

	Pruebas de Acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3
---	---	-----------------------	--

INDICACIONES

- 1. OPTATIVIDAD:** El examen consta de cuatro apartados: un apartado con un problema obligatorio y 3 apartados con la posibilidad de elegir entre dos problemas. Se deberá responder a un máximo de **CUATRO PROBLEMAS**: el problema obligatorio (apartado 1) y solamente un problema de cada uno de los tres apartados restantes. No es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciados, pero se expresará claramente cuáles son los elegidos. En caso de responder a dos problemas de un mismo apartado, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego y que no aparezca totalmente tachado.
- 2. CALCULADORA:** Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones ni cálculo matricial, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.
- 3. CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:** Cada uno de los problemas se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.
- 4. DEDUCCIONES POR ERRORES ORTOGRÁFICOS Y GRAMATICALES:** Se penalizarán los errores ortográficos (grafías, tildes y puntuación) cometidos, hasta un máximo de un punto en la nota global del examen, teniéndose en cuenta que la repetición del mismo error se contabilizará como sólo uno, los dos primeros errores no se penalizarán y, a partir del tercer error ortográfico, se deducirá 0,1 puntos por error. Por errores en la redacción, en la presentación, incoherencia o incorrección léxica o gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto de la nota global.
- 5.** El examen debe realizarse usando **bolígrafo azul o negro** (sólo un color). No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.

APARTADO 1: (obligatorio)

Problema 1.

a) Dado $k \in \mathbb{R}$, se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} kx - y - z = 1 \\ x + ky + 2kz = k \end{cases}$$

Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ y resolverlo para $k = -1$.

(1,5 puntos)

b) Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 = I + 3A$, donde I denota la matriz identidad. Demostrar que el determinante de A no es cero y expresar A^{-1} en función de A y de I . (1 punto)

APARTADO 2: (elegir UN problema)

Problema 2A.

Sea la función $f(x) = 12x + 3x^2 - 2x^3$.

- a) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y su recta tangente en el punto $x=1$.
(1,5 puntos)
- b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{xf'(x)}$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano.
(1 punto)

Problema 2B.

Se considera la función $f(x) = x^2 e^{-x}$.

- a) Determinar su dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.
(1,5 puntos)
- b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$.
(1 punto)

APARTADO 3: (elegir UN problema)**Problema 3A.**

Sean el plano $\pi \equiv 5x + my + z = 2$ y la recta $r \equiv (x, y, z) = (1, 1, 0) + t(-1, -1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

- a) Determinar la posición relativa de r y π en función de m .
(1,5 puntos)
- b) Para $m=1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π .
(1 punto)

Problema 3B.

Sean el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$

- a) Calcular la ecuación de un plano π' paralelo al plano π y que esté a una distancia de $2\sqrt{3}$ unidades de la recta r . ¿Es único ese plano? Justificar la respuesta.
(1,5 puntos)
- b) Calcular la ecuación de un plano π'' perpendicular al plano π y que pasa por los puntos $P(1,0,1)$ y $Q(0,1,0)$.
(1 punto)

APARTADO 4: (elegir UN problema)**Problema 4A.**

El tamaño de las truchas que hay en el río Tormes, entre el pantano de Santa Teresa y su paso por Fresno Alhándiga, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 28 cm y desviación típica de 6 cm.

- a) Calcular el porcentaje de truchas cuyo tamaño está entre 19 cm y 40 cm.
(1,5 puntos)
- b) Sabiendo que una de las truchas capturadas medía más de 38 cm, ¿cuál es la probabilidad de que midiera más de 42 cm?
(1 punto)

Problema 4B.

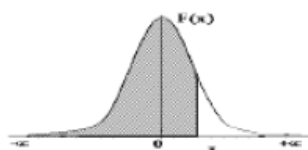
Un grupo de WhatsApp, formado por los alumnos de un gimnasio de judo, está compuesto por un 55% de mujeres y el resto hombres. Se sabe que el 15% del grupo es cinturón verde y que una quinta parte de las mujeres es cinturón verde.

- a) ¿Qué porcentaje de hombres son cinturón verde?
(1 punto)
- b) Si el grupo recibe un mensaje enviado por un cinturón verde, calcular la probabilidad de que lo haya enviado una mujer.
(0,75 puntos)
- c) Si el mensaje no tiene información sobre el sexo y el color del cinturón del remitente, calcular la probabilidad de que sea hombre y cinturón verde.
(0,75 puntos)

	Pruebas de Acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO N.º Páginas: 3
---	---	-----------------------	--

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES**Problema 1.**

a) Dado $k \in \mathbb{R}$, se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} kx - y - z = 1 \\ x + ky + 2kz = k \end{cases}$$

Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ y resolverlo para $k = -1$. **(1,5 puntos)**

b) Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 = I + 3A$, donde I denota la matriz identidad. Demostrar que el determinante de A no es cero y expresar A^{-1} en función de A y de I . **(1 punto)**

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ 1 & k & 2k \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} k & -1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 2k & k \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de A . Si quitamos la tercera columna $\rightarrow \begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2 + 1 \neq 0$. Este

menor de orden 2 tiene determinante no nulo. El rango de A es 2 independientemente del valor de k .

El rango de la matriz ampliada A/B también es 2. Los dos rangos son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) para cualquier valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

Resolvemos el sistema para $k = -1$.

$$\begin{cases} -x - y - z = 1 \\ x - y - 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y - z = 1 \\ x - 2z + 1 = y \end{cases} \Rightarrow -x - x + 2z - 1 - z = 1 \Rightarrow -2x + z = 2 \Rightarrow z = 2 + 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = x - 2(2 + 2x) + 1 = x - 4 - 4x + 1 = -3 - 3x \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 - 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

Para $k = -1$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 - 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$.

b) Se cumple $A^2 = I + 3A$.

$$A^2 = I + 3A \Rightarrow A^2 - 3A = I \Rightarrow A(A - 3I) = I$$

Como se cumple que $A(A - 3I) = I$ entonces la inversa de la matriz A es $A - 3I$.

Si aplicamos los determinantes a la igualdad tenemos:

$$|A(A - 3I)| = |I| \Rightarrow |A||A - 3I| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$$

Problema 2A.

Sea la función $f(x) = 12x + 3x^2 - 2x^3$.

a) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y su recta tangente en el punto $x = 1$.
(1,5 puntos)

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{xf'(x)}$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano.
(1 punto)

a) Hallamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 12 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^3 = 13 \\ f'(x) &= 12 + 6x - 6x^2 \rightarrow f'(1) = 12 + 6 \cdot 1 - 6 \cdot 1^2 = 12 \\ y - f(1) &= f'(1)(x - 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 13 = 12(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = 12x + 1}$$

Hallamos los puntos de corte de la función con la recta tangente $y = 12x + 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 12x + 3x^2 - 2x^3 \\ y &= 12x + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12x + 3x^2 - 2x^3 = 12x + 1 \Rightarrow -2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$

$$\begin{array}{r} -2 \quad 3 \quad 0 \quad -1 \\ 1 \downarrow \\ \hline -2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ 1 \downarrow \\ \hline -2 \quad -1 \quad 0 \end{array} \Rightarrow -2x^3 + 3x^2 - 1 = (x-1)(x-1)(-2x-1)$$

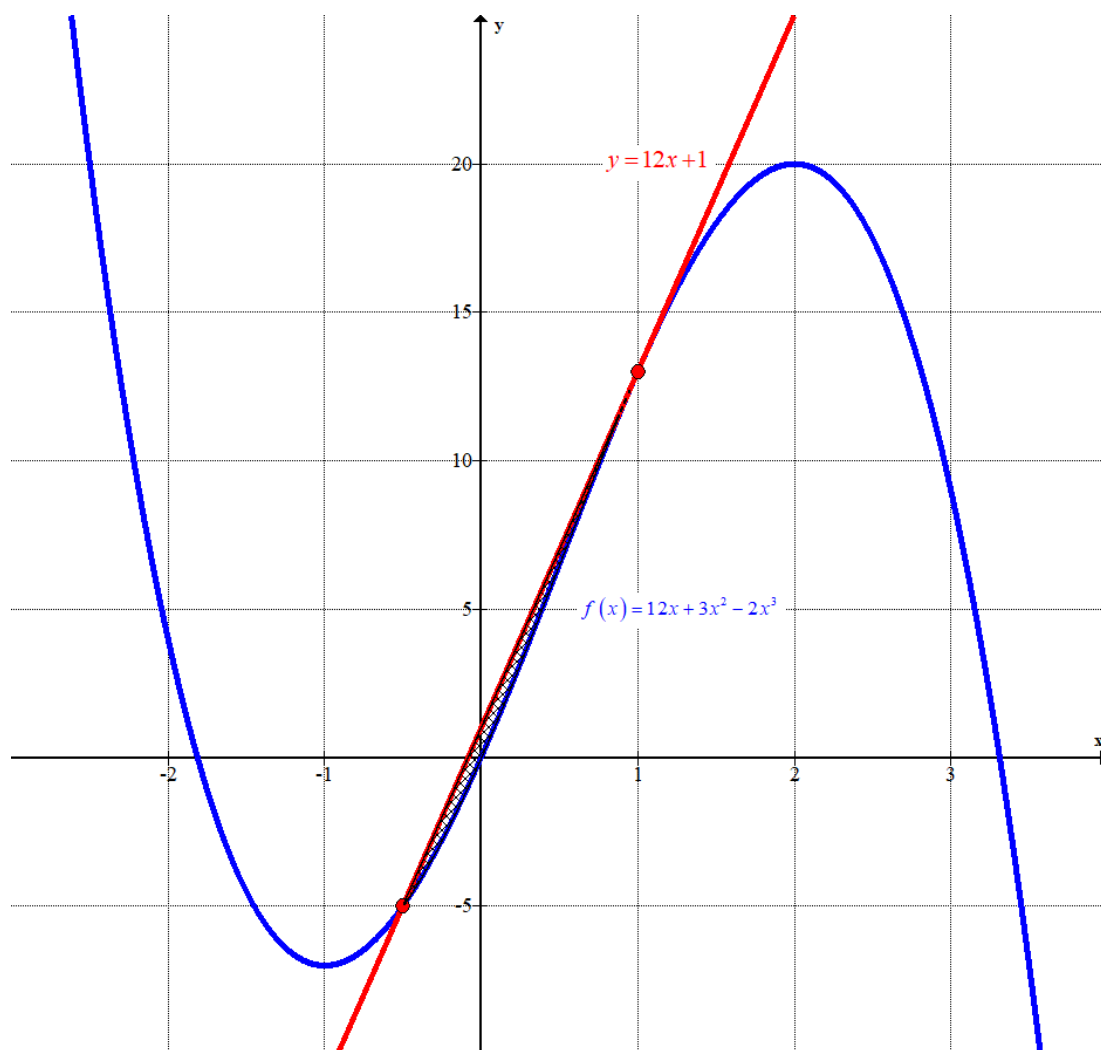
$$-2x - 1 = 0 \Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

La recta tangente corta la gráfica de la función en dos puntos $x = 1$ y $x = -\frac{1}{2}$.

Calculamos la integral definida entre -0.5 y 1 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned} \int_{-0.5}^1 f(x) - (12x + 1) dx &= \int_{-0.5}^1 12x + 3x^2 - 2x^3 - 12x - 1 dx = \int_{-0.5}^1 3x^2 - 2x^3 - 1 dx = \\ &= \left[x^3 - \frac{2x^4}{4} - x \right]_{-0.5}^1 = \left[x^3 - \frac{x^4}{2} - x \right]_{-0.5}^1 = \left[1^3 - \frac{1^4}{2} - 1 \right] - \left[(-0.5)^3 - \frac{(-0.5)^4}{2} + 0.5 \right] = \\ &= 1 - 0.5 - 1 + 0.125 + 0.03125 - 0.5 = \frac{-27}{32} = -0.84375 \end{aligned}$$

El área tiene un valor de $\frac{27}{32} = 0.84375$ unidades cuadradas.



b) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{xf(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x(12x+3x^2-2x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{12x^2+3x^3-2x^4} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{24x+9x^2-8x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(24x+9x^2-8x^3)(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(24+9x-8x^2)(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(24+9x-8x^2)(1+x^2)} = \frac{2}{24 \cdot 1} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

Problema 2B.

Se considera la función $f(x) = x^2 e^{-x}$.

- a) Determinar su dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas. **(1,5 puntos)**
- b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$. **(1 punto)**

- a) El dominio de la función es $\mathbb{R}$, pues es producto y composición de funciones continuas (exponencial y polinómica).

Asíntotas verticales. $x = a$

No existen, pues el dominio lo forman todos los números reales.

Asíntota horizontal. $y = b$

Cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

La función tiene la recta $y = 0$ como asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Cuando x tiende a $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = (-\infty)^2 e^{+\infty} = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Cuando x tiende a $+\infty$ la función tiene asíntota horizontal y no tiene asíntota oblicua.

Cuando x tiende a $-\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = (-\infty) e^{+\infty} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

La función no tiene asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$.

Resumiendo: La función no tiene asíntotas verticales ni oblicuas. Solo la recta $y = 0$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = x^2 e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 2x e^{-x} + x^2 (-1) e^{-x} = e^{-x} (2x - x^2) = x(2 - x) e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(2 - x) e^{-x} = 0 \Rightarrow \{e^{-x} \neq 0\} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2 - x = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

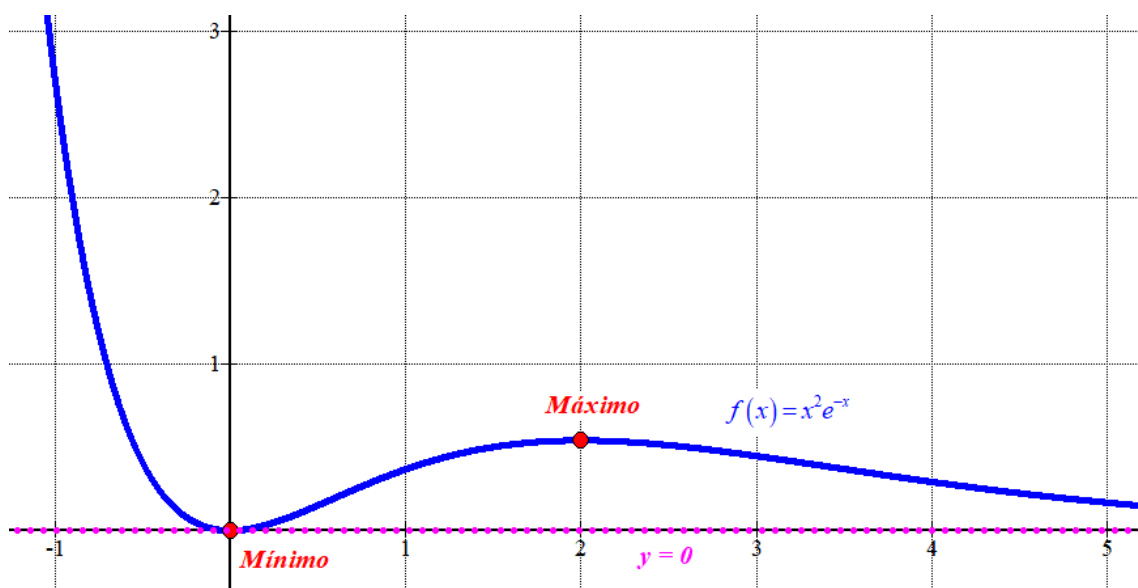
- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = (-1)(2+1)e^1 = -3e < 0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 1(2-1)e^{-1} = \frac{1}{e} > 0$. La función crece en $(0, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = 3(2-3)e^{-3} = \frac{-3}{e^3} < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(0, 2)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = 2$.

Como $f(0) = 0^2 e^0 = 0$ las coordenadas del mínimo relativo son $(0, 0)$.

Como $f(2) = 2^2 e^{-2} = \frac{4}{e^2}$ las coordenadas del máximo relativo son $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$.



b) Hallamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 e^{-x} \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 e^{-x} = 0 \Rightarrow \{e^{-x} \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

El punto de corte es uno de los extremos de la región. Como la función es positiva cuando $x > 0$ entonces el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 2]$ es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 2.

Calculamos primero la integral indefinida de la función.

$$\int f(x) dx = \int x^2 e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x^2 \rightarrow du = 2x dx \\ e^{-x} dx = dv \rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{array} \right\} = -x^2 e^{-x} - \int -2x e^{-x} dx =$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ e^{-x} dx = dv \rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{array} \right\} = -x^2 e^{-x} + 2 \left[-x e^{-x} - \int -e^{-x} dx \right] =$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} = -e^{-x} (x^2 + 2x + 2) + K$$

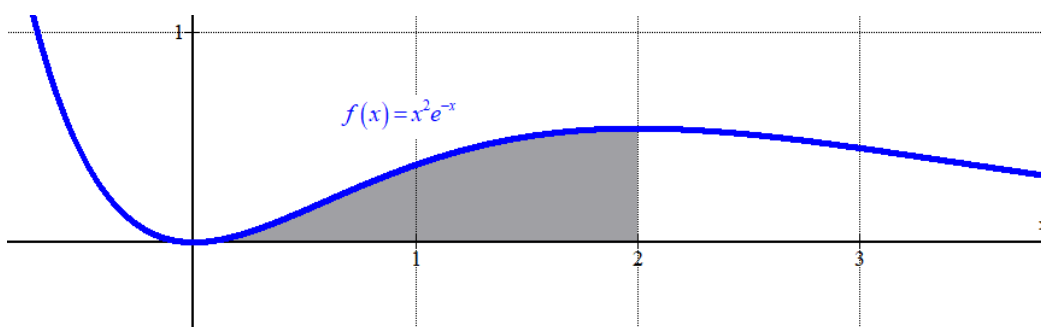
Calculamos el área pedida.

$$\text{Área} = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 x^2 e^{-x} dx = \left[-e^{-x} (x^2 + 2x + 2) \right]_0^2 =$$

$$= \left[-e^{-2} (2^2 + 2 \cdot 2 + 2) \right] - \left[-e^{-0} (0^2 + 2 \cdot 0 + 2) \right] = -10e^{-2} + 2 = \boxed{2 - \frac{10}{e^2} \approx 0.6466 \text{ u}^2}$$

El área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$ tiene un valor de $2 - \frac{10}{e^2} \approx 0.6466$ unidades cuadradas.

Dibujamos la gráfica y la región del plano de la cual hemos calculado el área.



Problema 3A.

Sean el plano $\pi \equiv 5x + my + z = 2$ y la recta $r \equiv (x, y, z) = (1, 1, 0) + t(-1, -1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

- a) Determinar la posición relativa de r y π en función de m . **(1,5 puntos)**
 b) Para $m = 1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π . **(1 punto)**

a) Obtenemos un vector director y un punto de la recta, y un vector normal del plano.

$$\pi \equiv 5x + my + z = 2 \Rightarrow \vec{n} = (5, m, 1)$$

$$r \equiv (x, y, z) = (1, 1, 0) + t(-1, -1, 2), t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1, 1, 0) \\ \vec{v}_r = (-1, -1, 2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 1 - \alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 2\alpha \end{cases}$$

Averiguamos cuando el vector normal del plano y el director de la recta son perpendiculares.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-1, -1, 2) \\ \vec{n} = (5, m, 1) \\ \vec{v}_r \perp \vec{n} \rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (-1, -1, 2)(5, m, 1) = 0 \Rightarrow -5 - m + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{-3 = m}$$

Para $m = -3$ el producto escalar es nulo y la recta y el plano son paralelos o coincidentes. Averiguamos si para $m = -3$ el punto $P_r(1, 1, 0)$ de la recta pertenece el plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 5x - 3y + z = 2 \\ \text{¿} P_r(1, 1, 0) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 5 - 3 + 0 = 2? \Rightarrow \text{¡SIIII!}$$

Para $m = -3$ la recta está contenida en el plano.

Para $m \neq -3$ el producto escalar es distinto de cero. La recta corta el plano en un único punto.

b) Para $m = 1$ la recta corta al plano π en un punto.

El plano π' que contiene a r y es perpendicular a π tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector normal del plano π . Además, el punto $P_r(1, 1, 0)$ pertenece al plano π' .

$$\pi \equiv 5x + y + z = 2 \Rightarrow \vec{n} = (5, 1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, 1, 0) \in \pi' \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (-1, -1, 2) \\ \vec{v} = \vec{n} = (5, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 1 + 10y - 10 - z + 5z + y - 1 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': -3x + 11y + 4z - 8 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi': -3x + 11y + 4z - 8 = 0$.

Problema 3B.

Sean el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$

- a) Calcular la ecuación de un plano π' paralelo al plano π y que esté a una distancia de $2\sqrt{3}$ unidades de la recta r . ¿Es único ese plano? Justificar la respuesta. **(1,5 puntos)**
 b) Calcular la ecuación de un plano π'' perpendicular al plano π y que pasa por los puntos $P(1,0,1)$ y $Q(0,1,0)$. **(1 punto)**

a) La ecuación de un plano π' paralelo al plano $\pi \equiv x + y - z - 2 = 0$ es $\pi' \equiv x + y - z + D = 0$.

El plano π' tiene como vector normal el vector $\vec{n}' = (1, 1, -1)$. Este vector es perpendicular al vector $\vec{v}_r = (-3, 2, -1)$ por lo que la recta es paralela al plano o está contenida en él.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-3, 2, -1) \\ \vec{n}' = (1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}' = (-3, 2, -1)(1, 1, -1) = -3 + 2 + 1 = 0$$

Determinamos la expresión de la distancia del plano π' a la recta r .

Como la recta es paralela al plano esta distancia es el valor de la distancia del punto $P_r(1, 0, 2)$ de la recta al plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, 0, 2) \\ \pi' \equiv x + y - z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi') = d(P_r, \pi') = \frac{|1 + 0 - 2 + D|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|D - 1|}{\sqrt{3}}$$

Buscamos el valor de D para que la distancia del plano π' a la recta r sea de $2\sqrt{3}$ unidades.

$$d(r, \pi') = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{|D - 1|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow |D - 1| = 6 \Rightarrow \begin{cases} D - 1 = 6 \rightarrow \boxed{D = 7} \\ D - 1 = -6 \rightarrow \boxed{D = -5} \end{cases}$$

Existen dos planos que cumplen lo pedido: $\pi_1' \equiv x + y - z + 7 = 0$ y $\pi_2' \equiv x + y - z - 5 = 0$.

- b) El plano π'' perpendicular al plano π y que pasa por los puntos $P(1,0,1)$ y $Q(0,1,0)$ tiene como vectores directores el vector normal del plano $\vec{n} = (1, 1, -1)$ y el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{PQ} = (0, 1, 0) - (1, 0, 1) = (-1, 1, -1) \\ Q(0, 1, 0) \in \pi'' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi'': \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + y - 1 + z + z + y - 1 + x = 0 \Rightarrow 2y + 2z - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi'': y + z - 1 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi'': y + z - 1 = 0$.

Problema 4A.

El tamaño de las truchas que hay en el río Tormes, entre el pantano de Santa Teresa y su paso por Fresno Alhándiga, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 28 cm y desviación típica de 6 cm.

- a) Calcular el porcentaje de truchas cuyo tamaño está entre 19 cm y 40 cm. **(1,5 puntos)**
 b) Sabiendo que una de las truchas capturadas medía más de 38 cm, ¿cuál es la probabilidad de que midiera más de 42 cm? **(1 punto)**

Sea X = El tamaño en centímetros de las truchas que hay en el río Tormes, entre el pantano de Santa Teresa y su paso por Fresno Alhándiga. $X = N(28, 6)$.

- a) Calculamos la probabilidad de que una trucha tenga un tamaño entre 19 y 40 cm.

$$\begin{aligned}
 P(19 \leq X \leq 40) &= \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(\frac{19-28}{6} \leq Z \leq \frac{40-28}{6}\right) = P(-1.5 \leq Z \leq 2) = \\
 &= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1.5) = P(Z \leq 2) - P(Z \geq 1.5) = P(Z \leq 2) - [1 - P(Z \leq 1.5)] = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9772 - 1 + 0.9332 = \boxed{0.9104}
 \end{aligned}$$

	0,90	0,91
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5039	0,5079
0,2	0,5078	0,5118
0,3	0,5117	0,5157
0,4	0,5156	0,5196
0,5	0,5195	0,5235
0,6	0,5234	0,5274
0,7	0,5273	0,5313
0,8	0,5312	0,5352
0,9	0,5351	0,5391
1,0	0,5390	0,5430
1,1	0,5429	0,5469
1,2	0,5468	0,5508
1,3	0,5507	0,5547
1,4	0,5546	0,5586
1,5	0,5585	0,5625
1,6	0,5624	0,5664
1,7	0,5663	0,5703
1,8	0,5702	0,5742
1,9	0,5741	0,5781
2,0	0,5780	0,5820

El porcentaje de truchas cuyo tamaño está entre 19 cm y 40 cm es del 91.04%.

- b) Debemos calcular $P((X > 42) / (X > 38))$.

$$P((X > 42) / (X > 38)) = \frac{P((X > 42) \cap (X > 38))}{P(X > 38)} = \frac{P(X > 42)}{P(X > 38)} =$$

$$= \frac{1 - P(X \leq 42)}{1 - P(X \leq 38)} = \{ \text{Tipificamos} \} = \frac{1 - P\left(Z \leq \frac{42 - 28}{6}\right)}{1 - P\left(Z \leq \frac{38 - 28}{6}\right)} = \frac{1 - P(Z \leq 2.33)}{1 - P(Z \leq 1.67)} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \frac{1 - 0.9901}{1 - 0.9525} \approx \boxed{0.2084}$$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932

La probabilidad de que una trucha que mide más de 38 cm midiera más de 42 cm vale 0.2084.

Problema 4B.

Un grupo de WhatsApp, formado por los alumnos de un gimnasio de judo, está compuesto por un 55% de mujeres y el resto hombres. Se sabe que el 15% del grupo es cinturón verde y que una quinta parte de las mujeres es cinturón verde.

- a) ¿Qué porcentaje de hombres son cinturón verde? **(1 punto)**
 b) Si el grupo recibe un mensaje enviado por un cinturón verde, calcular la probabilidad de que lo haya enviado una mujer. **(0,75 puntos)**
 c) Si el mensaje no tiene información sobre el sexo y el color del cinturón del remitente, calcular la probabilidad de que sea hombre y cinturón verde. **(0,75 puntos)**

Realizamos una tabla de contingencia.

	Cinturón verde	No cinturón verde	TOTALES
Hombres			
Mujeres	$55/5 = 11$		55
TOTALES	15		100

Completamos la tabla.

	Cinturón verde	No cinturón verde	TOTALES
Hombres	4	41	45
Mujeres	11	44	55
TOTALES	15	85	100

- a) El 45% del grupo son hombres y de estos el 4% del grupo son hombres con cinturón verde. Entonces $\frac{4}{45} \approx 0.0889$, es decir, el 8.89% de los hombres son cinturón verde.
- b) En el grupo hay un 15% de sus componentes que son cinturón verde y de estos el 11% son mujeres con cinturón verde. La probabilidad de que un mensaje enviado por un cinturón verde lo haya enviado una mujer tiene un valor de $\frac{11}{85} \approx 0.1294$.
- c) Solo un 4% del grupo es hombre con cinturón verde. La probabilidad de que el remitente de un mensaje sea hombre y cinturón verde es de 0.04.