

	Pruebas de Acceso a la Universidad Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 2
---	---	-----------------------	--

INDICACIONES

- 1. OPTATIVIDAD:** El examen consta de cuatro apartados: un apartado con un problema obligatorio y 3 apartados con la posibilidad de elegir entre dos problemas. Se deberá responder a un máximo de **CUATRO PROBLEMAS**: el problema obligatorio (apartado 2) y solamente un problema de cada uno de los tres apartados restantes. No es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciados, pero se expresará claramente cuáles son los elegidos. En caso de responder a dos problemas de un mismo apartado, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego y que no aparezca totalmente tachado.
- 2. CALCULADORA:** Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones ni cálculo matricial, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.
- 3. CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:** Cada uno de los problemas se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.
- 4. DEDUCCIONES POR ERRORES ORTOGRÁFICOS Y GRAMATICALES:** Se penalizarán los errores ortográficos (grafías, tildes y puntuación) cometidos, hasta un máximo de un punto en la nota global del examen, teniéndose en cuenta que la repetición del mismo error se contabilizará como sólo uno, los dos primeros errores no se penalizarán y, a partir del tercer error ortográfico, se deducirá 0,1 puntos por error. Por errores en la redacción, en la presentación, incoherencia o incorrección léxica o gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto de la nota global.
- 5.** El examen debe realizarse usando **bolígrafo azul o negro** (sólo un color). No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.

APARTADO 1: (elegir UN problema)

Problema 1A. (Propuesto en Extremadura, Modelo 0 de 2025)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mx + 2y + z = 1 \\ 2x + my + z = m \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases} \text{ donde } m \in \mathbb{R}$$

- Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro m , indicando el número de soluciones en cada caso. **(1,5 puntos)**
- Resolver, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $m = 3$. **(1 punto)**

Problema 1B.

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$,

- a) Calcular la matriz $M = A^t A - B B^t$, donde A^t y B^t representan las matrices transpuestas de A y B , respectivamente. (1 punto)
- b) Hallar la matriz X que cumple la igualdad $XN = C$. (1,5 puntos)

APARTADO 2: (obligatorio)**Problema 2.**

Se considera la función $f(x) = 2xe^{-2x^2}$.

- a) Determinar su dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas. (1,5 puntos)
- b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$. (1 punto)

APARTADO 3: (elegir UN problema)**Problema 3A.**

Sean las rectas $r \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv x-1 = \frac{y-m}{m-1} = \frac{z-3}{3}$.

- a) Comprobar que las rectas r y s se cortan para cualquier valor de m . (1,5 puntos)
- b) Para $m = 6$ hallar el punto de intersección de las rectas r y s . (1 punto)

Problema 3B.

Se considera el vector $\vec{u} = (3, -1, 5)$.

- a) Determinar a para que el vector $\vec{t} = (1, a, 0)$ sea perpendicular a $\vec{u}$. (0,75 puntos)
- b) Determinar un vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u} = (3, -1, 5)$ y $\vec{v} = (2, 6, 0)$. (0,75 puntos)
- c) Dados $\vec{u} = (3, -1, 5)$, $\vec{v} = (2, 6, 0)$ y $\vec{w} = (-3, 1, 2)$. Determinar el volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. (1 punto)

APARTADO 4: (elegir UN problema)**Problema 4A.**

Se sabe que la probabilidad de que un autobús de línea regular entre Madrid y Burgos sufra un accidente en día nublado es 0,09 y en día seco 0,005. Durante un periodo de 10 días ha habido 7 días secos y 3 nublados. Sabiendo que se ha producido un accidente en esos días, se pide:

- a) Hallar la probabilidad de que fuera en día nublado. (1,25 puntos)
- b) Hallar la probabilidad de que fuera en día seco. (1,25 puntos)

Problema 4B.

De una urna que contiene cuatro bolas rojas y dos azules, extraemos una bola y, sin devolverla a la urna, extraemos otra a continuación.

- a) Hallar la probabilidad de que sean de distinto color. (0,75 puntos)
- b) Hallar la probabilidad de que la segunda bola sea azul. (0,75 puntos)
- c) Si la segunda bola es azul, hallar la probabilidad de que la primera sea roja. (1 punto)

SOLUCIONES**Problema 1A. (Propuesto en Extremadura, Modelo 0 de 2025)**

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mx + 2y + z = 1 \\ 2x + my + z = m \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases} \text{ donde } m \in \mathbb{R}$$

a) Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro m , indicando el número de soluciones en cada caso. **(1,5 puntos)**

b) Resolver, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $m = 3$. **(1 punto)**

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 & m \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = m^2 + 10 + 4 - 5m - 4 - 2m = m^2 - 7m + 10$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 = 0 \Rightarrow m = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = 5 = m \\ \frac{7-3}{2} = 2 = m \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $m \neq 5$ y $m \neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $m = 5$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B

usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 10 \quad 25 \quad 5 \quad 25 \\ -10 \quad -4 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 21 \quad 3 \quad 23 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 5 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \\ -5 \quad -2 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ 0 \quad 21 \quad 3 \quad 23 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $m = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B

usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a - 5 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 10 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \\ -10 \quad -10 \quad -5 \quad -5 \\ \hline 0 \quad -6 \quad -3 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ \text{Fila } 3^a \leftrightarrow \text{Fila } 2^a \} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ 0 \quad -6 \quad -3 \quad -3 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $m \neq 5$ y $m \neq 2$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución), si $m = 5$ el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones) y si $m = 2$ el sistema es **incompatible** (sin solución).

b) Para $m = 3$ el sistema es compatible determinado (caso 1). Lo resolvemos.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ 5 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \\ -3 \quad -2 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 2x = 0 \rightarrow \boxed{x = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 2y + z = 1 \\ 0 + 3y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 - 2y \\ 3y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y + 1 - 2y = 3 \Rightarrow \boxed{y = 2} \Rightarrow \boxed{z = 1 - 2 \cdot 2 = -3}$$

Para $m = 3$ la solución del sistema es $x = 0$, $y = 2$, $z = -3$.

Problema 1B.

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$,

a) Calcular la matriz $M = A^t A - BB^t$, donde A^t y B^t representan las matrices transpuestas de A y B , respectivamente. **(1 punto)**

b) Hallar la matriz X que cumple la igualdad $XN = C$. **(1,5 puntos)**

a) Calculamos la matriz M .

$$M = A^t A - BB^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$XN = C \Rightarrow X = CN^{-1}$$

Hallamos la matriz inversa de N .

$$|N| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 \neq 0$$

$$N^{-1} = \frac{\text{Adj}(N^T)}{|N|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X .

$$X = CN^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 & 2+2 \\ 1+2 & -2-2 \\ -2+4 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{2 \quad \cdot \quad 2} \times 2 \longrightarrow 3 \times 2$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 2.

Se considera la función $f(x) = 2xe^{-2x^2}$.

a) Determinar su dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas. **(1,5 puntos)**

b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$. **(1 punto)**

a) El dominio de la función es $\mathbb{R}$, pues es producto y composición de funciones continuas (exponencial y producto).

Asíntotas verticales. $x = a$

No existen, pues el dominio lo forman todos los números reales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{2x^2}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4xe^{2x^2}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{e^{2x^2}} = \frac{-\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{4xe^{2x^2}} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = 2xe^{-2x^2} \Rightarrow f'(x) = 2e^{-2x^2} + 2x \cdot (-4x)e^{-2x^2} = 2e^{-2x^2} - 8x^2e^{-2x^2} = 2(1 - 4x^2)e^{-2x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(1 - 4x^2)e^{-2x^2} = 0 \Rightarrow \left\{ e^{-2x^2} \neq 0 \right\} \Rightarrow 1 - 4x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\pm 1}{2}$$

La función presenta dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = 2\left(1 - 4(-1)^2\right)e^{-2(-1)^2} = -6e^{-2} = -\frac{6}{e^2} < 0. \text{ La función decrece en } \left(-\infty, \frac{-1}{2}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = 2(1 - 4 \cdot 0^2)e^{-2 \cdot 0^2} = 2 > 0. \text{ La función crece en } \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

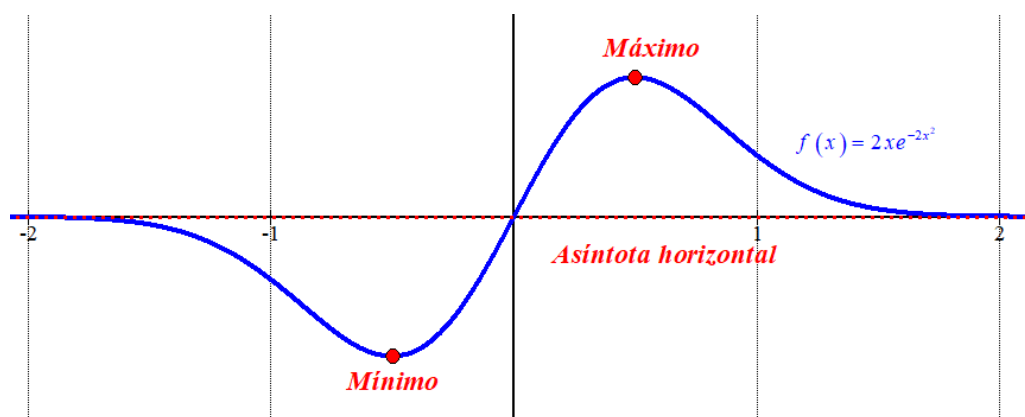
$$f'(1) = 2(1 - 4 \cdot 1^2)e^{-2 \cdot 1^2} = -6e^{-2} = -\frac{6}{e^2} < 0. \text{ La función decrece en } \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

La función decrece en $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y crece en $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = \frac{-1}{2}$ y un máximo relativo en $x = \frac{1}{2}$.

Como $f\left(\frac{-1}{2}\right) = 2\left(\frac{-1}{2}\right)e^{-2\left(\frac{-1}{2}\right)^2} = -e^{-1/2} = \frac{-1}{\sqrt{e}} = \frac{-\sqrt{e}}{e}$ las coordenadas del mínimo relativo son $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{e}}{e}\right)$.

Como $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2}e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)^2} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e}$ las coordenadas del máximo relativo son $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$.



b) Hallamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas.

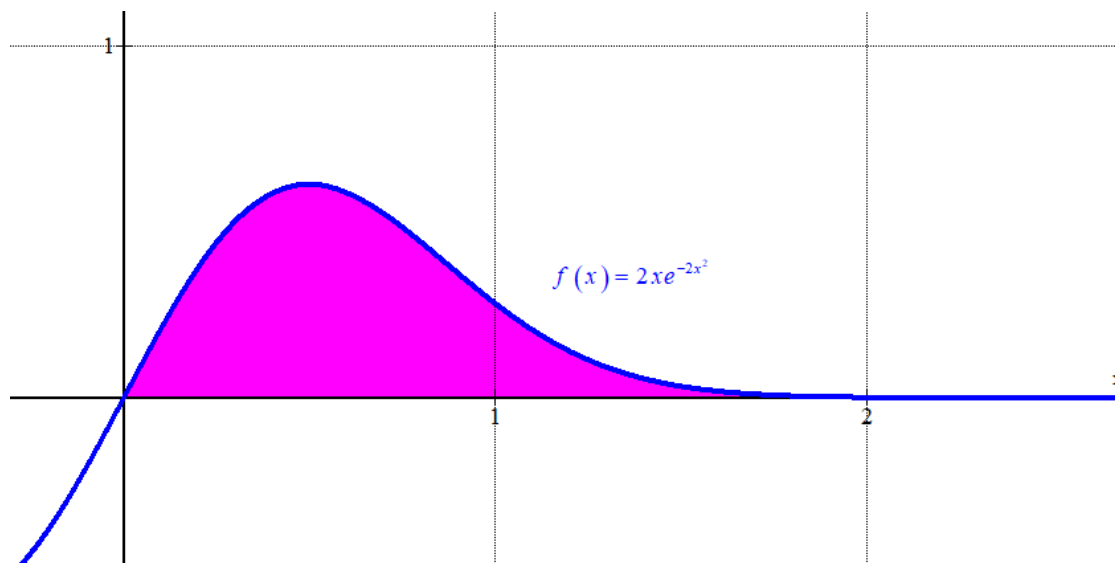
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 2xe^{-2x^2} \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2xe^{-2x^2} = 0 \Rightarrow \{e^{-2x^2} \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

El punto de corte es uno de los extremos de la región. Como la función es positiva cuando $x > 0$ entonces el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 2]$ es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 2.

$$\text{Área} = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 2xe^{-2x^2} dx = 2 \int_0^2 xe^{-2x^2} dx = \frac{2}{-4} \int_0^2 -4xe^{-2x^2} dx =$$

$$= \left[\frac{-1}{2} e^{-2x^2} \right]_0^2 = \left[\frac{-1}{2} e^{-2 \cdot 2^2} \right] - \left[\frac{-1}{2} e^{-2 \cdot 0^2} \right] = \boxed{\frac{-1}{2e^8} + \frac{1}{2} \approx 0.4998 \text{ u}^2}$$

El área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$ tiene un valor de $\frac{-1}{2e^8} + \frac{1}{2} \approx 0.4998$ unidades cuadradas. En el dibujo se aprecia la bondad de la solución.



Problema 3A.

Sean las rectas $r \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv x-1 = \frac{y-m}{m-1} = \frac{z-3}{3}$.

- a) Comprobar que las rectas r y s se cortan para cualquier valor de m . **(1,5 puntos)**
 b) Para $m = 6$ hallar el punto de intersección de las rectas r y s . **(1 punto)**

a) Obtenemos un vector director y un punto de cada recta así como sus ecuaciones paramétricas.

$$r \equiv \frac{x-0}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-0}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0,1,0) \\ \vec{u}_r = (4,-2,2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1-2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-m}{m-1} = \frac{z-3}{3} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(1,m,3) \\ \vec{v}_s = (1,m-1,3) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = m+(m-1)\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 3+3\alpha \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (4,-2,2) \\ \vec{v}_s = (1,m-1,3) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{1} \neq \frac{2}{m-1} \neq \frac{2}{3}$$

Las rectas se cortan o cruzan.

Para que se corten debe ser nulo el producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}]$. Lo comprobamos.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0,1,0) \\ Q_s(1,m,3) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (1,m,3) - (0,1,0) = (1,m-1,3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (4,-2,2) \\ \vec{v}_s = (1,m-1,3) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (1,m-1,3) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & m-1 & 3 \\ 1 & m-1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 12(\cancel{m-1}) - 6 + 2(\cancel{m-1}) - 2(\cancel{m-1}) + 6 - 12(\cancel{m-1}) = 0$$

El producto mixto es nulo y las rectas se cortan para cualquier valor de m .

- b) Para $m = 6$ las rectas quedan $r \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv x-1 = \frac{y-6}{5} = \frac{z-3}{3}$.

Planteamos un sistema formado por sus ecuaciones paramétricas y al resolverlo obtendremos el punto A de intersección entre ellas.

$$\begin{aligned}
 r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda = 1 + \alpha \\ 1 - 2\lambda = 6 + 5\alpha \\ 2\lambda = 3 + 3\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda - 1 = \alpha \\ -2\lambda = 5 + 5\alpha \\ 2\lambda = 3 + 3\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\lambda = 5 + 5(4\lambda - 1) \\ 2\lambda = 3 + 3(4\lambda - 1) \end{cases} \Rightarrow \\
 s: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 6 + 5\alpha \\ z = 3 + 3\alpha \end{cases} & \\
 \Rightarrow \begin{cases} -2\lambda = 5 + 20\lambda - 5 \\ 2\lambda = 3 + 12\lambda - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -22\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \\ -9\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(0,1,0)}
 \end{aligned}$$

Para $m=6$ el punto de intersección de las dos rectas es $A(0,1,0)$.

Problema 3B.

Se considera el vector $\vec{u} = (3, -1, 5)$.

- a) Determinar a para que el vector $\vec{t} = (1, a, 0)$ sea perpendicular a $\vec{u}$. **(0,75 puntos)**
- b) Determinar un vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u} = (3, -1, 5)$ y $\vec{v} = (2, 6, 0)$. **(0,75 puntos)**
- c) Dados $\vec{u} = (3, -1, 5)$, $\vec{v} = (2, 6, 0)$ y $\vec{w} = (-3, 1, 2)$. Determinar el volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. **(1 punto)**

a) Para que dos vectores sean perpendiculares su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (3, -1, 5) \\ \vec{t} = (1, a, 0) \\ \vec{u} \perp \vec{t} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{t} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (3, -1, 5)(1, a, 0) = 0 \Rightarrow 3 - a + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

Para que sean perpendiculares debe ser $a = 3$.

b) Un vector perpendicular a dos vectores es el producto vectorial de los dos vectores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (3, -1, 5) \\ \vec{v} = (2, 6, 0) \\ \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 30i - 2k - 18k - 10j = 30i - 10j - 20k = (30, -10, -20)$$

Un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ puede ser $\vec{w}_1 = \vec{u} \times \vec{v} = (30, -10, -20)$ o bien

$$\vec{w}_2 = \frac{1}{10} \vec{u} \times \vec{v} = (3, -1, -2).$$

c) El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

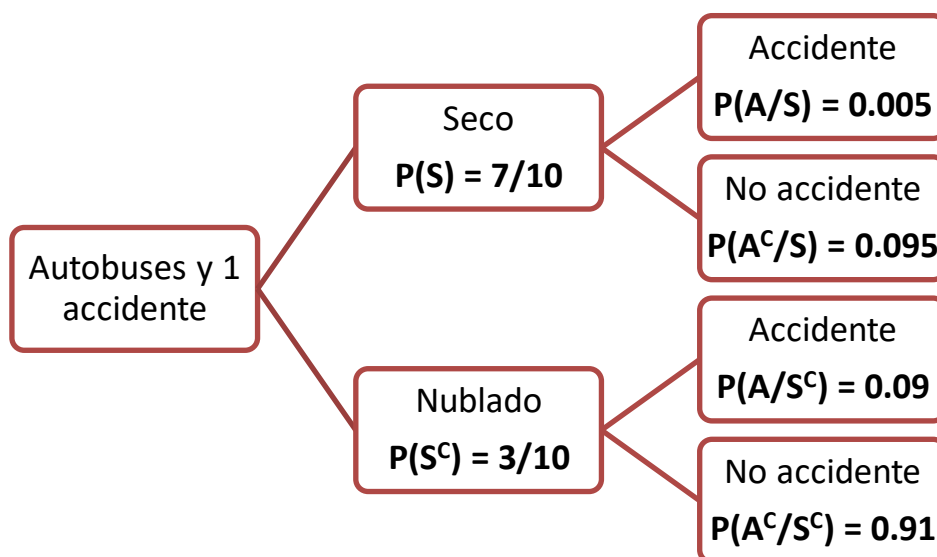
$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (3, -1, 5) \\ \vec{v} = (2, 6, 0) \\ \vec{w} = (-3, 1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Volumen} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 36 - 0 + 10 + 90 + 4 - 0 = \boxed{140 \text{ u}^3}$$

Problema 4A.

Se sabe que la probabilidad de que un autobús de línea regular entre Madrid y Burgos sufra un accidente en día nublado es 0,09 y en día seco 0,005. Durante un periodo de 10 días ha habido 7 días secos y 3 nublados. Sabiendo que se ha producido un accidente en esos días, se pide:

- a) Hallar la probabilidad de que fuera en día nublado. **(1,25 puntos)**
 b) Hallar la probabilidad de que fuera en día seco. **(1,25 puntos)**

Realizamos un diagrama de árbol. Llamamos S al suceso “Día seco” y S^c a “Día nublado”, también llamamos A al suceso “sufrir un accidente”.



- a) Nos piden calcular $P(S^c / A)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(S^c / A) &= \frac{P(S^c \cap A)}{P(A)} = \frac{P(S^c)P(A/S^c)}{P(S)P(A/S) + P(S^c)P(A/S^c)} = \\
 &= \frac{\frac{3}{10} \cdot 0.09}{\frac{7}{10} \cdot 0.005 + \frac{3}{10} \cdot 0.09} = \boxed{\frac{54}{61} \approx 0.8852}
 \end{aligned}$$

- b) Nos piden hallar $P(S / A)$. Este suceso es el contrario del anterior.

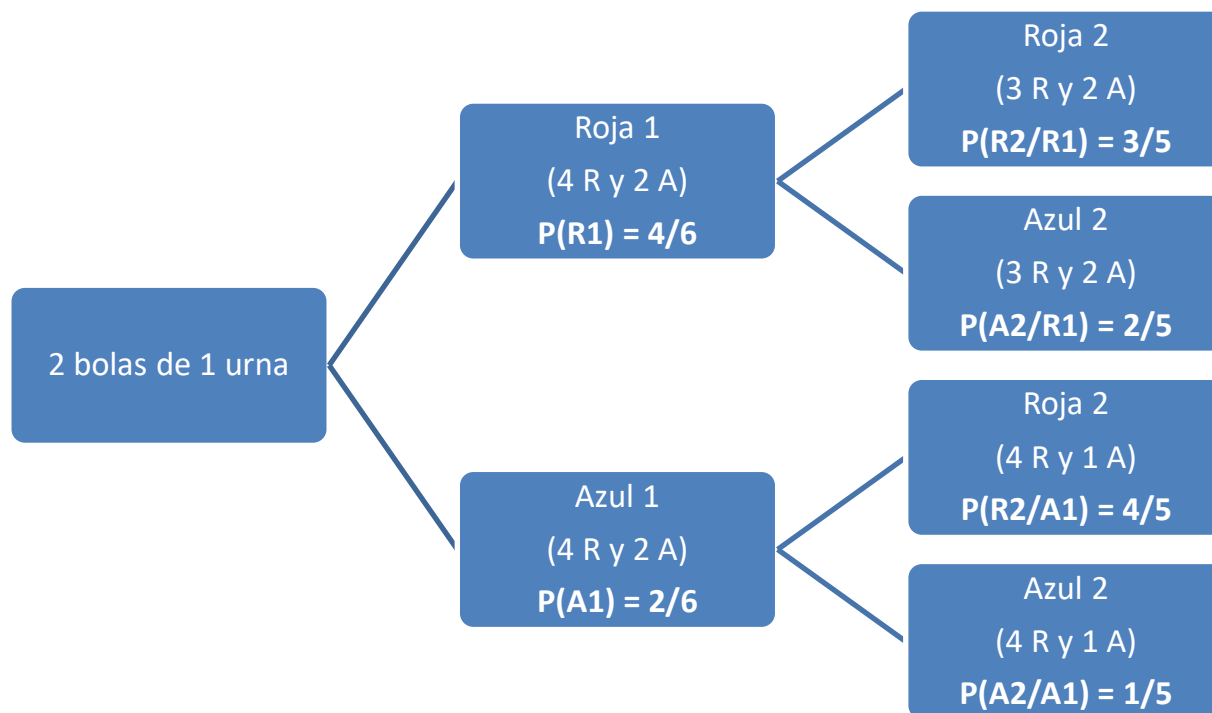
$$P(S / A) = 1 - P(S^c / A) = 1 - \frac{54}{61} = \boxed{\frac{7}{61} \approx 0.1148}$$

Problema 4B.

De una urna que contiene cuatro bolas rojas y dos azules, extraemos una bola y, sin devolverla a la urna, extraemos otra a continuación.

- a) Hallar la probabilidad de que sean de distinto color. **(0,75 puntos)**
 b) Hallar la probabilidad de que la segunda bola sea azul. **(0,75 puntos)**
 c) Si la segunda bola es azul, hallar la probabilidad de que la primera sea roja. **(1 punto)**

Para entender mejor lo que ocurre en este experimento compuesto realizamos un diagrama de árbol.



- a) Si miramos el diagrama de árbol este suceso ocurre cuando sacas Roja 1 y luego Azul 2 o bien Azul 1 y luego Roja 2. El suceso del que queremos hallar la probabilidad es el suceso $(R1 \cap A2) \cup (A1 \cap R2)$.

$$\begin{aligned}
 P((R1 \cap A2) \cup (A1 \cap R2)) &= P(R1 \cap A2) + P(A1 \cap R2) = \\
 &= P(R1)P(A2/R1) + P(A1)P(R2/A1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \boxed{\frac{8}{15} \approx 0.5333}
 \end{aligned}$$

- b) Nos piden calcular $P(A2)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A2) = P(R1)P(A2/R1) + P(A1)P(A2/A1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \boxed{\frac{1}{3} \approx 0.3333}$$

- c) Nos piden determinar el valor de $P(R1/A2)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R1/A2) = \frac{P(R1 \cap A2)}{P(A2)} = \frac{\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{4}{5} = 0.8}$$