

## Matemáticas II

### INDICACIONES

- Para obtener la máxima calificación, se debe responder a una cuestión de cada apartado/bloque.
- En aquellos apartados/bloques en los que se ofrece la posibilidad de elegir entre varias tareas, se debe responder solo a una de las opciones. Si se realiza más de una opción, se corregirá la primera de ellas, según el orden en que aparecen resueltas en el cuadernillo del examen.
- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

### APARTADO 1 (Bloque A+D) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes cuestiones (1A o 1B):

**Cuestión 1A.** Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+3 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R}, \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

**Tarea a. [1 punto].** Halla los valores del parámetro  $a$  para los cuales la matriz  $A$  tiene inversa.

**Tarea b. [1 punto].** Considera  $a = -3$ . Calcula, si es posible, la matriz inversa de  $A$ .

**Tarea c. [0,5 puntos].** Considera  $a = -3$ . Halla, si es posible, la matriz  $X$  que satisface la siguiente ecuación matricial:  $AX = B$ .

**Cuestión 1B.** Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ (a^2 - 2)y + 2z = -2 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

dependiente del parámetro  $a \in \mathbb{R}$ .

**Tarea a. [1,5 puntos].** Halla los valores de  $a$  para los cuales el sistema es compatible.

**Tarea b. [1 punto].** Considera  $a = 0$ . Si el sistema es compatible, halla su solución general.

### APARTADO 2 (Bloque B) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes cuestiones (2A o 2B)

**Cuestión 2A.** Considera la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & \text{si } x \neq 2 \\ e^k & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

con  $k \in \mathbb{R}$  un parámetro a determinar.

**Tarea a. [0,75 puntos].** Determina el valor del parámetro  $k$  para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 2$ .

**Tarea b. [1 punto].** Si existen, halla las asíntotas de  $f(x)$  y especifica de qué tipo son.

**Tarea c. [0,75 puntos].** Obtén la ecuación de la recta tangente a  $f(x)$  en  $x = 1$ .

**Cuestión 2B.** Considera la siguiente función:  $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$

**Tarea a. [0,5 puntos].** Halla los puntos de corte de  $f(x)$  con el eje de abscisas OX y los puntos de corte de  $f(x)$  con el eje de ordenadas OY.

**Tarea b. [1 punto].** Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$ .

**Tarea c. [1 punto].** Calcula el área comprendida entre la curva  $y = f(x)$ , el eje OX y las rectas  $x = -2$  y  $x = 1$ .

### APARTADO 3 (Bloque C) [2.5 PUNTOS]

Considera la recta  $r: \begin{cases} 2x - y = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$  y el punto  $P = (1, 1, 1)$ .

**Tarea a. [1 punto].** Determina los puntos de  $r$  que están a una distancia de  $\sqrt{14}$  unidades de  $P$ .

**Tarea b. [0,75 puntos].** Obtén la ecuación del plano que contiene a  $r$  y  $P$ .

**Tarea c. [0,75 puntos].** Calcula la distancia entre  $r$  y  $P$ ,

### APARTADO 4 (Bloque E) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes cuestiones (4A o 4B)

**Cuestión 4A.** En un colegio se ofrecen solo atletismo y baloncesto como actividades deportivas extraescolares. En base a los datos de otros años, los docentes determinan que la probabilidad de que un alumno se matricule en atletismo es  $P(A) = 0,40$  y que la probabilidad de que un estudiante se matricule en baloncesto es  $P(B) = 0,65$ . Además, solo un 10% del alumnado no se matricula en ningún deporte.

**Tarea a. [1 punto].** Calcula la probabilidad de que un alumno se matricule en los dos deportes.

**Tarea b. [1,5 puntos].** Calcula las siguientes probabilidades:  $P(A/B)$ ,  $P(B/A)$  y  $P(A/B^c)$  donde  $B^c$  representa el suceso contrario a  $B$ .

**Cuestión 4B.** Solo dos sedes de una empresa fabrican el mismo modelo de aspiradora. La sede A suministra el 60 % de la producción total. Un 0,15 % de las aspiradoras fabricadas en la sede A y un 0,1 % de las aspiradoras fabricadas en la sede B falla durante el primer año.

**Tarea a. [0,75 puntos].** Calcula la probabilidad de que una aspiradora fabricada en la sede B no falle durante el primer año.

**Tarea b. [0,75 puntos].** Calcula la probabilidad de que una aspiradora elegida al azar falle durante el primer año.

**Tarea c. [1 punto].** Si una aspiradora elegida al azar no falla durante el primer año, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada en la sede A.

## SOLUCIONES

### APARTADO 1 (Bloque A+D) [2.5 PUNTOS]

**Cuestión 1A.** Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+3 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R}, \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

**Tarea a. [1 punto].** Halla los valores del parámetro  $a$  para los cuales la matriz  $A$  tiene inversa.

**Tarea b. [1 punto].** Considera  $a = -3$ . Calcula, si es posible, la matriz inversa de  $A$ .

**Tarea c. [0,5 puntos].** Considera  $a = -3$ . Halla, si es posible, la matriz  $X$  que satisface la siguiente ecuación matricial:  $AX = B$ .

**Tarea a.** Para que la matriz tenga inversa su determinante no debe ser nulo. Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz  $A$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+3 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)(a+3)(a+1) + 1 + 1 - (a+3) - (a+1) - (a+1) =$$

$$= (a+1)(a+3)(a+1) + 1 + 1 - a - 3 - a - 1 - a - 1 = (a+1)(a+3)(a+1) - 3a - 3 =$$

$$= (a+1)(a+3)(a+1) - 3(a+1) = [(a+1)(a+3) - 3](a+1) =$$

$$= [a^2 + 3a + a + 3 - 3](a+1) = [a^2 + 4a](a+1) = a(a+4)(a+1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a(a+4)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + 4 = 0 \rightarrow a = -4 \\ a + 1 = 0 \rightarrow a = -1 \end{cases}$$

La matriz  $A$  tiene inversa para cualquier valor de  $a$  distinto de  $-4$ ,  $-1$  y  $0$ .

**Tarea b.** Para  $a = -3$  la matriz inversa de  $A$  existe. La matriz queda  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

Calculamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 1 - 0 + 2 + 2 = 6 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/2 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/6 & 1/2 & -1/6 \end{pmatrix}$$

**Tarea c.** Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Considerando  $a = -3$  la matriz inversa de A existe y vale  $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ .

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1+6+5 & 3+0+3 \\ -3+6+15 & -9+0+9 \\ -1+6-5 & -3+0-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 18 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \longrightarrow 3 \times 2$

**Cuestión 1B.** Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ (a^2 - 2)y + 2z = -2 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

dependiente del parámetro  $a \in \mathbb{R}$ .

**Tarea a. [1,5 puntos].** Halla los valores de  $a$  para los cuales el sistema es compatible.

**Tarea b. [1 punto].** Considera  $a = 0$ . Si el sistema es compatible, halla su solución general.

**Tarea a.** El sistema es compatible cuando el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada son iguales.

El sistema tiene asociado la matriz de coeficientes  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 0 & a^2 - 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y la matriz

ampliada  $A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a^2 - 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 0 & a^2 - 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a(a^2 - 2) - 2 - 0 - (a^2 - 2) - 0 - 0 = a^3 - 2a - 2 - a^2 + 2 =$$

$$= a^3 - a^2 - 2a = a(a^2 - a - 2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a(a^2 - a - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 - a - 2 = 0 \rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = a \\ \frac{1-3}{2} = -1 = a \end{cases} \end{cases}$$

Para cualquier valor de  $a$  distinto de 0, -1 y 2 el determinante de la matriz A es distinto de cero y su rango es 3. Por lo que el rango de la matriz A/B también es 3 e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado.

Para  $a = 0$  el sistema queda  $\begin{cases} y - z = 1 \\ -2y + 2z = -2 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - z = 1 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + z \\ x = z \end{cases}$ .

El sistema es compatible indeterminado.

Para  $a = -1$  el sistema queda  $\begin{cases} -x + y - z = 1 \\ -y + 2z = -2 \\ -x + z = 0 \end{cases}$ .

$$\begin{cases} -x + y - z = 1 \\ -y + 2z = -2 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y - z = 1 \\ 2z + 2 = y \Rightarrow -z + 2z + 2 - z = 1 \Rightarrow 2 = 1 \\ x = z \end{cases}$$

El sistema es incompatible.

Para  $a = 2$  el sistema queda  $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 2y + 2z = -2 \\ -x + z = 0 \end{cases}$ .

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 2y + 2z = -2 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y + z = -1 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y = -1 - z \Rightarrow 2z - 1 - z - z = 1 \Rightarrow -1 = 1 \\ x = z \end{cases}$$

El sistema es incompatible.

**Resumiendo:** El sistema es compatible para cualquier valor de  $a$  distinto de  $-1$  y  $2$ .

**Tarea b.** Considerando  $a = 0$  el sistema queda  $\begin{cases} y - z = 1 \\ -2y + 2z = -2 \\ -x + z = 0 \end{cases}$ . Este sistema se ha resuelto en

el apartado anterior y sus infinitas soluciones tienen la expresión  $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}.$

**APARTADO 2 (Bloque B) [2.5 PUNTOS]**

**Cuestión 2A.** Considera la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & \text{si } x \neq 2 \\ e^k & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

con  $k \in \mathbb{R}$  un parámetro a determinar.

**Tarea a. [0,75 puntos].** Determina el valor del parámetro  $k$  para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 2$ .

**Tarea b. [1 punto].** Si existen, halla las asíntotas de  $f(x)$  y especifica de qué tipo son.

**Tarea c. [0,75 puntos].** Obtén la ecuación de la recta tangente a  $f(x)$  en  $x = 1$ .

**Tarea a.** Para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 2$  el valor de la función y el límite de la función en dicho valor deben coincidir.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = ..$$

$$\begin{array}{l} x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \\ \\ \begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array} \Rightarrow x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) \end{array}$$

$$... = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 + 4}{2 + 2} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = e^k \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \end{array} \right\} \Rightarrow e^k = 3 \Rightarrow \boxed{k = \ln 3}$$

El valor buscado y necesario para que se cumpla lo pedido es  $k = \ln 3$ .

**Tarea b.** La función queda  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ . Esta función es continua en  $x = 2$ , pero

es discontinua en  $x = -2$ , valor que también anula el denominador.

**Asíntota vertical.**  $x = -2$



$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \frac{(-2)^3 - 8}{(-2)^2 - 4} = \frac{-16}{0} = \infty$$

**Asíntota horizontal.**  $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

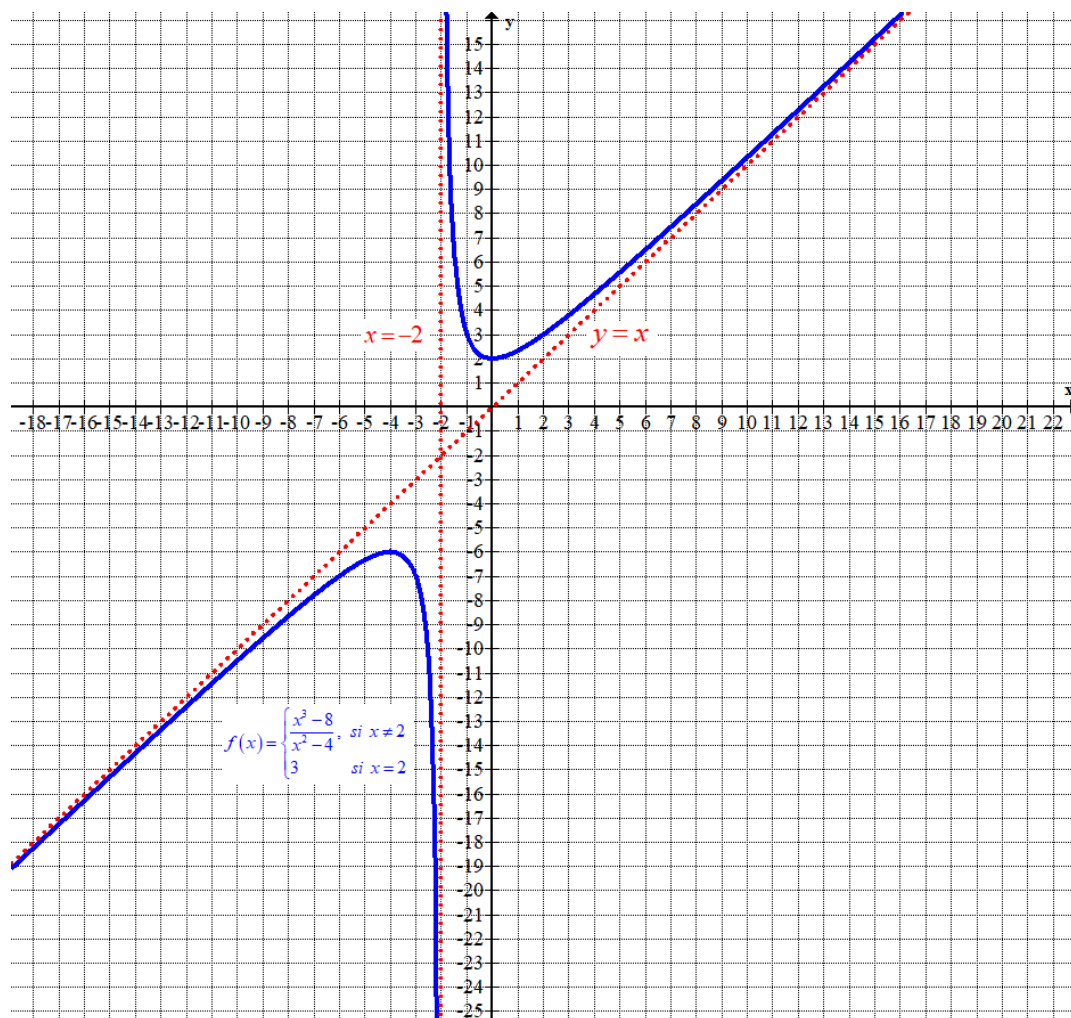
**Asíntota oblicua.**  $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 8 - x^3 - 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8 - 4x}{x^2 - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{x} = \frac{-4}{\infty} = 0$$

La recta  $y = x$  es asíntota oblicua de la función.

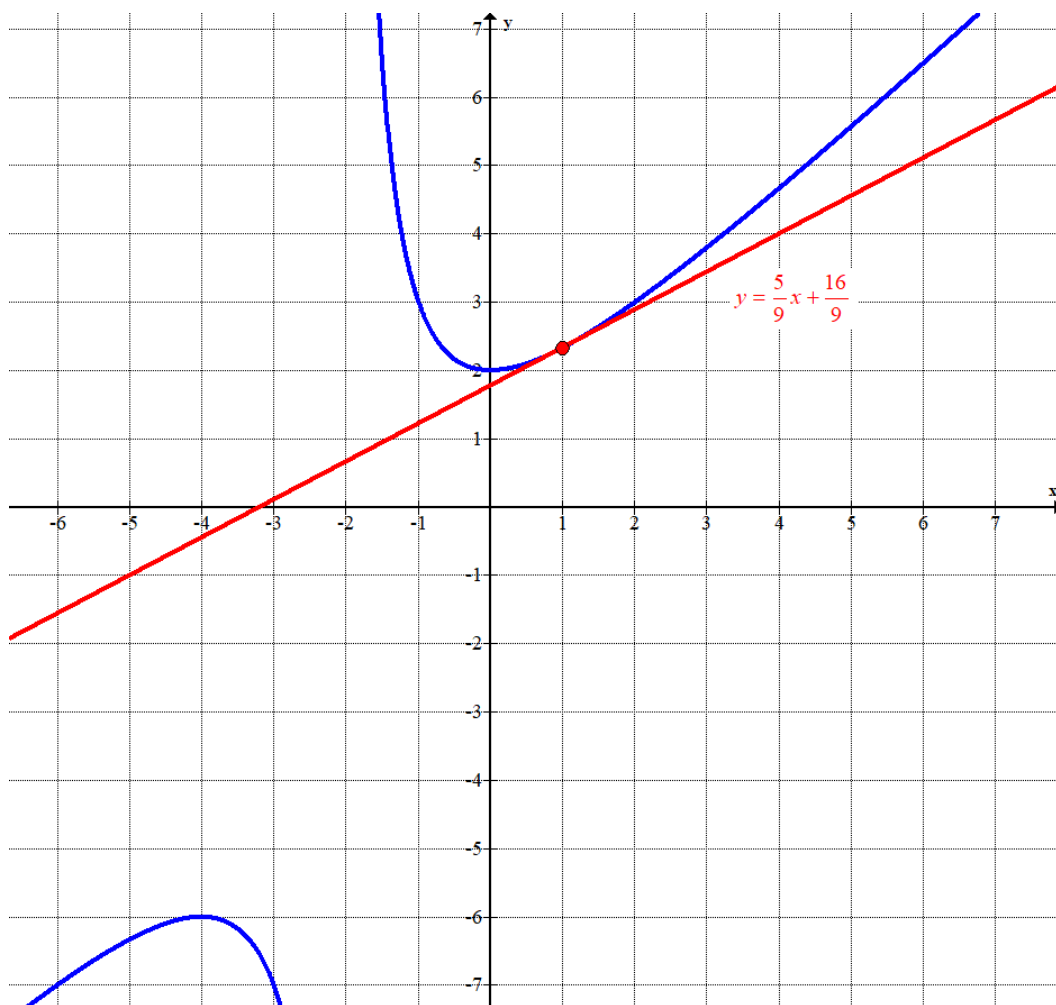


**Tarea c.** La ecuación de la recta tangente a  $f(x)$  en  $x=1$  tiene la expresión  $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ .

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - 2x(x^3-8)}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4 + 16x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2 + 16x}{(x^2-4)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = \frac{1^3 - 8}{1^2 - 4} = \frac{7}{3} \\ f'(1) = \frac{1^4 - 12 \cdot 1^2 + 16 \cdot 1}{(1^2 - 4)^2} = \frac{5}{9} \\ y - f(1) = f'(1)(x-1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{7}{3} = \frac{5}{9}(x-1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{9}x + \frac{16}{9}}$$

La ecuación de la recta tangente a  $f(x)$  en  $x=1$  tiene la expresión  $y = \frac{5}{9}x + \frac{16}{9}$ .



**Cuestión 2B.** Considera la siguiente función:  $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$

**Tarea a. [0,5 puntos].** Halla los puntos de corte de  $f(x)$  con el eje de abscisas OX y los puntos de corte de  $f(x)$  con el eje de ordenadas OY.

**Tarea b. [1 punto].** Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$ .

**Tarea c. [1 punto].** Calcula el área comprendida entre la curva  $y = f(x)$ , el eje OX y las rectas  $x = -2$  y  $x = 1$ .

**Tarea a.** Hallamos los puntos de corte de  $f(x)$  con el eje de abscisas OX.

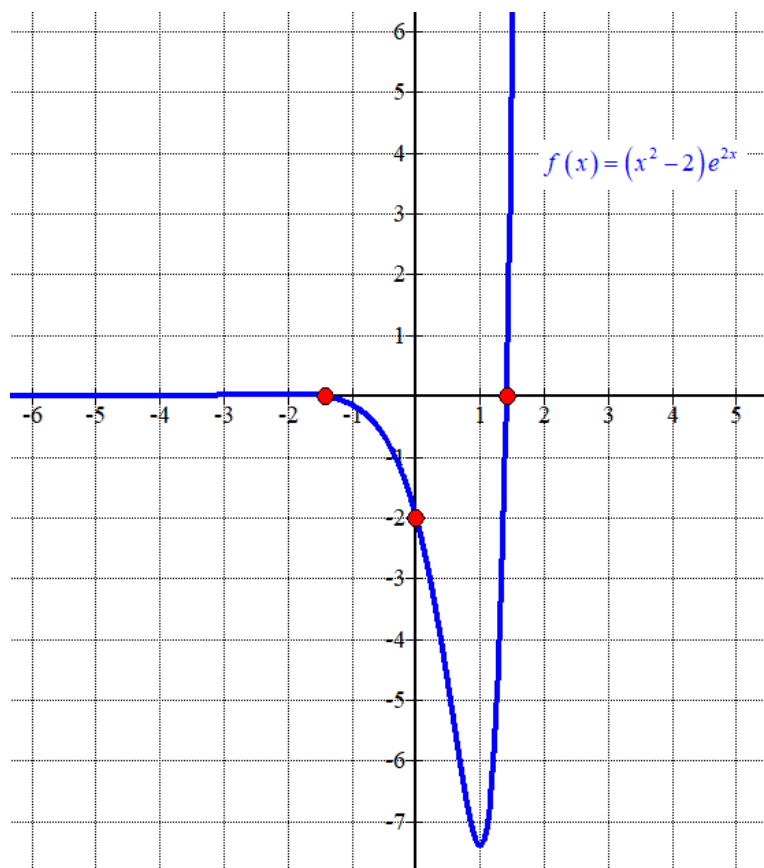
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = (x^2 - 2)e^{2x} \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x^2 - 2)e^{2x} = 0 \Rightarrow \{e^{2x} \neq 0\} \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{2}}$$

Los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son  $(-\sqrt{2}, 0)$  y  $(+\sqrt{2}, 0)$ .

Hallamos los puntos de corte de  $f(x)$  con el eje de ordenadas OY.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = (x^2 - 2)e^{2x} \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = (0^2 - 2)e^{2 \cdot 0} = -2 \Rightarrow y = -2$$

El punto de corte de la función con el eje de ordenadas es  $(0, -2)$



**Tarea b.** Estudiamos el cambio de signo de la derivada empezando por averiguar cuando se anula.

$$f(x) = (x^2 - 2)e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{2x} + (x^2 - 2)2e^{2x} = 2e^{2x}(x + x^2 - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2e^{2x}(x + x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \{e^{2x} \neq 0\} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = \boxed{1=x} \\ \frac{-1-3}{2} = \boxed{-2=x} \end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo  $(-\infty, -2)$  consideramos  $x = -3$  y la derivada vale

$$f'(-3) = 2e^{2(-3)}((-3)^2 - 3 - 2) = \frac{8}{e^6} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo  $(-2, 1)$  consideramos  $x = 0$  y la derivada vale

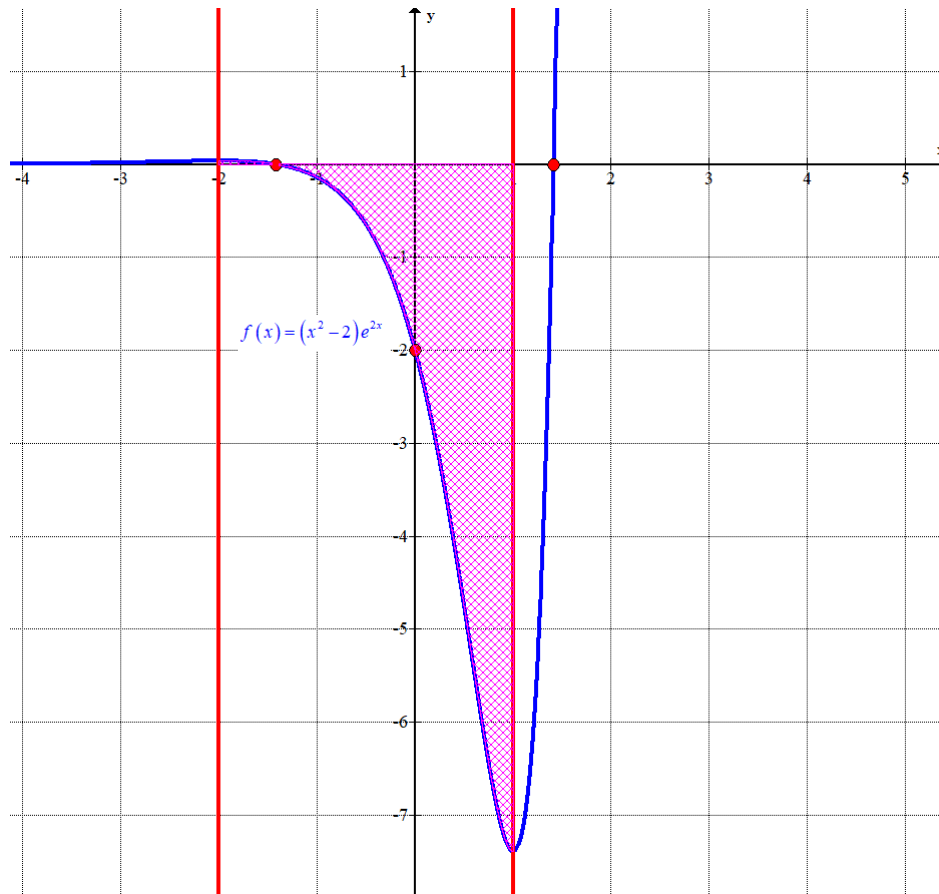
$$f'(0) = 2e^{2 \cdot 0}(0^2 + 0 - 2) = -4 < 0. \text{ La función decrece en } (-2, 1).$$

- En el intervalo  $(1, +\infty)$  consideramos  $x = 2$  y la derivada vale

$$f'(2) = 2e^{2 \cdot 2}(2^2 + 2 - 2) = 8e^4 > 0. \text{ La función crece en } (1, +\infty).$$

La función crece en  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$  y decrece en  $(-2, 1)$ .

**Tarea c.** La función corta el eje OX en  $(-\sqrt{2}, 0)$  y  $(+\sqrt{2}, 0)$ . Como  $-\sqrt{2}$  pertenece al intervalo  $(-2, 1)$  el valor del área pedida es la suma del valor de la integral definida de la función entre  $-2$  y  $-\sqrt{2}$ , y el valor absoluto de la integral definida de la función entre  $-\sqrt{2}$  y  $1$ .



Calculamos primero la integral indefinida de la función.

$$\begin{aligned}
 \int f(x) dx &= \int (x^2 - 2)e^{2x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x^2 - 2 \rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \int dv = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \end{array} \right\} = \\
 &= (x^2 - 2) \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} 2x dx = \frac{e^{2x}}{2} (x^2 - 2) - \int x e^{2x} dx = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \int dv = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \end{array} \right\} = \frac{e^{2x}}{2} (x^2 - 2) - \left[ x \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx \right] = \\
 &= \frac{e^{2x}}{2} (x^2 - 2) - \left[ x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \right] = \frac{e^{2x}}{2} (x^2 - 2) - \left[ x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \right] = \\
 &= \frac{e^{2x}}{2} \left( x^2 - 2 - x + \frac{1}{2} \right) = \frac{e^{2x}}{2} \left( x^2 - x - \frac{3}{2} \right) + C
 \end{aligned}$$

Aplicamos este resultado al cálculo del área.

Calculamos primero el área de la región pequeña comprendida entre  $-2$  y  $-\sqrt{2}$ .

$$\begin{aligned} \text{Área 1} &= \int_{-2}^{-\sqrt{2}} f(x) dx = \left[ \frac{e^{2x}}{2} \left( x^2 - x - \frac{3}{2} \right) \right]_{-2}^{-\sqrt{2}} = \\ &= \left[ \frac{e^{-2\sqrt{2}}}{2} \left( (-\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} - \frac{3}{2} \right) \right] - \left[ \frac{e^{2(-2)}}{2} \left( (-2)^2 + 2 - \frac{3}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{e^{-2\sqrt{2}}}{2} \left( 2 + \sqrt{2} - \frac{3}{2} \right) - \frac{e^{-4}}{2} \left( \frac{9}{2} \right) = \frac{e^{-2\sqrt{2}}}{2} \left( \frac{1}{2} + \sqrt{2} \right) - \frac{9}{4} e^{-4} \approx \boxed{0.01536 u^2} \end{aligned}$$

Calculamos ahora el área de la región más grande comprendida entre  $-\sqrt{2}$  y  $1$ .

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{2}}^1 f(x) dx &= \left[ \frac{e^{2x}}{2} \left( x^2 - x - \frac{3}{2} \right) \right]_{-\sqrt{2}}^1 = \\ &= \left[ \frac{e^2}{2} \left( 1^2 - 1 - \frac{3}{2} \right) \right] - \left[ \frac{e^{-2\sqrt{2}}}{2} \left( (-\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} - \frac{3}{2} \right) \right] = \\ &= -\frac{3e^2}{4} - \frac{e^{-2\sqrt{2}}}{2} \left( 2 + \sqrt{2} - \frac{3}{2} \right) = -\frac{3e^2}{4} - \frac{e^{-2\sqrt{2}}}{2} \left( \frac{1}{2} + \sqrt{2} \right) \\ \text{Área 2} &= \left| \int_{-\sqrt{2}}^1 f(x) dx \right| = \frac{3e^2}{4} + \frac{e^{-2\sqrt{2}}}{2} \left( \frac{1}{2} + \sqrt{2} \right) \approx \boxed{5.5983 u^2} \end{aligned}$$

El área comprendida entre la curva  $y = f(x)$ , el eje OX y las rectas  $x = -2$  y  $x = 1$  es la suma de los dos valores obtenidos:  $0.01536 + 5.5983 = 5.61366$  unidades cuadradas.

**APARTADO 3 (Bloque C) [2.5 PUNTOS]**

Considera la recta  $r: \begin{cases} 2x - y = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$  y el punto  $P = (1, 1, 1)$ .

**Tarea a. [1 punto].** Determina los puntos de  $r$  que están a una distancia de  $\sqrt{14}$  unidades de  $P$ .

**Tarea b. [0,75 puntos].** Obtén la ecuación del plano que contiene a  $r$  y  $P$ .

**Tarea c. [0,75 puntos].** Calcula la distancia entre  $r$  y  $P$ ,

**Tarea a.** Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r: \begin{cases} 2x - y = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = y \\ y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x - 3 - 2z = 1 \Rightarrow 2x - 2z = 4 \Rightarrow x - z = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2 + z \Rightarrow y = 2(2 + z) - 3 = 4 + 2z - 3 = 1 + 2z \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto  $Q$  perteneciente a la recta  $r$  tiene coordenadas  $Q(2 + \lambda, 1 + 2\lambda, \lambda)$ .

Para que un punto  $Q$  de la recta  $r$  esté situado a  $\sqrt{14}$  unidades de  $P$  el vector que une dichos puntos debe tener longitud  $\sqrt{14}$ .

$$\left. \begin{array}{l} Q(2 + \lambda, 1 + 2\lambda, \lambda) \\ P(1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (2 + \lambda, 1 + 2\lambda, \lambda) - (1, 1, 1) = (1 + \lambda, 2\lambda, \lambda - 1)$$

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{14} \Rightarrow \sqrt{(1 + \lambda)^2 + (2\lambda)^2 + (\lambda - 1)^2} = \sqrt{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + \lambda)^2 + 4\lambda^2 + (\lambda - 1)^2 = 14 \Rightarrow 1 + \lambda^2 + 2\lambda + 4\lambda^2 + \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda^2 - 12 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 2 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} Q_1(2 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ Q_2(2 - \sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \end{cases}$$

Los puntos buscados son  $Q_1(2 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, \sqrt{2})$  y  $Q_2(2 - \sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ .

**Tarea b.** El plano que contiene a  $r$  y  $P$  tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector que une el punto  $P$  con un punto cualquiera de la recta.

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, 2, 1) \\ \vec{Q_r}(2, 1, 0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} P = (1, 1, 1) \\ Q_r = (2, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ_r} = (2, 1, 0) - (1, 1, 1) = (1, 0, -1)$$

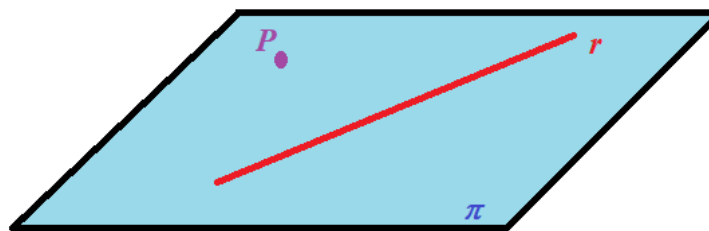
$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (1, 2, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ_r} = (1, 0, -1) \\ P = (1, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(x-1) + y-1 + 0 - 2(z-1) + y-1 - 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x + 2 + y - 1 - 2z + 2 + y - 1 - 0 = 0 \Rightarrow -2x + 2y - 2z + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x - y + z - 1 = 0}$$

La ecuación del plano que contiene a  $r$  y  $P$  es  $\pi: x - y + z - 1 = 0$ .

**Tarea c.** Hallamos el punto  $P'$  de la recta  $r$  tal que el vector  $\overrightarrow{PP'}$  es perpendicular a la recta  $r$ .



$$\left. \begin{array}{l} P'(2 + \lambda, 1 + 2\lambda, \lambda) \in r \\ P(1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = (2 + \lambda, 1 + 2\lambda, \lambda) - (1, 1, 1) = (1 + \lambda, 2\lambda, \lambda - 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PP'} = (1 + \lambda, 2\lambda, \lambda - 1) \\ \vec{v}_r = (1, 2, 1) \\ \overrightarrow{PP'} \perp r \rightarrow \overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v}_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (1, 2, 1)(1 + \lambda, 2\lambda, \lambda - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \lambda + 4\lambda + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = (1, 0, -1)$$

La distancia del punto  $P$  a la recta es el valor del módulo del vector  $\overrightarrow{PP'}$ .

$$d(P, r) = d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

La distancia entre  $r$  y  $P$  tiene un valor de  $\sqrt{2}$  unidades.



**APARTADO 4 (Bloque E) [2.5 PUNTOS]**

**Cuestión 4A.** En un colegio se ofrecen solo atletismo y baloncesto como actividades deportivas extraescolares. En base a los datos de otros años, los docentes determinan que la probabilidad de que un alumno se matricule en atletismo es  $P(A) = 0,40$  y que la probabilidad de que un estudiante se matricule en baloncesto es  $P(B) = 0,65$ . Además, solo un 10% del alumnado no se matricula en ningún deporte.

**Tarea a. [1 punto].** Calcula la probabilidad de que un alumno se matricule en los dos deportes.

**Tarea b. [1,5 puntos].** Calcula las siguientes probabilidades:  $P(A/B)$ ,  $P(B/A)$  y  $P(A/B^c)$  donde  $B^c$  representa el suceso contrario a  $B$ .

**Tarea a.** Sabemos que el 40 % del alumnado se matricula en atletismo, el 65 % en baloncesto y el 10 % no se matricula en ningún deporte. Construimos una tabla de contingencia para obtener la información implícita en los datos proporcionados

|               | Atletismo | No atletismo |            |
|---------------|-----------|--------------|------------|
| Baloncesto    |           |              | <b>65</b>  |
| No baloncesto |           | <b>10</b>    |            |
|               | <b>40</b> |              | <b>100</b> |

Completamos la tabla.

|               | Atletismo | No atletismo |            |
|---------------|-----------|--------------|------------|
| Baloncesto    | <b>15</b> | <b>50</b>    | <b>65</b>  |
| No baloncesto | <b>25</b> | <b>10</b>    | <b>35</b>  |
|               | <b>40</b> | <b>60</b>    | <b>100</b> |

Nos piden calcular  $P(A \cap B)$ . Sabemos que el 15 % del alumnado se ha matriculado en ambos deportes, aplicando la regla de Laplace sabemos que la probabilidad de que un alumno se matricule en los dos deportes tiene un valor de 0.15.

**Tarea b.** Usando el teorema de Bayes y los datos de la tabla de contingencia calculamos las probabilidades pedidas.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.65} = \boxed{\frac{3}{13} \approx 0.2308}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.15}{0.4} = \boxed{0.375}$$

$$P(A/B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{0.25}{0.35} = \boxed{\frac{5}{7} \approx 0.7143}$$

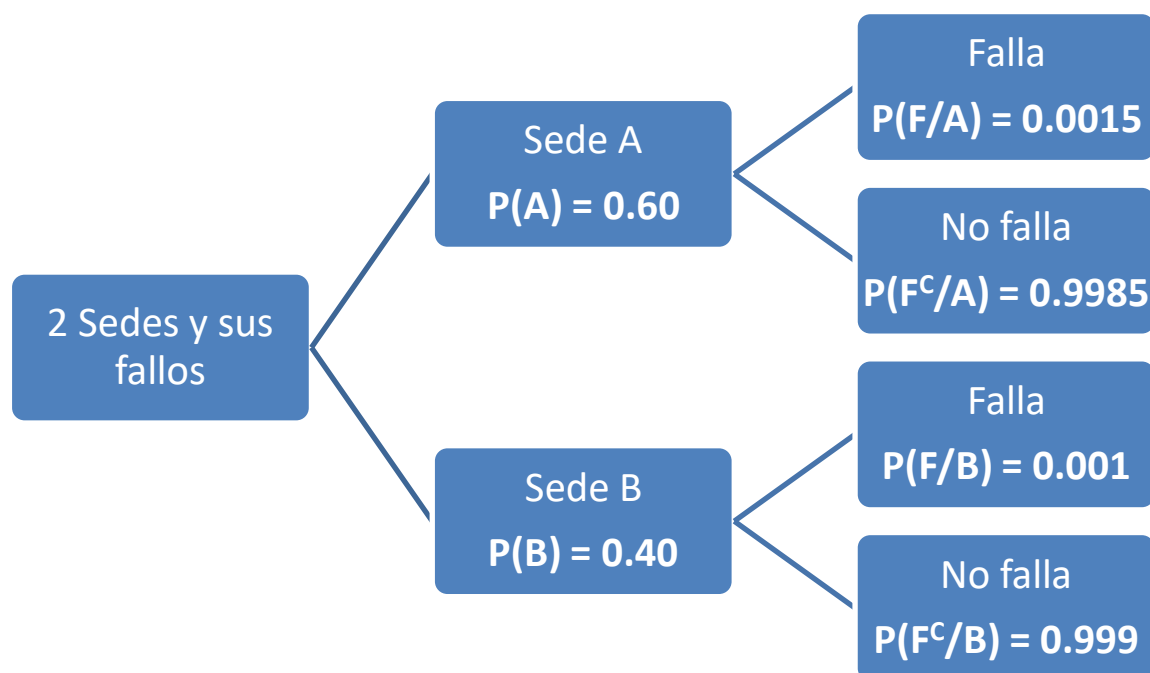
**Cuestión 4B.** Solo dos sedes de una empresa fabrican el mismo modelo de aspiradora. La sede A suministra el 60 % de la producción total. Un 0,15 % de las aspiradoras fabricadas en la sede A y un 0,1 % de las aspiradoras fabricadas en la sede B falla durante el primer año.

**Tarea a. [0,75 puntos].** Calcula la probabilidad de que una aspiradora fabricada en la sede B no falle durante el primer año.

**Tarea b. [0,75 puntos].** Calcula la probabilidad de que una aspiradora elegida al azar falle durante el primer año.

**Tarea c. [1 punto].** Si una aspiradora elegida al azar no falla durante el primer año, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada en la sede A.

Realizamos un diagrama de árbol descriptivo de la situación planteada.



**Tarea a.** Nos piden calcular  $P(F^c / B)$ . Como sabemos que el 0.1 % de las aspiradoras fallan entonces el restante 99.9 % no fallan. Entonces  $P(F^c / B) = 0.999$ .

**Tarea b.** Nos piden calcular  $P(F)$ . Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(F) = P(A)P(F / A) + P(B)P(F / B) = 0.6 \cdot 0.0015 + 0.4 \cdot 0.001 = \boxed{0.0013}$$

**Tarea c.** Nos piden calcular  $P(A / F^c)$ . Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A / F^c) = \frac{P(A \cap F^c)}{P(F^c)} = \frac{P(A)P(F^c / A)}{1 - P(F)} = \frac{0.6 \cdot 0.9985}{1 - 0.0013} = \frac{1997}{3329} \approx 0.5999$$