

Prueba de Acceso a la Universidad
Curso 2024/2025



Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los ejercicios 2, 3 y 4 deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). **Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos.** Duración de la prueba: 90 minutos.

EJERCICIO 1. La concentración de virus activos en una muestra de sangre (en un tiempo t desde que se tomó la muestra) se puede modelizar como una función $f(t) = 5(t+1)e^{-t}$, con $t \geq 0$.

a) **[1,25 puntos]** La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(t)$ mide cómo cambia la concentración de virus activos. Calcula el tiempo en el que este cambio toma el valor más pequeño posible, es decir, el tiempo t en el que el valor de la derivada de $f(t)$ es mínimo.

b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál sería el valor de la concentración de virus a largo plazo? Es decir, el valor cuando el tiempo tiende a infinito: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

EJERCICIO 2. Elige y resuelve solo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Sean las rectas $r_1 \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ y $r_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

a.1) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación de la recta, r_3 , cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 y que pasa por el punto $A(0,0,0)$.

a.2) **[1,25 puntos]** Calcula la distancia de la recta r_2 al punto $B(-1,-1,2)$.

Apartado b) Sea la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv x - y + 3z = 0$.

b.1) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π .

b.2) **[1,25 puntos]** Calcula el ángulo entre la recta r y el plano π teniendo en cuenta que se cortan en el punto $A(0,0,0)$.

EJERCICIO 3. Elige y resuelve solo uno de los dos apartados siguientes.

Apartado a) Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + a \cdot z = 1 \\ x - 2z = a \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

a.1) **[1'5 puntos]** Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a , e identifica el número de soluciones en cada caso.

a.2) **[1 punto]** Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Apartado b) Sea el sistema de ecuaciones $A \cdot X - B = X$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, tal que $m \in \mathbb{R}$, y

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Además, la matriz X es de dimensión 2×2 .

b.1) **[1,5 puntos]** ¿Para qué valores del parámetro m el sistema anterior tiene solución única?

b.2) **[1 punto]** Para $m = 1$, resuelve el sistema y obtén el valor de X .

EJERCICIO 4. Elige y resuelve solo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Una baraja española está compuesta de 40 cartas, entre las que hay 4 ases. En un juego de azar dos jugadores compiten entre sí. El primer jugador baraja las cartas y las va sacando una a una hasta que encuentra un as. A continuación, el otro jugador vuelve a juntar todas las cartas y repite estos pasos (es decir, vuelve a barajar y va sacando cartas hasta encontrar un as). Gana el jugador que más cartas haya sacado (contando el as). Si ambos sacan el mismo número de cartas, entonces se produce un empate.

- a.1) **[1,5 puntos]** Calcula las probabilidades de que el as salga al sacar 1, 2 y 3 cartas, respectivamente.
- a.2) **[1 punto]** Si el primer jugador ha sacado dos cartas (contando el as), ¿cuál es la probabilidad de que el segundo jugador le gane?

Apartado b) Una empresa produce aparatos para medir distancias. Durante el proceso de calibración realiza una serie de experimentos para medir la distancia entre dos puntos, que están separados 1.5 metros entre sí. Debido al error de los aparatos, se sabe que los valores medidos siguen una distribución normal de media 1.5 m y varianza 0.64 m^2 .

- b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la medición del aparato sea de más de 2.1 m?
- b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de la que medición del aparato sea superior a 0.9 m?
- b.3) **[1 punto]** ¿Cuál es el valor de la distancia tal que el 80.51% de las mediciones estarían por encima de él?

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177

SOLUCIONES

EJERCICIO 1. La concentración de virus activos en una muestra de sangre (en un tiempo t desde que se tomó la muestra) se puede modelizar como una función $f(t) = 5(t+1)e^{-t}$, con $t \geq 0$.

a) **[1,25 puntos]** La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(t)$ mide cómo cambia la concentración de virus activos. Calcula el tiempo en el que este cambio toma el valor más pequeño posible, es decir, el tiempo t en el que el valor de la derivada de $f(t)$ es mínimo.

b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál sería el valor de la concentración de virus a largo plazo? Es decir, el valor cuando el tiempo tiende a infinito: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

a) Considero la función $g(t) = f'(t)$. Obtenemos la expresión de $g(t)$.

$$g(t) = f'(t) = 5e^{-t} + 5(t+1)(-1)e^{-t} = 5e^{-t} + (-5t-5)e^{-t} = -5te^{-t}$$

Buscamos cuando se anula la derivada de $g(t) = -5te^{-t}$.

$$g(t) = -5te^{-t} \Rightarrow g'(t) = -5e^{-t} - 5t(-1)e^{-t} = -5e^{-t} + 5te^{-t} = 5(t-1)e^{-t}$$

$$g'(t) = 0 \Rightarrow 5(t-1)e^{-t} = 0 \Rightarrow \{e^{-t} \neq 0\} \Rightarrow t-1 = 0 \Rightarrow \boxed{t=1}$$

La función $g(t)$ tiene un punto crítico en $t=1$. Vemos el signo de la derivada segunda para este valor.

$$g'(t) = 5(t-1)e^{-t} \Rightarrow g''(t) = 5e^{-t} + 5(t-1)(-1)e^{-t} = 5e^{-t}(1-t+1) = 5(2-t)e^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g''(1) = 5(2-1)e^{-1} = \frac{5}{e} > 0$$

Como la derivada segunda es positiva la función $g(t)$ tiene un mínimo relativo para $t=1$. La derivada de $f(t)$ tiene un mínimo para $t=1$.

b) Calculamos el límite de la función cuando el tiempo tiende a infinito.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 5(t+1)e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5t+5}{e^t} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5}{e^t} = \frac{5}{+\infty} = \boxed{0}$$

El valor de la concentración de virus a largo plazo es 0. El virus desaparece con el paso del tiempo.

EJERCICIO 2. Elige y resuelve solo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Sean las rectas $r_1 \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ y $r_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

a.1) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación de la recta, r_3 , cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 y que pasa por el punto $A(0,0,0)$.

a.2) **[1,25 puntos]** Calcula la distancia de la recta r_2 al punto $B(-1,-1,2)$.

a.1) Hallamos un vector y un punto de cada una de las rectas.

$$r_1 \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow \begin{cases} P_1(-2,1,-1) \\ \vec{u}_1 = (1,-1,1) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} Q_2(1,1,1) \\ \vec{v}_2 = (2,1,-1) \end{cases}$$

Un vector perpendicular a las rectas r_1 y r_2 es el producto vectorial de sus vectores directores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1,-1,1) \\ \vec{v}_2 = (2,1,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = i + 2j + k + 2k + j - i = 3j + 3k = (0,3,3)$$

Consideramos como vector director de la recta r_3 a $\vec{w}_3 = \frac{1}{3}\vec{u}_1 \times \vec{v}_2 = \frac{1}{3}(0,3,3) = (0,1,1)$.

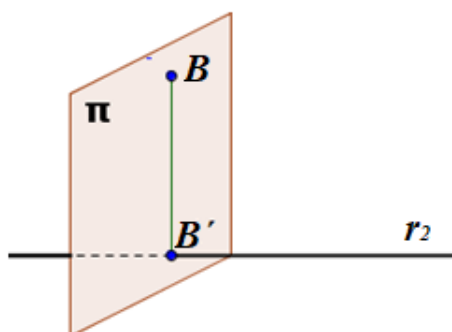
Hallamos la ecuación de la recta que pasa por $A(0,0,0)$ y tiene como vector director $\vec{w}_3 = (0,1,1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_3 = (0,1,1) \\ A(0,0,0) \in r_3 \end{array} \right\} \Rightarrow r_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$$

La ecuación de la recta, r_3 , cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de

las rectas r_1 y r_2 y que pasa por el punto $A(0,0,0)$ es $r_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$.

a.2) Hacemos un dibujo explicativo de los pasos que vamos a realizar para obtener el valor de la distancia. También se podría obtener con una fórmula, pero prefiero realizarlo de forma visual.



Hallamos la proyección ortogonal del punto B en la recta r_2 . Para ello hallamos el punto B' perteneciente a la recta tal que el vector $\overrightarrow{BB'}$ sea ortogonal al vector director de la recta $\overrightarrow{v_2} = (2, 1, -1)$.

$$r_2 : \begin{cases} Q_2(1, 1, 1) \\ \overrightarrow{v_2} = (2, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow B'(1 + 2t, 1 + t, 1 - t)$$

$B' \in r_2$

$$\overrightarrow{BB'} = (1 + 2t, 1 + t, 1 - t) - (-1, -1, 2) = (2 + 2t, 2 + t, -1 - t)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{v_2} = (2, 1, -1) \\ \overrightarrow{BB'} = (2 + 2t, 2 + t, -1 - t) \\ \overrightarrow{v_2} \perp \overrightarrow{BB'} \rightarrow \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{BB'} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (2, 1, -1)(2 + 2t, 2 + t, -1 - t) = 0 \Rightarrow$$

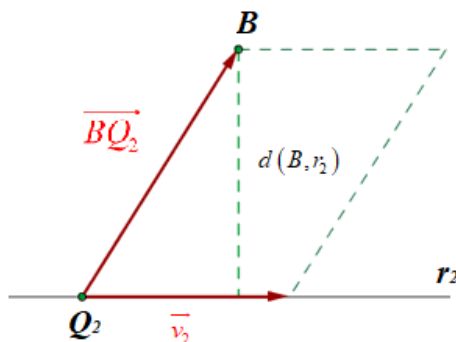
$$\Rightarrow 4 + 4t + 2 + t + 1 - t = 0 \Rightarrow 6t = -7 \Rightarrow t = -\frac{7}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{14}{6} = -\frac{8}{6} \\ y = 1 - \frac{7}{6} = -\frac{1}{6} \\ z = 1 + \frac{7}{6} = \frac{13}{6} \end{cases} \Rightarrow B'\left(-\frac{8}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{13}{6}\right)$$

La distancia del punto B a la recta r_2 es la distancia del punto B al punto B', es decir, el módulo del vector $\overrightarrow{BB'}$.

$$\overrightarrow{BB'} = \left(-\frac{8}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{13}{6}\right) - (-1, -1, 2) = \left(-\frac{2}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

$$d(B, r_2) = d(B, B') = |\overrightarrow{BB'}| = \sqrt{\left(-\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{6} \approx 0.91 \text{ unidades}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER el apartado a.2)



El punto $Q_2(1,1,1)$ pertenece a la recta r_2 . Hallamos las coordenadas del vector $\overrightarrow{Q_2B}$.

$$\overrightarrow{Q_2B} = (-1, -1, 2) - (1, 1, 1) = (-2, -2, 1)$$

La distancia del punto B a la recta r_2 es el valor de $\frac{|\overrightarrow{Q_2B} \times \vec{v}_2|}{|\vec{v}_2|}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_2 = (2, 1, -1) \\ \overrightarrow{Q_2B} = (-2, -2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{Q_2B} \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = i + 2k = (1, 0, 2)$$

$$d(B, r_2) = \frac{|\overrightarrow{Q_2B} \times \vec{v}_2|}{|\vec{v}_2|} = \frac{\sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{30}}{6} \text{ unidades}}$$

Apartado b) Sea la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv x - y + 3z = 0$.

b.1) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π .

b.2) **[1,25 puntos]** Calcula el ángulo entre la recta r y el plano π teniendo en cuenta que se cortan en el punto $A(0,0,0)$.

b.1) El plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector normal del plano π .

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases}$$

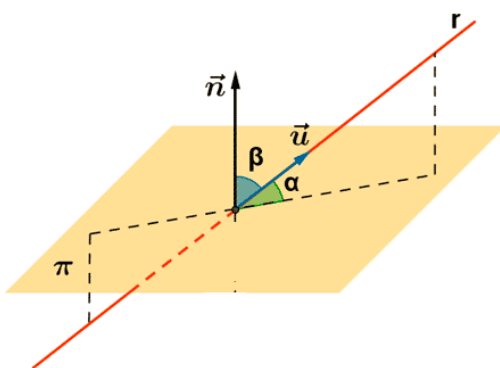
$$\pi \equiv x - y + 3z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -1, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{v} = \vec{n} = (1, -1, 3) \\ P_r(0, 0, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x + 2y - z + z - 3y + 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x - y = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x + y = 0}$$

La ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π es $\pi': x + y = 0$.

b.2) Hallamos el ángulo entre el vector normal del plano y el vector director de la recta.



$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{n} = (1, -1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{v}_r, \vec{n}) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{n}}{|\vec{v}_r| |\vec{n}|} = \frac{(1, -1, 2)(1, -1, 3)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} =$$

$$= \frac{1+1+6}{\sqrt{6}\sqrt{11}} = \frac{8}{\sqrt{66}} = \frac{4\sqrt{66}}{33} \Rightarrow (\vec{v}_r, \vec{n}) = \cos^{-1}\left(\frac{4\sqrt{66}}{33}\right) \approx 10^\circ$$

El ángulo que forman recta y plano es aproximadamente de $90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$.

EJERCICIO 3. Elige y resuelve solo uno de los dos apartados siguientes.

Apartado a) Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + a \cdot z = 1 \\ x - 2z = a \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

a.1) [1'5 puntos] Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a , e identifica el número de soluciones en cada caso.

a.2) [1 punto] Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

a.1) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 & a \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 4 + a - 0 - 1 + 2 = a - 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

Distinguimos dos casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 3$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de A/B e igual al número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $a = 3$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - 2 \cdot \text{Fila 1}^a \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ -2 \quad -2 \quad -6 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -5 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a \\ 1 \quad 0 \quad -2 \quad 3 \\ -1 \quad -1 \quad -3 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -5 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad -5 \quad 1 \\ 0 \quad 1 \quad 5 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{}^{A/B} & & \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ & \underbrace{}_A & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el **sistema es incompatible** (sin solución)

Resumiendo: Si $a \neq 3$ el sistema es compatible determinado (1 única solución) y si $a = 3$ el sistema es incompatible (0 soluciones).

a.2) Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado (apartado anterior). Hallamos su solución.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x = 2z \rightarrow z = \frac{x}{2} \Rightarrow 2x + 1 - x + \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow 4x + 2 - 2x + x = 6 \Rightarrow \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow \boxed{x = \frac{4}{3}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}} \\ \boxed{z = \frac{4/3}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}} \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = \frac{4}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{2}{3}$.

Apartado b) Sea el sistema de ecuaciones $A \cdot X - B = X$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, tal que $m \in \mathbb{R}$, y

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Además, la matriz X es de dimensión 2×2 .

b.1) **[1,5 puntos]** ¿Para qué valores del parámetro m el sistema anterior tiene solución única?

b.2) **[1 punto]** Para $m = 1$, resuelve el sistema y obtén el valor de X .

b.1) Despejamos la matriz X en la ecuación matricial.

$$A \cdot X - B = X \Rightarrow AX - X = B \Rightarrow (A - I)X = B \Rightarrow X = (A - I)^{-1} B$$

Hemos supuesto que la matriz $A - I$ tiene inversa.

Obtenemos la expresión de la matriz $A - I$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando la matriz $A - I$ tiene inversa. Para ello su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A - I| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} = m-1-1 = m-2$$

$$|A - I| = 0 \Rightarrow m-2 = 0 \Rightarrow \boxed{m=2}$$

Para cualquier valor de m distinto de 2 la matriz $A - I$ tiene inversa y la solución del sistema de ecuaciones es única, siendo la solución $X = (A - I)^{-1} B$.

b.2) Según lo visto en el apartado anterior, para $m = 1$ el sistema tiene solución única. Hallamos la inversa de la matriz $A - I$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - I| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-1 = -1 \neq 0$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A - I)^T)}{|A - I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la solución del sistema.

$$X = (A - I)^{-1} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

EJERCICIO 4. Elige y resuelve solo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Una baraja española está compuesta de 40 cartas, entre las que hay 4 ases. En un juego de azar dos jugadores compiten entre sí. El primer jugador baraja las cartas y las va sacando una a una hasta que encuentra un as. A continuación, el otro jugador vuelve a juntar todas las cartas y repite estos pasos (es decir, vuelve a barajar y va sacando cartas hasta encontrar un as). Gana el jugador que más cartas haya sacado (contando el as). Si ambos sacan el mismo número de cartas, entonces se produce un empate.

a.1) **[1,5 puntos]** Calcula las probabilidades de que el as salga al sacar 1, 2 y 3 cartas, respectivamente.

a.2) **[1 punto]** Si el primer jugador ha sacado dos cartas (contando el as), ¿cuál es la probabilidad de que el segundo jugador le gane?

a.1) De 40 cartas solo hay 4 ases, la probabilidad de sacar un as en la primera carta vale $\frac{4}{40} = 0.1$

Para sacar el as en la segunda extracción no debe salir en la primera extracción y se sacaría cualquiera de las restantes 36 cartas, la probabilidad de no sacar as en la primera carta es $36/40$ y luego cuando quedan 39 cartas en el mazo como tiene 4 ases la probabilidad es $4/39$. La probabilidad de sacar as en la segunda extracción vale $\frac{36}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{6}{65} \approx 0.0923$.

Para sacar el as en la tercera extracción no debe salir en la primera extracción, la probabilidad es $36/40$, tampoco debe salir en la segunda, la probabilidad es $35/39$ y debe salir en la tercera, la probabilidad es $4/38$. La probabilidad de sacar as en la tercera extracción es el producto de estas tres probabilidades: $\frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} \cdot \frac{4}{38} = \frac{21}{247} \approx 0.085$.

a.2) El segundo jugador para ganar debe sacar 3 cartas o más. El suceso contrario de sacar 3 cartas o más es el suceso “sacar 1 o 2 cartas”.

La probabilidad de que gane el segundo jugador vale $1 - 0.1 - \frac{6}{65} = \frac{21}{26} \approx 0.8077$.

Apartado b) Una empresa produce aparatos para medir distancias. Durante el proceso de calibración realiza una serie de experimentos para medir la distancia entre dos puntos, que están separados 1.5 metros entre sí. Debido al error de los aparatos, se sabe que los valores medidos siguen una distribución normal de media 1.5 m y varianza 0.64 m^2 .

b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la medición del aparato sea de más de 2.1 m?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de la que medición del aparato sea superior a 0.9 m?

b.3) **[1 punto]** ¿Cuál es el valor de la distancia tal que el 80.51% de las mediciones estarían por encima de él?

X = El valor medido de la distancia entre dos puntos. Como la varianza vale 0.64 m^2 la desviación típica vale $\sqrt{0.64} = 0.8$ metros. $X = N(1.5, 0.8)$

b.1) Debemos calcular $P(X > 2.1)$.

$$P(X > 2.1) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{2.1-1.5}{0.8}\right) = P(Z > 0.75) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.75) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.7734 = \boxed{0.2266}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734

b.2) Debemos calcular $P(X > 0.9)$.

$$P(X > 0.9) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{0.9-1.5}{0.8}\right) = P(Z > -0.75) =$$

$$= P(Z \leq 0.75) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.7734}$$

b.3) Debemos hallar “d” tal que $P(X > d) = 0.8051$. Como el porcentaje es mayor de 0.5 la distancia “d” debe ser menor que la media 1.5.

$$P(X > d) = 0.8051 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{d-1.5}{0.8}\right) = 0.8051 \Rightarrow \left\{ \frac{d-1.5}{0.8} < 0 \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < -\frac{d-1.5}{0.8}\right) = 0.8051 \Rightarrow -\frac{d-1.5}{0.8} = 0.86 \Rightarrow -d + 1.5 = 0.688 \Rightarrow \boxed{d = 0.812}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051

Para una distancia de 0.812 m el 80.51% de las mediciones estarían por encima de ella.