los siguientes experimentos son aleatorios y cuales deterministas:

Experimento	Suceso aleatorio	Suceso determinista
Extraer una carta de una baraja		
Medir la altura de una mesa.		
Lanzar un dado		
Pesar una botella de agua de un litro.		
La trayectoria de una mosca en una habitación		
La trayectoria de la Tierra en el Sistema Solar		
Jugar una apuesta de la Lotería Primitiva		
Aprobar un examen después de haber estudiado mucho		

E. ESPACIO MUESTRAL

El espacio muestral es el conjunto de todos los resultados posibles que pueden salirnos al hacer alguna actividad de tipo aleatorio. Por ejemplo, si en una caja opaca hay dos bolas blancas, dos negras y dos rojas y nos dicen que saquemos de ella una bola, el espacio muestral de este experimento será:
$E = \{\text{bola blanca, bola negra, bola roja}\}$

resuelto **13)** Escribe el espacio muestral de lanzar un dado.
Solución:
El espacio muestral, E, es el conjunto de sucesos que pueden darse en un experimento de tipo probabilístico.

En nuestro caso, al lanzar un dado podemos obtener lo siguiente:
$E = \{1,2,3,4,5,6\}$

resuelto **14)** Escribe el espacio muestral de lanzar dos monedas a la vez.
Solución:
Cuando lanzamos dos monedas a la vez podemos obtener el siguiente conjunto de resultados:
$E = \{cc, c+, +c, ++\}$

15) Escribe el espacio muestral de lanzar tres monedas a la vez.
Solución:

16) Escribe el espacio muestral de lanzar un dado y una moneda a la vez
Solución:

17) Escribe el espacio muestral de sacar dos bolas de una caja en donde hay bolas blancas y negras.
Solución:

F. REGLA DE LAPLACE

Regla de Laplace
La probabilidad de que se de cierto suceso aleatorio es:

$$P = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Ejemplo: La probabilidad de sacar una bola blanca de una caja en donde hay 10 bolas blancas y 5 bolas negras es:

$$P = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

resuelto **18)** Se lanza un dado. a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga 1? b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par? c) ¿Cuál es la probabilidad de que no salga el 6?

Solución:

a) Hay 6 casos posibles al lanzar un dado: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.
Hay un caso favorable de que salga un uno.
Aplicamos la regla de Laplace:

$$P = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{1}{6}$$

b) Hay 6 casos posibles al lanzar un dado: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.
Hay tres números pares, que son los casos favorables.
Aplicamos la regla de Laplace:

$$P = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$$

c) Hay 6 casos posibles al lanzar un dado: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.
Hay cinco números que no son 6, por lo que tenemos 5 casos favorables.
Aplicamos la regla de Laplace:

$$P = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{5}{6}$$

19) Se lanza un dado. a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 3? b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número impar? c) ¿Cuál es la probabilidad de que no salga el 2? ¿Y de que no salga ni el dos ni el 3?
Solución:

20) Tenemos una bolsa con dos bolas rojas, tres azules, cuatro verdes y una blanca. Halla la probabilidad de que: a) La bola sacada sea azul. b) La bola sacada sea roja o blanca. c) La bola sacada sea distinta de roja.
Solución:

No merece la pena que jueges a la lotería

¿Te parece difícil que, en un día cualquiera, caiga un rayo sobre ti y de este modo pierdas la vida? La verdad es que es bastante improbable que ello ocurra. Según datos facilitados por el Instituto Nacional de Estadística, la probabilidad es $\frac{1}{1600000}$, es decir, una de cada 1,6 millones de personas que residen en España, mueren como consecuencia de un rayo. No es este un peligro que nos quite el sueño, desde luego. Mucho más fácil es perecer en coche. Así, uno de cada 50000 viajes se convierte en un viaje mortal.

Es bastante irrisoria la probabilidad de perder la vida por culpa de un rayo. Pero es muchísimo más ridícula la probabilidad de acertar, por ejemplo, un boleto de la Lotería Primitiva. En concreto, la probabilidad exacta de que te toque es de una de entre 13983816… ¡casi 10 veces más complicado de que un rayo te fulmine! Aunque llevases jugando todos los días una apuesta, desde los tiempos de Cristo, estarías lejos de ganar. Para asegurarte, deberías haber empezado a jugar hace unos cuarenta mil años, y a diario.