



# Prueba de acceso a la Universidad (PAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2024-2025

Materia: **Matemáticas II**

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

## INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

**El estudiante deberá resolver cuatro ejercicios de los propuestos en este examen.** Los ejercicios 1,2 y 3 tienen dos opciones A y B. Solo hay que contestar una de las dos opciones (A o B). Si se contesta a las dos se corregirá solo la que aparezca en primer lugar, salvo que esté tachada. El ejercicio 4 es **único y obligatorio**. **CADA EJERCICIO COMPLETO PUNTUARÁ 2,5 PUNTOS MÁXIMO.** En cada apartado se indica la correspondiente puntuación.

Se adjunta al final tabla de la distribución NORMAL por si hiciera falta para algún ejercicio.

Todas las instrucciones son las recogidas en los criterios generales de evaluación ya publicados junto con los modelos de exámenes. Indicamos a modo de recordatorio y resumen:

**Criterios generales.** Las respuestas de los ejercicios deberán realizarse expresando de forma razonada el proceso seguido en su resolución con el rigor y la precisión necesaria, usando el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados. Se valorará con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio.

**Ortografía y redacción.** Se valorará la corrección ortográfica (grafías, tildes y puntuación), así como la coherencia, la cohesión, la corrección gramatical y léxica y la presentación. Se deducirá 0,10 puntos por cada falta a partir de la tercera. Se podrá deducir hasta 1 punto máximo en la puntuación final.

**Materiales.** Se permitirá una calculadora no gráfica y no programable, según el anexo aprobado y publicado.

### **EJERCICIO 1A. [2,5 puntos] a) 1,5 puntos, b) 1 punto.**

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, con  $m \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} mx + 7y + 5z = 0 \\ x + my + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema en función del parámetro  $m$ .

b) Resolver para el caso  $m = 1$ .

### **EJERCICIO 1B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.**

Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

a) Obtener la inversa de la matriz  $A^T + I$  donde  $I$  es la matriz identidad de orden 3.

b) Resolver la ecuación matricial  $A^T X - I = 2B - X$ . ( $A^T$  es la matriz traspuesta de  $A$ )

### **EJERCICIO 2A. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.**

a) Dada la función  $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^3}$ , calcula los valores de  $a$  y  $b$  sabiendo que  $f(x)$  tiene un máximo relativo en el punto  $P(1,2)$ .

b) Estudia los extremos relativos, el crecimiento y decrecimiento y las asíntotas de la función anterior para el caso particular  $a = 2$ ,  $b = -2$ .

**EJERCICIO 2B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.**

Dadas las funciones  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  y  $g(x) = x + 3$ . a) Calcula la primitiva de  $\frac{g(x)}{f(x)}$  que pase por el punto (5, 0) b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de  $f(x)$  y  $g(x)$ .

-----

**EJERCICIO 3A. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 1 punto c) 0,75 puntos.**

Dados los puntos  $A = (1, 2, 3)$ ,  $B = (2, 3, 4)$ ,  $C = (3, 4, 3)$

- a) ¿Están A, B y C alineados?
  - b) Halla un vector que sea ortogonal a  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$ , y de módulo  $\sqrt{2}$ .
  - c) Halla el punto simétrico del punto A respecto del punto B.
- 

**EJERCICIO 3B. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 1 punto c) 0,75 puntos.**

Dada la recta  $s \equiv \frac{x}{-4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{0}$ , el plano  $\pi \equiv x - 2y + 3z - 6 = 0$  y el punto  $P(1, -1, 0)$

- a) Obtener la ecuación del plano perpendicular a la recta s que pase por P.
  - b) Calcular la distancia del punto P a la recta s.
  - c) Calcular el ángulo que forma la recta s con el plano  $\pi$ .
- 

**EJERCICIO 4. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 0.75 puntos, c) 1 punto**

Se sabe que el 30% de una población de la Comarca Villuercas-Ibores-Jara ve el programa de televisión “La Revuelta”. La productora El Terrat, empresa encargada de llevar a cabo dicho programa, decide llamar por teléfono, al azar, a 10 personas de esa población:

- a) Calcula la probabilidad de que estuvieran viendo el programa más de 8 personas.
- b) Calcula la probabilidad de que estuvieran viendo el programa alguna de las 10 personas.
- c) Se sabe que, en la misma población, el 35% ve el programa “El Hormiguero” y se sabe también que el 40% no ve ninguno de los dos. Si se elige una persona al azar ¿Cuál es la probabilidad de que vea los dos programas?

## SOLUCIONES

**EJERCICIO 1A. [2,5 puntos] a) 1,5 puntos, b) 1 punto.**

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, con  $m \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} mx + 7y + 5z = 0 \\ x + my + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema en función del parámetro  $m$ .  
 b) Resolver para el caso  $m = 1$ .

a) El sistema tiene como matriz de coeficientes  $A = \begin{pmatrix} m & 7 & 5 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} m & 7 & 5 & 0 \\ 1 & m & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 7 & 5 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m^2 + 0 + 5 - 0 - 7 - m = m^2 - m - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = \boxed{2=m} \\ \frac{1-3}{2} = \boxed{-1=m} \end{cases}$$

Analizamos los tres casos diferentes que se nos plantean.

**CASO 1.**  $m \neq -1$  y  $m \neq 2$ 

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

**CASO 2.**  $m = -1$ 

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Analizamos los rangos de A y A/B.

La matriz ampliada queda  $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Triangulamos la matriz.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad 1 \quad 3 \\ -1 \quad 7 \quad 5 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 6 \quad 6 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 6 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad 6 \quad 6 \quad 3 \\ 0 \quad -6 \quad -6 \quad 12 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 15 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{c|ccc} & A/B & & \\ \hline -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ \hline & A & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es incompatible (sin solución).

### CASO 3. $m = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Analizamos los rangos de A y A/B.

La matriz ampliada queda  $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Triangulamos el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 2 \quad 7 \quad 5 \quad 0 \\ -2 \quad -4 \quad -2 \quad -6 \\ \hline 0 \quad 3 \quad 3 \quad -6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad 3 \quad 3 \quad -6 \\ 0 \quad -3 \quad -3 \quad 6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{c|ccc} & A/B & & \\ \hline 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & A & & \end{array} \right)$$

El rango de A y el de A/B es 2. Son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

**Resumiendo:** Si  $m \neq -1$  y  $m \neq 2$  el sistema es compatible determinado (una única solución), si  $m = 2$  el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si  $m = -1$  el sistema es incompatible (sin solución).

b) Para  $m = 1$  hemos visto que el sistema es compatible determinado (CASO 1). Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} x + 7y + 5z = 0 \\ x + y + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 7y + 5z = 0 \\ x + y + z = 3 \\ z = -2 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 7y + 5(-2 - y) = 0 \\ x + y - 2 - y = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 7y - 10 - 5y = 0 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow 5 + 2y - 10 = 0 \Rightarrow 2y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{2} \Rightarrow z = -2 - \frac{5}{2} = -\frac{9}{2}$$

Para  $m = 1$  las soluciones del sistema son  $x = 5, y = \frac{5}{2}, z = -\frac{9}{2}$ .

**EJERCICIO 1B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.**

Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

a) Obtener la inversa de la matriz  $A^T + I$  donde  $I$  es la matriz identidad de orden 3.

b) Resolver la ecuación matricial  $A^T X - I = 2B - X$ . ( $A^T$  es la matriz traspuesta de  $A$ )

a) Obtenemos la expresión de la matriz  $A^T + I$ , comprobamos que es invertible y calculamos su inversa.

$$A^T + I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A^T + I| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 18 + 10 - 12 - 8 - 15 = 36 - 35 = 1 \neq 0$$

$$(A^T + I)^{-1} = \frac{\text{Adj}\left((A^T + I)^T\right)}{|A^T + I|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A^T + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 8-15 & -4+5 & 6-4 \\ -(4-9) & 2-3 & -(3-2) \\ 10-12 & -(5-6) & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos  $X$  en la ecuación matricial.

$$A^T X - I = 2B - X \Rightarrow A^T X + X = 2B + I \Rightarrow (A^T + I)X = 2B + I \Rightarrow X = (A^T + I)^{-1}(2B + I)$$

Obtenemos la expresión de  $X$ .

$$2B + I = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^T + I)^{-1}(2B + I) = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 7+0+8 & 0-1+4 & -14+2-10 \\ -5+0-4 & 0+1-2 & 10-2+5 \\ 2+0+0 & 0-1+0 & -4+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 & -22 \\ -9 & -1 & 13 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es  $X = \begin{pmatrix} 15 & 3 & -22 \\ -9 & -1 & 13 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

**EJERCICIO 2A. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.**

- a) Dada la función  $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^3}$ , calcula los valores de  $a$  y  $b$  sabiendo que  $f(x)$  tiene un máximo relativo en el punto  $P(1,2)$ .
- b) Estudia los extremos relativos, el crecimiento y decrecimiento y las asíntotas de la función anterior para el caso particular  $a = 2$ ,  $b = -2$ .

a) La función pasa por el punto  $P(1, 2)$ , por lo que  $f(1) = 2$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^3} \\ f(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a \cdot 1^2 + b}{1^3} = 2 \Rightarrow \boxed{a + b = 2}$$

La función tiene un máximo relativo en  $x = 1$ , por lo que la derivada debe anularse para  $x = 1$   
 $\Rightarrow f'(1) = 0$ .

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2ax \cdot x^3 - 3x^2(ax^2 + b)}{x^6} = \frac{2ax^4 - 3x^2(ax^2 + b)}{x^6} = \frac{2ax^2 - 3(ax^2 + b)}{x^4}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{2ax^2 - 3(ax^2 + b)}{x^4} \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2a \cdot 1^2 - 3(a \cdot 1^2 + b)}{1^4} = 0 \Rightarrow 2a - 3(a + b) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a - 3b = 0 \Rightarrow \boxed{-3b = a}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 2 \\ a = -3b \end{array} \right\} \Rightarrow -3b + b = 2 \Rightarrow -2b = 2 \Rightarrow \boxed{b = -1} \Rightarrow \boxed{a = -3(-1) = 3}$$

Los valores buscados son  $a = 3$  y  $b = -1$ .

b) Para  $a = 2$ ,  $b = -2$  la función queda  $f(x) = \frac{2x^2 - 2}{x^3}$ .

Buscamos los valores que anulan la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2}{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x \cdot x^3 - 3x^2(2x^2 - 2)}{x^6} = \frac{4x^4 - 6x^4 + 6x^2}{x^6} = \frac{-2x^2 + 6}{x^4}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2 + 6}{x^4} = 0 \Rightarrow -2x^2 + 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{3}}$$

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes, entre y después de  $x = -\sqrt{3}$ ,  $x = 0$  y  $x = +\sqrt{3}$ .

- En el intervalo  $(-\infty, -\sqrt{3})$  tomamos  $x = -2$  y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{-2 \cdot (-2)^2 + 6}{(-2)^4} = \frac{-2}{16} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -\sqrt{3}).$$

- En el intervalo  $(-\sqrt{3}, 0)$  tomamos  $x = -1$  y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{-2 \cdot (-1)^2 + 6}{(-1)^4} = 4 > 0. \text{ La función crece en } (-\sqrt{3}, 0).$$

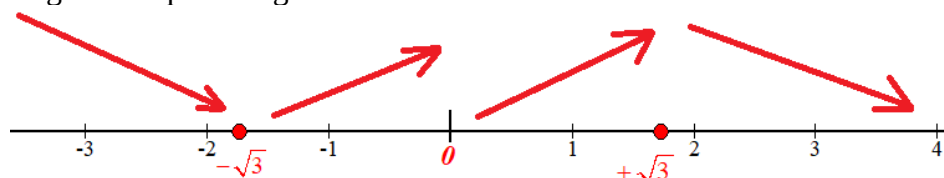
- En el intervalo  $(0, +\sqrt{3})$  tomamos  $x = 1$  y la derivada vale  $f'(1) = \frac{-2 \cdot 1^2 + 6}{1^4} = 4 > 0$ .

La función crece en  $(0, +\sqrt{3})$ .

- En el intervalo  $(+\sqrt{3}, +\infty)$  tomamos  $x = 2$  y la derivada vale

$$f'(2) = \frac{-2 \cdot 2^2 + 6}{2^4} = \frac{-2}{16} < 0. \text{ La función decrece en } (+\sqrt{3}, +\infty).$$

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en  $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (+\sqrt{3}, +\infty)$  y decrece en  $(-\sqrt{3}, 0) \cup (0, +\sqrt{3})$ .

La función presenta un mínimo relativo en  $x = -\sqrt{3}$  y un máximo relativo en  $x = +\sqrt{3}$ .

Como  $f(-\sqrt{3}) = \frac{2(-\sqrt{3})^2 - 2}{(-\sqrt{3})^3} = \frac{-4\sqrt{3}}{9}$  el mínimo relativo tiene coordenadas  $(-\sqrt{3}, \frac{-4\sqrt{3}}{9})$ .

Como  $f(\sqrt{3}) = \frac{2(\sqrt{3})^2 - 2}{(\sqrt{3})^3} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$  el máximo relativo tiene coordenadas  $(\sqrt{3}, \frac{4\sqrt{3}}{9})$ .

**Asíntotas verticales.**  $x = a$

¿ $x = 0$  es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 2}{x^3} = \frac{2 \cdot 0^2 - 2}{0^3} = \frac{-2}{0} = \infty$$

$x = 0$  es asíntota vertical

**Asíntota horizontal.**  $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

La recta  $y = 0$  es asíntota horizontal de la función.

**Asíntota oblicua.**  $y = mx + n$

La función tiene asíntota horizontal y no puede tener asíntota oblicua.

**EJERCICIO 2B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.**

Dadas las funciones  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  y  $g(x) = x + 3$ . a) Calcula la primitiva de  $\frac{g(x)}{f(x)}$  que pase por el punto (5, 0) b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de  $f(x)$  y  $g(x)$ .

a) Calculamos la integral indefinida.

$$\int \frac{g(x)}{f(x)} dx = \int \frac{x+3}{x^2-4x+3} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 = x \\ \frac{4-2}{2} = 1 = x \end{cases}$$

$$\frac{x+3}{x^2-4x+3} = \frac{x+3}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-1)}{(x-1)(x-3)}$$

$$x+3 = A(x-3) + B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=3 \rightarrow 6 = 2B \rightarrow B=3 \\ x=1 \rightarrow 4 = -2A \rightarrow A=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{x^2-4x+3} = \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-3}$$

$$\dots = \int \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-3} dx = \int \frac{-2}{x-1} dx + \int \frac{3}{x-3} dx = \boxed{-2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-3| + C}$$

Hallamos el valor de C tal que la primitiva  $F(x) = -2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-3| + C$  pase por el punto (5, 0).

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= -2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-3| + C \\ F(5) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2 \ln|5-1| + 3 \ln|5-3| + C = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \ln 2 - 2 \ln 2^2 + C = 0 \Rightarrow 3 \ln 2 - 4 \ln 2 + C = 0 \Rightarrow -\ln 2 + C = 0 \Rightarrow \boxed{C = \ln 2}$$

La primitiva buscada es  $F(x) = -2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-3| + \ln 2$ .

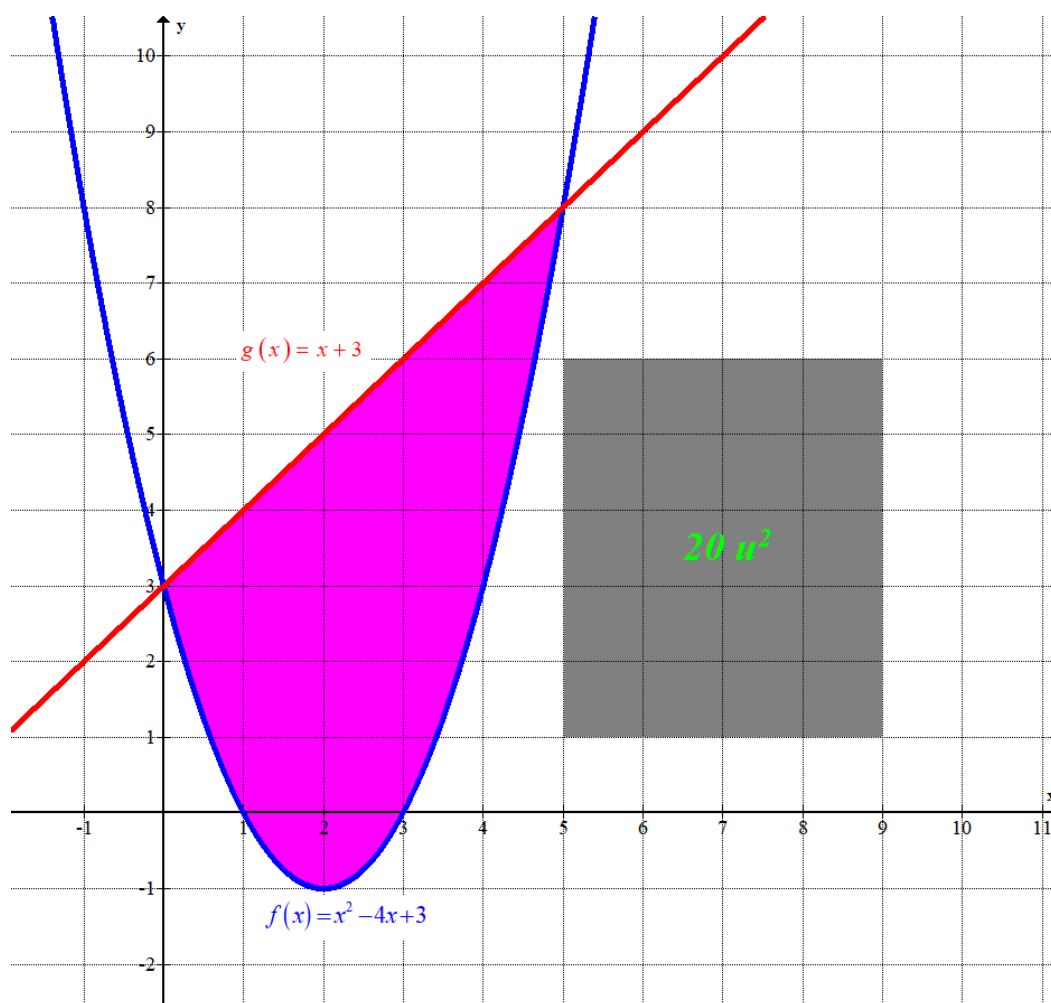
b) Hallamos los posibles puntos de corte de las dos gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 4x + 3 \\ g(x) = x + 3 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = x + 3 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

El área de la región limitada por las dos gráficas la obtenemos como el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 5 de la diferencia entre las dos funciones.

$$\begin{aligned} \int_0^5 f(x) - g(x) dx &= \int_0^5 x^2 - 4x + 3 - (x + 3) dx = \int_0^5 x^2 - 5x dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} \right]_0^5 = \\ &= \left[ \frac{5^3}{3} - \frac{5 \cdot 5^2}{2} \right] - \left[ \frac{0^3}{3} - \frac{5 \cdot 0^2}{2} \right] = \frac{125}{3} - \frac{125}{2} = \frac{-125}{6} \approx -20.8333 \end{aligned}$$

El área del recinto limitado por las gráficas de  $f(x)$  y  $g(x)$  tiene un valor de  $\frac{125}{6} \approx 20.8333$  unidades cuadradas.



**EJERCICIO 3A. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 1 punto c) 0,75 puntos.**

Dados los puntos  $A = (1, 2, 3)$ ,  $B = (2, 3, 4)$ ,  $C = (3, 4, 3)$

a) ¿Están A, B y C alineados?

b) Halla un vector que sea ortogonal a  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$ , y de módulo  $\sqrt{2}$ .

c) Halla el punto simétrico del punto A respecto del punto B.

a) Para que los tres puntos estén alineados los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$  deben tener coordenadas proporcionales (están en la misma dirección).

$$\left. \begin{array}{l} A = (1, 2, 3) \\ B = (2, 3, 4) \\ C = (3, 4, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 3, 4) - (1, 2, 3) = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (3, 4, 3) - (1, 2, 3) = (2, 2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{0}$$

Los vectores no tienen coordenadas proporcionales y los puntos A, B y C no están alineados.

b) Un vector ortogonal a  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$  es su producto vectorial.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 2, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2j + 2k - 2k - 2i = (-2, 2, 0)$$

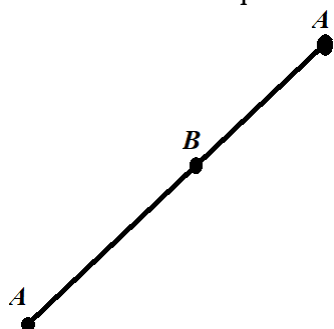
Obtenemos el módulo del vector  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ .

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Consideramos el vector  $\vec{w} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$ . Este vector es ortogonal a  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$  y

tiene módulo  $|\vec{w}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ .

c) Obtenemos las coordenadas del punto A' del dibujo. Este cumple que los puntos A, B y A' están alineados y la distancia de A a B es la misma que de A' a B.



El punto A' lo obtenemos sumando al punto B el vector  $\overrightarrow{AB}$ .

$$A' = B + \overrightarrow{AB} = (2, 3, 4) + (1, 1, 1) = (3, 4, 5)$$

El punto A' simétrico del punto A respecto del punto B tiene coordenadas  $A' = (3, 4, 5)$ .

**EJERCICIO 3B. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 1 punto c) 0,75 puntos.**

Dada la recta  $s \equiv \frac{x}{-4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{0}$ , el plano  $\pi \equiv x-2y+3z-6=0$  y el punto  $P(1,-1,0)$

- a) Obtener la ecuación del plano perpendicular a la recta  $s$  que pase por  $P$ .  
 b) Calcular la distancia del punto  $P$  a la recta  $s$ .  
 c) Calcular el ángulo que forma la recta  $s$  con el plano  $\pi$ .

- a) El plano  $\pi'$  perpendicular a la recta  $s$  que pasa por  $P$  tiene como vector normal el vector director de la recta.

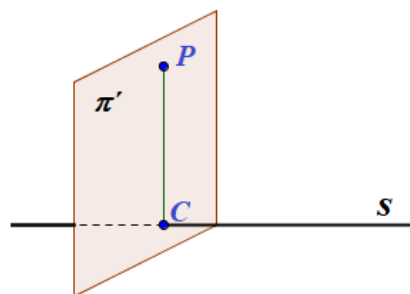
$$s \equiv \frac{x}{-4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{0} \Rightarrow \vec{v}_s = (-4, 3, 0)$$

$$\vec{n}' = \vec{v}_s = (-4, 3, 0) \left\{ \begin{array}{l} \pi': -4x + 3y + D = 0 \\ P(1, -1, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi': -4x + 3y + D = 0 \\ P(1, -1, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow -4 \cdot 1 + 3(-1) + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 - 3 + D = 0 \Rightarrow D = 7 \Rightarrow \boxed{\pi': -4x + 3y + 7 = 0}$$

La ecuación del plano perpendicular a la recta  $s$  que pasa por  $P$  es  $\pi': -4x + 3y + 7 = 0$ .

- b) La distancia del punto  $P$  a la recta  $s$  es la distancia del punto  $P$  al punto  $C$  de corte de la recta con el plano  $\pi'$ .



Hallamos el punto  $C$  de corte de recta y plano.

$$s \equiv \frac{x}{-4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_s = (-4, 3, 0) \\ Q_r(0, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = -4\alpha \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi': -4x + 3y + 7 = 0 \\ s: \begin{cases} x = -4\alpha \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = -1 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -4(-4\alpha) + 3(1 + 3\alpha) + 7 = 0 \Rightarrow 16\alpha + 3 + 9\alpha + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25\alpha + 10 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-10}{25} = \frac{-2}{5} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -4 \frac{-2}{5} = \frac{8}{5} \\ y = 1 + 3 \frac{-2}{5} = \frac{-1}{5} \\ z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{8}{5}, \frac{-1}{5}, -1\right)}$$

Hallamos la distancia del punto P al C como el módulo del vector que los une.

$$\left. \begin{array}{l} C\left(\frac{8}{5}, \frac{-1}{5}, -1\right) \\ P(1, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PC} = \left(\frac{8}{5}, \frac{-1}{5}, -1\right) - (1, -1, 0) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -1\right)$$

$$d(P, s) = d(P, C) = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{2} \approx 1.41u}$$

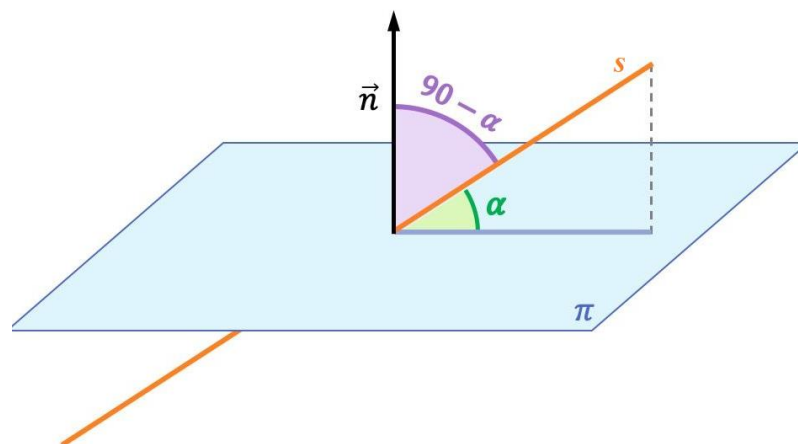
c) Hallamos el ángulo que forma el vector director de la recta con el vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y + 3z - 6 = 0 \rightarrow \vec{n} = (1, -2, 3) \\ \vec{v}_s = (-4, 3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{v}_s) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{n}| |\vec{v}_s|} =$$

$$= \frac{|(1, -2, 3)(-4, 3, 0)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{|-4 - 6|}{5\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{n}, \vec{v}_s) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{14}}{7}\right) \approx 57^\circ$$

El ángulo que forman recta y plano es de  $90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$ .



**EJERCICIO 4. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 0.75 puntos, c) 1 punto**

Se sabe que el 30% de una población de la Comarca Villuercas-Ibores-Jara ve el programa de televisión “La Revuelta”. La productora El Terrat, empresa encargada de llevar a cabo dicho programa, decide llamar por teléfono, al azar, a 10 personas de esa población:

- a) Calcula la probabilidad de que estuvieran viendo el programa más de 8 personas.  
 b) Calcula la probabilidad de que estuvieran viendo el programa alguna de las 10 personas.  
 c) Se sabe que, en la misma población, el 35% ve el programa “El Hormiguero” y se sabe también que el 40% no ve ninguno de los dos. Si se elige una persona al azar ¿Cuál es la probabilidad de que vea los dos programas?

Sea  $X$  = número de personas de un grupo de 10 que están viendo “La Revuelta”.  
 Esta variable es una binomial de parámetros  $n = 10$  y  $p = 0.30$ .  $X = B(10, 0.3)$

- a) Calculamos  $P(X > 8)$ .

$$P(X > 8) = P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9} 0.3^9 \cdot 0.7^1 + \binom{10}{10} 0.3^{10} \cdot 0.7^0 =$$

$$= 10 \cdot 0.3^9 \cdot 0.7 + 0.3^{10} = \boxed{0.00014}$$

La probabilidad de que estuvieran viendo el programa más de 8 personas vale 0.00014.

- b) Debemos calcular  $P(X \geq 1)$ . Usamos el suceso contrario para calcular esta probabilidad.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0.3^0 \cdot 0.7^{10} = 1 - 0.7^{10} \approx \boxed{0.9718}$$

La probabilidad de que estuvieran viendo el programa alguna de las 10 personas vale 0.9718.

- c) Hacemos una tabla de contingencia.

|                       | Ve “La Revuelta” | No ve “La Revuelta” |     |
|-----------------------|------------------|---------------------|-----|
| Ve “El Hormiguero”    |                  |                     | 35  |
| No ve “El hormiguero” |                  | 40                  |     |
|                       | 30               |                     | 100 |

Completamos la tabla.

|                       | Ve “La Revuelta” | No ve “La Revuelta” |     |
|-----------------------|------------------|---------------------|-----|
| Ve “El Hormiguero”    | 5                | 30                  | 35  |
| No ve “El hormiguero” | 25               | 40                  | 65  |
|                       | 30               | 70                  | 100 |

En la tabla observamos que un 5% de los habitantes del pueblo ve los dos programas. La probabilidad de que la persona elegida al azar vea los dos programas es 0.05.