

|                                                                                   |                                                                                                                                                                                             |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|  | <p align="center"><b>UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID</b><br/> <b>PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD</b><br/> Curso <b>2024-2025</b><br/> MATERIA: <b>MATEMÁTICAS II</b></p> |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

### INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

**CALIFICACIÓN:** Cada bloque se calificará sobre 2.5 puntos.

**TIEMPO:** 90 minutos.

**Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:**

**Pregunta 1.1.** (2.5 puntos) En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

**Pregunta 1.2.** Sean la matriz  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  e  $I$  la matriz identidad de orden 3. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular el polinomio  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  y hallar las raíces reales del polinomio.

b) (1.25 puntos) Para  $\lambda = 5$ , calcular un vector no nulo  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  que satisfaga que

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

**Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:**

**Pregunta 2.** Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva

$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$  para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores

distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

- a) (0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función  $f(x)$  en el intervalo  $[0,12]$ . ¿Está la curva en este intervalo  $[0,12]$  contenida completamente en el muro?
- b) (1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.
- c) (0.5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva  $f(x)$ ?

**Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:**

**Pregunta 3.1.** Dados la recta  $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$  y el plano  $\pi : x + 2y - 3z = 1$ , se pide:

- a) (0.75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a  $r$  y es perpendicular a  $\pi$ .
- b) (0.75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en  $\pi$  que corta perpendicularmente a  $r$ .
- c) (1 punto) Calcular los puntos de la recta  $r$  cuya distancia al plano  $\pi$  es  $\sqrt{14}$ .

**Pregunta 3.2.** Sean el punto  $P(0,1,1)$  y el plano  $\pi : x + y = 2$ . Se pide:

- a) (0.5 puntos) Hallar la distancia del punto  $P$  al plano  $\pi$ .
- b) (1 punto) Determinar el punto  $Q$  del plano  $\pi$  cuya distancia a  $P$  es igual que la distancia de  $P$  a  $\pi$ .
- c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por  $P$  y los puntos de corte del plano  $\pi$  con los ejes coordenados.

**Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:**

**Pregunta 4.1.** Sea  $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$  un espacio muestral y  $P$  una medida de probabilidad en  $E$  definida por:  $P(7) = P(3) = \frac{1}{4}$  y con el resto de sucesos elementales equiprobables.

Se consideran los sucesos  $A = \{7, 11, 13, 19\}$ ,  $B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$  y  $C = \{3, 5, 7, 11, 13\}$ . Se pide calcular:

- a) (1.25 puntos)  $P(\overline{(A-C)} \cap B)$ .
- b) (1.25 puntos)  $P((A \cap B) / \overline{C})$ .

**Pregunta 4.2.** Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20% de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50% entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74% de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65.8% entre los de 25 a 64 y al 53.7% entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

- a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.
- b) (1.25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

## SOLUCIONES

**Pregunta 1.1.** (2.5 puntos) En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

Llamamos  $x$ ,  $y$ ,  $z$  al número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido.

Obtenemos las ecuaciones que surgen del enunciado.

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres  $\rightarrow 0.80x + 0.50 \cdot 2y + 0.40 \cdot 3z = 80$ .
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos  $\rightarrow \frac{y}{3} = \frac{x+z}{5}$ .
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos  $\rightarrow 2z = x + y - 5$ .

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 0.80x + 0.50 \cdot 2y + 0.40 \cdot 3z = 80 \\ \frac{y}{3} = \frac{x+z}{5} \\ 2z = x + y - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0.8x + y + 1.2z = 80 \\ 5y = 3x + 3z \\ 2z = x + y - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 80 - 0.8x - 1.2z \\ 5y = 3x + 3z \\ 2z = x + y - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5(80 - 0.8x - 1.2z) = 3x + 3z \\ 2z = x + 80 - 0.8x - 1.2z - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 400 - 4x - 6z = 3x + 3z \\ 3.2z = 0.2x + 75 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 400 = 7x + 9z \\ 16z = x + 375 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 400 = 7x + 9z \\ 16z - 375 = x \end{array} \right\} \Rightarrow 400 = 7(16z - 375) + 9z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 400 = 112z - 2625 + 9z \Rightarrow 3025 = 121z \Rightarrow \boxed{z = \frac{3025}{121} = 25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 16 \cdot 25 - 375 = 25} \Rightarrow \boxed{y = 80 - 0.8 \cdot 25 - 1.2 \cdot 25 = 30}$$

En el partido se realizaron 25 lanzamientos de 1 punto, 30 de 2 puntos y 25 de 3 puntos.

**Pregunta 1.2.** Sean la matriz  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  e  $I$  la matriz identidad de orden 3. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular el polinomio  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  y hallar las raíces reales del polinomio.

b) (1.25 puntos) Para  $\lambda = 5$ , calcular un vector no nulo  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  que satisfaga que  $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

a) Calculamos la expresión de la matriz  $A - \lambda I$  y la de su determinante.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3 - \lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3 - \lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda) - 2(2 - \lambda) =$$

$$= (2 - \lambda)[(4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2] = (2 - \lambda)[12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2] =$$

$$= (2 - \lambda)[\lambda^2 - 7\lambda + 10] = 2\lambda^2 - 14\lambda + 20 - \lambda^3 + 7\lambda^2 - 10\lambda = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20$$

Tenemos que el polinomio  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20$ .

Determinamos las raíces de este polinomio.

$$\left. \begin{array}{l} P(\lambda) = (2 - \lambda)[\lambda^2 - 7\lambda + 10] \\ P(\lambda) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (2 - \lambda)[\lambda^2 - 7\lambda + 10] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - \lambda = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = 2} \\ \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = \boxed{5 = \lambda} \\ \frac{7-3}{2} = \boxed{2 = \lambda} \end{cases} \end{cases}$$

Las raíces del polinomio son  $\lambda = 2$  y  $\lambda = 5$ .

b) Para  $\lambda = 5$  la matriz  $A - \lambda I$  queda  $A - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ . Hemos visto que tiene

determinante nulo y la situación planteada tiene infinitas soluciones.  
Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$(A - 5I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ \Rightarrow x - y = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{ \text{Ecuación 1}^a = \text{Ecuación 2}^a \} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow 3y + 2y - 3z = 0 \Rightarrow 5y - 3z = 0 \Rightarrow 5y = 3z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{5}{3}y \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \frac{5}{3}\alpha \end{pmatrix}; \alpha \in \mathbb{R}$$

Si tomamos  $\alpha = 3$  tenemos el vector  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$  que cumple lo pedido.

**Pregunta 2.** Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva  $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$  para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

- a) (0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función  $f(x)$  en el intervalo  $[0,12]$ .  
 ¿Está la curva en este intervalo  $[0,12]$  contenida completamente en el muro?
- b) (1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.
- c) (0.5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva  $f(x)$ ?

a) Hallamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) \cdot \frac{\pi}{9}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{9} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi x}{9} = 0 \rightarrow \boxed{x=0} \\ \frac{\pi x}{9} = \pi \rightarrow \boxed{x=9} \\ \frac{\pi x}{9} = 2\pi \rightarrow x=18 \notin [0,12] \\ \dots \end{cases}$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo  $[0,12]$  y en los puntos críticos obtenidos.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) + 2 = 3 \text{ Máximo} \\ f(9) &= \cos\left(\frac{9\pi}{9}\right) + 2 = 1 \text{ Mínimo} \\ f(12) &= \cos\left(\frac{12\pi}{9}\right) + 2 = 1.5 \end{aligned} \right\}$$

El valor máximo es 3 y se alcanza en  $x=0$  y el valor mínimo es 1 y se alcanza en  $x=9$ .

Como el coseno de un ángulo toma como valor mínimo  $-1$  y máximo  $1$  la función

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \text{ toma como valor mínimo } -1 + 2 = 1 \text{ y como valor máximo } 1 + 2 = 3.$$

Por lo que la curva está contenida en el muro en el intervalo  $[0,12]$ .

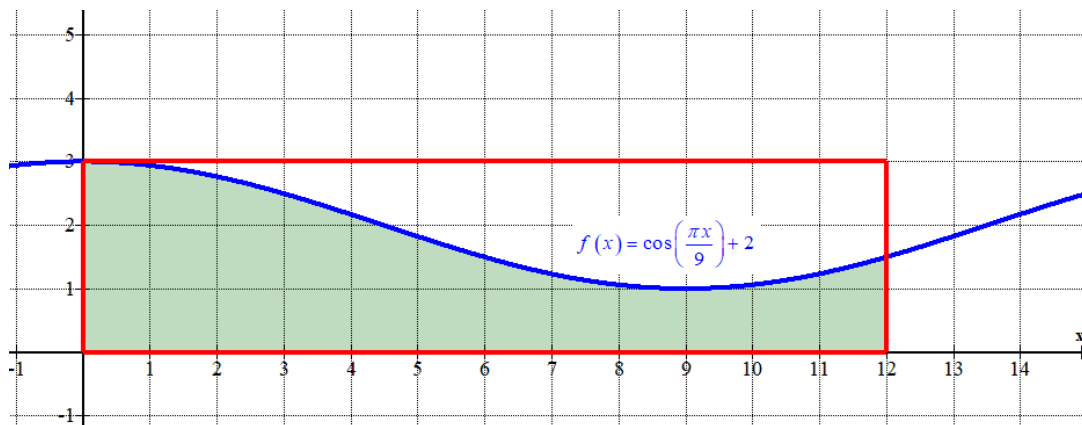
- b) El muro se divide en dos partes una por debajo de la curva y otra por encima de la curva. Hallamos el área de la parte de muro situada por debajo de la curva como la integral definida de la función entre 0 y 12.

$$\int_0^{12} f(x) dx = \int_0^{12} \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 dx = \left[ \frac{9}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2x \right]_0^{12} =$$

$$= \left[ \frac{9}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{12\pi}{9}\right) + 24 \right] - \left[ \frac{9}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) + 2 \cdot 0 \right] = \boxed{24 + \frac{9}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{12\pi}{9}\right) \approx 21.52}$$

La parte de muro situada por debajo de la curva tiene un área aproximada de 21.52 metros cuadrados.

Como el muro tiene una superficie de  $3 \cdot 12 = 36$  metros cuadrados la parte superior tiene una superficie aproximada de  $36 - 21.52 = 14.48$  metros cuadrados.



- c) Debemos pintar 21.52 metros cuadrados de muro. Como con cada bote de pintura se pintan 3 metros cuadrados de muro, entonces  $\frac{21.52}{3} \approx 7.17$ . Para pintar toda el área bajo la curva  $f(x)$  se necesitarán, por lo menos, 8 botes de pintura, con 7 nos faltaría un trocito de muro por pintar y con 8 nos sobra un poco de pintura.

**Pregunta 3.1.** Dados la recta  $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$  y el plano  $\pi : x + 2y - 3z = 1$ , se pide:

- a) (0.75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a  $r$  y es perpendicular a  $\pi$ .  
 b) (0.75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en  $\pi$  que corta perpendicularmente a  $r$ .  
 c) (1 punto) Calcular los puntos de la recta  $r$  cuya distancia al plano  $\pi$  es  $\sqrt{14}$ .

- a) El plano  $\pi'$  que contiene a  $r$  y es perpendicular a  $\pi$  tiene como vectores directores el vector director de la recta y el normal del plano. Además, contiene a todos los puntos de la recta.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 0, 1) \\ P_r(1, 0, 2) \end{cases} \quad \pi : x + 2y - 3z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (1, 2, -3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}' = \vec{v}_r = (2, 0, 1) \\ \vec{v}' = \vec{n} = (1, 2, -3) \\ P_r(1, 0, 2) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y + 4(z-2) + 6y - 2(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 4z - 8 + 6y - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' : -2x + 7y + 4z - 6 = 0}$$

El plano que contiene a  $r$  y es perpendicular a  $\pi$  tiene ecuación  $\pi' : -2x + 7y + 4z - 6 = 0$ .

- b) Una recta  $s$  perpendicular a la recta  $r$  debe tener vector director perpendicular a  $\vec{v}_r = (2, 0, 1)$ , como además debe estar contenida en el plano  $\pi : x + 2y - 3z = 1$  también debe ser perpendicular al vector normal del plano. Nos sirve como vector director de la recta  $s$  el producto vectorial de los vectores  $\vec{v}_r = (2, 0, 1)$  y  $\vec{n} = (1, 2, -3)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, 2, -3) \\ \vec{v}_r = (2, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{w}_s = \vec{n} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2i - 6j - 4k - j = 2i - 7j - 4k = (2, -7, -4)$$

Solo nos falta un punto por el que deba pasar la recta para cumplir lo pedido. Hallamos el punto P de corte del plano  $\pi$  y la recta  $r$ .

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \Rightarrow 1 + 2\lambda + 0 - 3(2 + \lambda) = 1 \Rightarrow$$

$$\pi : x + 2y - 3z = 1$$

$$\Rightarrow 1 + 2\lambda - 6 - 3\lambda = 1 \Rightarrow -\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = -6 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2(-6) = -11 \\ y = 0 \\ z = 2 - 6 = -4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(-11, 0, -4)}$$

La recta  $s$  buscada contiene el punto  $P(-11, 0, -4)$  y tiene como vector director  $\vec{w}_s = (2, -7, -4)$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_s = (2, -7, -4) \\ P(-11, 0, -4) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \frac{x+11}{2} = \frac{y}{-7} = \frac{z+4}{-4}$$

La recta contenida en  $\pi$  que corta perpendicularmente a  $r$  es  $s: \frac{x+11}{2} = \frac{y}{-7} = \frac{z+4}{-4}$ .

c) Cualquier punto de la recta  $r$  tiene coordenadas  $Q(1+2\lambda, 0, 2+\lambda)$ . Determinamos la expresión de la distancia de un punto de la recta al plano.

$$\left. \begin{array}{l} Q(1+2\lambda, 0, 2+\lambda) \\ \pi: x+2y-3z-1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(Q, \pi) = \frac{|1+2\lambda+2\cdot 0-3(2+\lambda)-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = \frac{|1+2\lambda-6-3\lambda-1|}{\sqrt{14}} = \frac{|-6-\lambda|}{\sqrt{14}}$$

Averiguamos cuando esta expresión toma el valor  $\sqrt{14}$ .

$$d(Q, \pi) = \sqrt{14} \Rightarrow \frac{|-6-\lambda|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \Rightarrow |-6-\lambda| = 14 \Rightarrow \begin{cases} -6-\lambda = 14 \rightarrow -20 = \lambda \\ -6-\lambda = -14 \rightarrow 8 = \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -20 \rightarrow Q_1(1+2(-20), 0, 2-20) \rightarrow \boxed{Q_1(-39, 0, -18)} \\ \lambda = 8 \rightarrow Q_2(1+2\cdot 8, 0, 2+8) \rightarrow \boxed{Q_2(17, 0, 10)} \end{cases}$$

Los dos puntos de la recta que cumplen lo pedido son  $Q_1(-39, 0, -18)$  y  $Q_2(17, 0, 10)$ .

**Pregunta 3.2.** Sean el punto  $P(0,1,1)$  y el plano  $\pi : x + y = 2$ . Se pide:

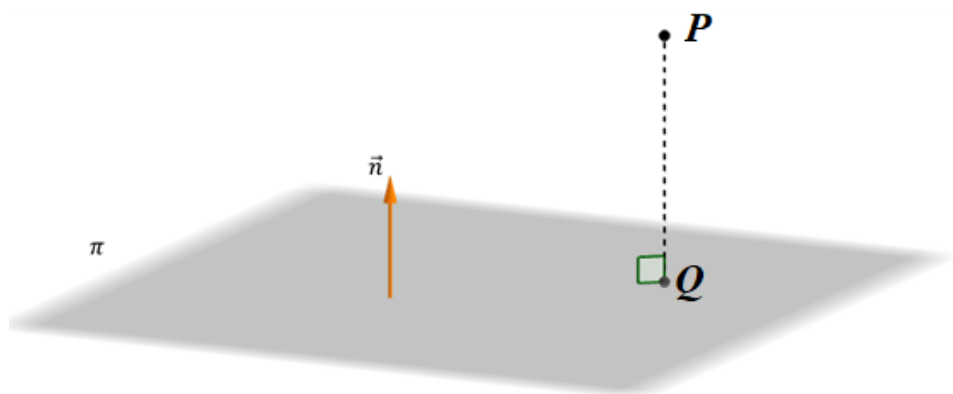
- (0.5 puntos) Hallar la distancia del punto  $P$  al plano  $\pi$ .
- (1 punto) Determinar el punto  $Q$  del plano  $\pi$  cuya distancia a  $P$  es igual que la distancia de  $P$  a  $\pi$ .
- (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por  $P$  y los puntos de corte del plano  $\pi$  con los ejes coordenados.

a) Calculamos la distancia pedida.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y - 2 = 0 \\ P(0,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi, P) = \frac{|0+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ unidades}$$

La distancia del punto  $P$  al plano  $\pi$  tiene un valor de  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  unidades.

b) Debemos hallar el punto  $Q$  del dibujo.



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto  $P$ . Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : x + y - 2 = 0 \rightarrow \vec{n} = (1, 1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = \vec{n} = (1, 1, 0) \\ P(0, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow s : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 \end{cases}$$

Este punto  $Q$  que buscamos pertenece al plano y pertenece a la recta  $s$ .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y = 2 \\ s : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + 1 + \alpha = 2 \Rightarrow 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)}$$

El punto  $Q$  del plano  $\pi$  cuya distancia a  $P$  es igual que la distancia de  $P$  a  $\pi$  tiene coordenadas  $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$ .

c) Hallamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y = 2 \\ \text{Eje } OX \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y = 2 \\ \text{Eje } OY \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(0, 2, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y = 2 \\ \text{Eje } OZ \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2 \Rightarrow \text{No hay punto de corte con } OZ$$

Los vértices del triángulo son  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(0, 2, 0)$  y  $P(0, 1, 1)$ .

El área del triángulo ABP es la mitad del módulo del producto vectorial de dos vectores que unan dos de sus lados adyacentes.

$$\left. \begin{array}{l} A(2, 0, 0) \\ B(0, 2, 0) \\ P(0, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0) - (2, 0, 0) = (-2, 2, 0) \\ \overrightarrow{AP} = (0, 1, 1) - (2, 0, 0) = (-2, 1, 1) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i - 2k + 4k + 2j = 2i + 2j + 2k = (2, 2, 2)$$

$$\text{Área } ABP = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \boxed{\sqrt{3} \text{ u}^2}$$

El área del triángulo formado por  $P$  y los puntos de corte del plano  $\pi$  con los ejes coordenados tiene un valor de  $\sqrt{3}$  unidades cuadradas.

**Pregunta 4.1.** Sea  $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$  un espacio muestral y  $P$  una medida de probabilidad en  $E$  definida por:  $P(7) = P(3) = \frac{1}{4}$  y con el resto de sucesos elementales equiprobables.

Se consideran los sucesos  $A = \{7, 11, 13, 19\}$ ,  $B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$  y  $C = \{3, 5, 7, 11, 13\}$ . Se pide calcular:

a) (1.25 puntos)  $P(\overline{(A-C)} \cap B)$ .

b) (1.25 puntos)  $P((A \cap B) / \overline{C})$ .

Como  $P(7) = P(3) = \frac{1}{4}$ ,  $P(E) = 1$  y  $P(2) = P(5) = P(11) = P(13) = P(17) = P(19) = p$

entonces  $6p + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow 6p + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow 6p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{12}$ .

Tenemos que  $P(2) = P(5) = P(11) = P(13) = P(17) = P(19) = \frac{1}{12}$

a) Obtenemos el suceso  $\overline{(A-C)} \cap B$ .

$$\left. \begin{array}{l} A = \{7, 11, 13, 19\} \\ C = \{3, 5, 7, 11, 13\} \end{array} \right\} \Rightarrow A - C = \{19\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{A - C} = E - \{19\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} - \{19\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{A - C} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\} \\ B = \{2, 5, 7, 13, 17\} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{(A - C)} \cap B = B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$$

Hallamos la probabilidad pedida.

$$P(\overline{(A - C)} \cap B) = P(2) + P(5) + P(7) + P(13) + P(17) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \boxed{\frac{7}{12}}$$

b) Determinamos el suceso  $(A \cap B) / \overline{C}$ .

$$\left. \begin{array}{l} A = \{7, 11, 13, 19\} \\ B = \{2, 5, 7, 13, 17\} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cap B = \{7, 13\}$$

$$\left. \begin{array}{l} C = \{3, 5, 7, 11, 13\} \\ E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{C} = E - C = \{2, 17, 19\}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \cap B = \{7, 13\} \\ \overline{C} = \{2, 17, 19\} \end{array} \right\} \Rightarrow (A \cap B) / \overline{C} = \emptyset$$

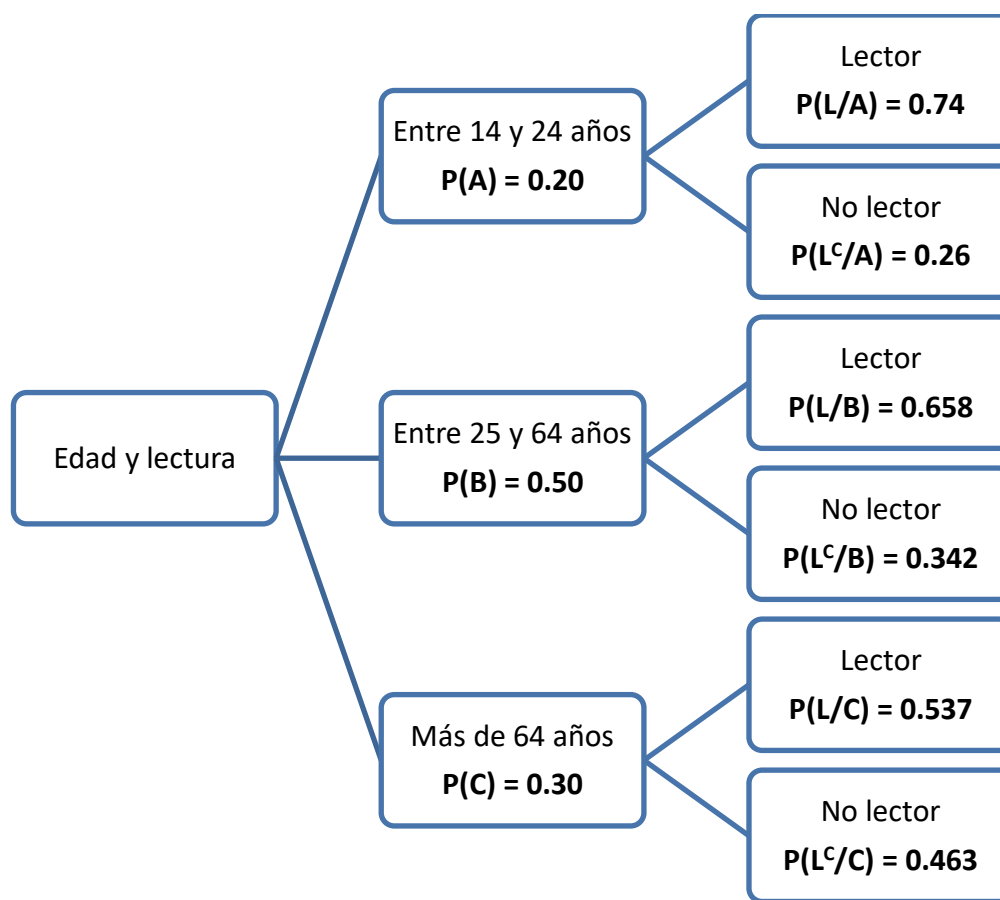
El suceso  $(A \cap B) / \overline{C}$  es un suceso imposible y su probabilidad es cero:  $P((A \cap B) / \overline{C}) = 0$

**Pregunta 4.2.** Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20% de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50% entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74% de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65.8% entre los de 25 a 64 y al 53.7% entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.

b) (1.25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

Realizamos un diagrama de árbol para ordenar toda la información. Llamamos A, B y C a los sucesos “edad entre 14 y 24 años”, “edad entre 25 y 64” y “mayor de 64 años”, respectivamente. También llamamos L a “ser lector habitual”.



a) Nos piden calcular  $P(L)$ . Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(L) &= P(A)P(L/A) + P(B)P(L/B) + P(C)P(L/C) = \\
 &= 0.2 \cdot 0.74 + 0.5 \cdot 0.658 + 0.3 \cdot 0.537 = \boxed{0.6381}
 \end{aligned}$$

b) Nos piden calcular  $P(B/L^c)$ . Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/L^c) = \frac{P(B \cap L^c)}{P(L^c)} = \frac{P(B)P(L^c/B)}{1 - P(L)} = \frac{0.5 \cdot 0.342}{1 - 0.6381} = \frac{1710}{3619} \approx 0.4725$$