



PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

PAU

CURSO 2024–2025

MATERIA: MATEMÁTICAS II

(4)

Convocatoria:

Instrucciones:

- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (La colonia de hormigas)

1. El modelo logístico es un modelo matemático utilizado para describir la evolución de una población a lo largo del tiempo, cuando los recursos son limitados. Es uno de los modelos matemáticos más comunes en biología y describe cómo la población se estabiliza cuando alcanza la capacidad de carga del entorno, esto es, el tamaño máximo que puede alcanzar una población antes de que los recursos se vuelvan insuficientes, lo que genera competencia y, en muchos casos, una desaceleración de la tasa de crecimiento o una crisis en la población.

Un ejemplo de modelo logístico lo encontramos en las colonias de hormigas, que están compuestas por una red de túneles, entradas, cámaras de cría y áreas de almacenamiento, donde las hormigas establecen su hábitat.

Un grupo de investigadores ha estudiado el momento en el que unas hormigas forman una nueva colonia y ha modelizado el número de hormigas ($H(t)$) después de t meses con la función:

$$H(t) = \frac{6400}{1 + 159e^{-0.5t}}$$

- a) ¿Cuántas hormigas formaron la nueva colonia inicialmente? 0.25
- b) ¿Cuál es la tasa media de crecimiento el primer año? ¿Y el segundo año? Interpretar el resultado. 0.75
- c) Un observador afirma que el modelo siempre es creciente y entiende que la población de hormigas crece sin control. Justificar matemáticamente si esta afirmación es o no correcta. 0.75
- d) ¿En qué momento la colonia de hormigas alcanzará la mitad de su capacidad de carga? 0.75

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. En la fabricación de piensos para peces en granjas acuícolas, es necesario equilibrar la cantidad de proteína, grasa y carbohidratos. Una empresa dedicada a los piensos para peces utiliza tres tipos principales de materias primas, las cuales proporcionan diferentes cantidades de proteína, grasa y carbohidratos. Las materias primas son: subproductos vegetales que contienen un 20% de proteína, un 10% de grasa y un 10% de carbohidratos; harinas que aportan un 40% de proteínas, un 20% de grasa y un 30% de carbohidratos; y subproductos cárnicos que aportan un 60%, 10% y 30% respectivamente.

Esta empresa productora está preparando 1000 kg de pienso que han de contener un 36% de proteína, un 12% de grasa y un 20% de carbohidratos. ¿Qué cantidad de cada materia prima se ha de utilizar para obtener el pienso con las características indicadas? 2.5

2B. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left. \begin{aligned} 4X - 5Y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ 6X + 4Y &= \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad 2.5$$

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional, se considera la recta y plano siguientes:

$$r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}; \quad \pi: x - y + 2z - 5 = 0$$

- a) Comprobar que el plano π y la recta r se cortan. Dar la ecuación de la recta s , contenida en el plano π , que corta perpendicularmente a r . 1.5
- b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano π . 1

3B. En el espacio tridimensional se tienen las siguientes rectas:

$$r: \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 2x + y - 6z = 2 \end{cases} \quad s: x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z + 1}{2}$$

- a) Comprobar que r y s son coplanarias. 1.5
- b) Hallar la ecuación del plano que las contiene. 1

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

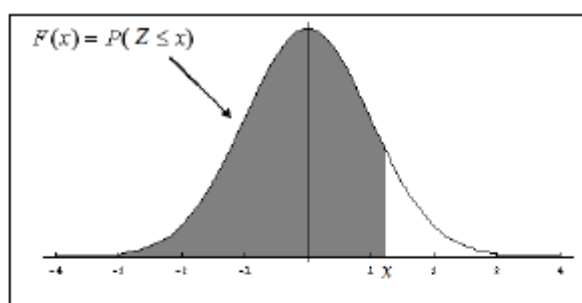
4A. Se está desarrollando una prueba para detectar una enfermedad rara que afecta al 1% de la población adulta. Se sabe que, la sensibilidad de la prueba (dar positivo cuando la persona está enferma) es del 95%, y la especificidad de la prueba (dar negativo cuando la persona está sana) es del 98%. Se selecciona al azar un individuo de la población:

- a) Si se somete a la prueba de diagnóstico, calcular la probabilidad de que esté realmente enfermo cuando la prueba da positivo. 1.5
- b) Si una población de 35000 individuos se somete a la prueba, ¿podríamos afirmar que se espera que habrá más de 50 personas que estarán enfermas, aún cuando han obtenido un resultado negativo en el test? 1

4B. El Instituto Canario de Estadística (ISTAC) se ha encargado de realizar un estudio multidisciplinar para optimizar la planificación de plazas en residencias universitarias de estudiantes de nuevo ingreso en las dos universidades públicas canarias (ULL y ULPGC).

Para ello, se ha llevado a cabo una encuesta a 1800 estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas no capitalinas, de los que el 27% de estos estudiantes solicitan plaza en una residencia universitaria.

- a) Comprobar si hay más de un 90% de posibilidades de recibir entre 460 y 510 solicitudes de plaza en una residencia de estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas diferentes a Tenerife y Gran Canaria. 1.75
- b) A partir de 525 solicitudes de alojamiento de estos estudiantes, las universidades deberían acometer la construcción de nuevas residencias universitarias. ¿Qué probabilidad hay de que deban adoptar esta medida? 0.75



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

Bloque 1.- Análisis (La colonia de hormigas)

1. El modelo logístico es un modelo matemático utilizado para describir la evolución de una población a lo largo del tiempo, cuando los recursos son limitados. Es uno de los modelos matemáticos más comunes en biología y describe cómo la población se estabiliza cuando alcanza la capacidad de carga del entorno, esto es, el tamaño máximo que puede alcanzar una población antes de que los recursos se vuelvan insuficientes, lo que genera competencia y, en muchos casos, una desaceleración de la tasa de crecimiento o una crisis en la población.

Un ejemplo de modelo logístico lo encontramos en las colonias de hormigas, que están compuestas por una red de túneles, entradas, cámaras de cría y áreas de almacenamiento, donde las hormigas establecen su hábitat.

Un grupo de investigadores ha estudiado el momento en el que unas hormigas forman una nueva colonia y ha modelizado el número de hormigas ($H(t)$) después de t meses con la función:

$$H(t) = \frac{6400}{1 + 159e^{-0.5t}}$$

- | | |
|---|------|
| a) ¿Cuántas hormigas formaron la nueva colonia inicialmente? | 0.25 |
| b) ¿Cuál es la tasa media de crecimiento el primer año? ¿Y el segundo año? Interpretar el resultado. | 0.75 |
| c) Un observador afirma que el modelo siempre es creciente y entiende que la población de hormigas crece sin control. Justificar matemáticamente si esta afirmación es o no correcta. | 0.75 |
| d) ¿En qué momento la colonia de hormigas alcanzará la mitad de su capacidad de carga? | 0.75 |

a) El valor de la función para $t = 0$ es $H(0) = \frac{6400}{1 + 159e^{-0.5 \cdot 0}} = \frac{6400}{1 + 159} = 40$. Inicialmente en el hormiguero hay 40 hormigas.

b) En el último mes del año hay $H(12) = \frac{6400}{1 + 159e^{-0.5 \cdot 12}} \approx 4590.7$. Aproximadamente hay 4591 hormigas.

$$TVM(0,12) = \frac{H(12) - H(0)}{12 - 0} = \frac{4591 - 40}{12} = 379.25$$

La tasa media de crecimiento el primer año la redondeamos como 379 hormigas por mes. Realizamos el cálculo para el segundo año.

$$TVM(12,24) = \frac{H(24) - H(12)}{24 - 12} = \frac{\frac{6400}{1 + 159e^{-0.5 \cdot 24}} - 4591}{12} = 150.24$$

La tasa media de crecimiento el segundo año la redondeamos como 150 hormigas por mes.

La tasa de crecimiento pasa de 379 hormigas al mes en el primer año a 150 hormigas al mes el segundo año. Interpretamos que el crecimiento de la colonia se va ralentizando con el paso de los años.

c) Calculamos la derivada de la función y averiguamos si siempre es positiva.

$$H(t) = \frac{6400}{1+159e^{-0.5t}} \Rightarrow H'(t) = \frac{0 - 6400 \cdot (-0.5 \cdot 159e^{-0.5t})}{(1+159e^{-0.5t})^2} = \frac{508800 \cdot e^{-0.5t}}{(1+159e^{-0.5t})^2}$$

El denominador está elevado al cuadrado y siempre será positivo.

En el numerador tenemos una constante positiva multiplicada por una exponencial, que siempre es positiva. Este cociente es siempre positivo. Al ser la derivada siempre positiva la función es siempre creciente.

Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6400}{1+159e^{-0.5t}} = \frac{6400}{1+159e^{-\infty}} = \frac{6400}{1+159 \cdot 0} = 6400$$

La población de hormigas es siempre creciente pero no sobrepasa los 6400 individuos en el hormiguero.

d) Averiguamos cuando $H(t) = \frac{6400}{2} = 3200$.

$$\left. \begin{array}{l} H(t) = \frac{6400}{1+159e^{-0.5t}} \\ H(t) = \frac{6400}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{6400}{1+159e^{-0.5t}} = \frac{6400}{2} \Rightarrow 1+159e^{-0.5t} = 2 \Rightarrow 159e^{-0.5t} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-0.5t} = \frac{1}{159} \Rightarrow \ln e^{-0.5t} = \ln\left(\frac{1}{159}\right) \Rightarrow -0.5t = -\ln(159) \Rightarrow t = \frac{\ln(159)}{0.5} \approx 10.14$$

La población de hormigas alcanza la mitad de su capacidad a los 10 meses.

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. En la fabricación de piensos para peces en granjas acuícolas, es necesario equilibrar la cantidad de proteína, grasa y carbohidratos. Una empresa dedicada a los piensos para peces utiliza tres tipos principales de materias primas, las cuales proporcionan diferentes cantidades de proteína, grasa y carbohidratos. Las materias primas son: subproductos vegetales que contienen un 20% de proteína, un 10% de grasa y un 10% de carbohidratos; harinas que aportan un 40% de proteínas, un 20% de grasa y un 30% de carbohidratos; y subproductos cárnicos que aportan un 60%, 10% y 30% respectivamente.

Esta empresa productora está preparando 1000 kg de pienso que han de contener un 36% de proteína, un 12% de grasa y un 20% de carbohidratos. ¿Qué cantidad de cada materia prima se ha de utilizar para obtener el pienso con las características indicadas?

2.5

Llamamos x = cantidad (Kg) de producto vegetal (P1), y = cantidad (Kg) de harina (P2),
 z = cantidad (Kg) de producto cárnico (P3).

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Proteína (kg)	Grasa (kg)	Carbohidratos (kg)
Vegetales (x)	$0.20x$	$0.10x$	$0.10z$
Harina (y)	$0.40y$	$0.20y$	$0.30z$
Carne (z)	$0.60z$	$0.10z$	$0.30z$
TOTALES	$0.2x + 0.4y + 0.6z$	$0.1x + 0.2y + 0.1z$	$0.1x + 0.3y + 0.3z$

En 1000 kg de producto debe haber un 36% de proteína, un 12% de grasa y un 20% de carbohidratos. Debe haber $0.36 \cdot 1000 = 360$ kg de proteína, $0.12 \cdot 1000 = 120$ kg de grasa y $0.20 \cdot 1000 = 200$ kg de carbohidratos.

Nos quedan las ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} 0.2x + 0.4y + 0.6z = 360 \\ 0.1x + 0.2y + 0.1z = 120 \\ 0.1x + 0.3y + 0.3z = 200 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 4y + 6z = 3600 \\ x + 2y + z = 1200 \\ x + 3y + 3z = 2000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1800 \\ x = 1200 - z - 2y \\ x + 3y + 3z = 2000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1200 - z - 2y + 2y + 3z = 1800 \\ 1200 - z - 2y + 3y + 3z = 2000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z = 600 \\ y + 2z = 800 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = \frac{600}{2} = 300 \\ y = 800 - 2z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 800 - 600 = 200} \Rightarrow \boxed{x = 1200 - 300 - 400 = 500}$$

Se necesitan 500 kg de producto vegetal, 200 kg de harina y 300 de productos cárnicos.

2B. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left. \begin{aligned} 4X - 5Y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ 6X + 4Y &= \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad 2.5$$

Obtenemos la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{2-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -18+17 & -8+3 & -12+13 \\ -9+17 & -4+3 & -6+13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sustituimos en el sistema matricial y nos queda

$$\left. \begin{aligned} 4X - 5Y &= \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix} \\ 6X + 4Y &= \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \text{ . Lo resolvemos.}$$

$$\begin{aligned} 3 \times \rightarrow 4X - 5Y &= \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix} \\ -2 \times \rightarrow 6X + 4Y &= \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 12X - 15Y &= \begin{pmatrix} -3 & -15 & 3 \\ 24 & -3 & 21 \end{pmatrix} \\ -12X - 8Y &= \begin{pmatrix} -20 & -8 & 20 \\ -24 & -20 & -44 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

$$\hline -23Y = \begin{pmatrix} -23 & -23 & 23 \\ 0 & -23 & -23 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \frac{-1}{23} \begin{pmatrix} -23 & -23 & 23 \\ 0 & -23 & -23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 6X + 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6X = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 12 & 6 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 12 & 6 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema matricial es $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional, se considera la recta y plano siguientes:

$$r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=10 \end{cases}; \quad \pi: x-y+2z-5=0$$

a) Comprobar que el plano π y la recta r se cortan. Dar la ecuación de la recta s , contenida en el plano π , que corta perpendicularmente a r . 1.5

b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano π . 1

a) Resolvemos el sistema de ecuaciones planteada por las ecuaciones de recta y plano.

$$\begin{aligned} r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=10 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y=-x-z \\ 2x-y+z=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+x+z+z=10 \\ x+x+z+2z-5=0 \end{cases} \Rightarrow \\ \pi: x-y+2z-5=0 &\Rightarrow \begin{cases} x-y+2z-5=0 \\ x-y+2z-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2z=10 \\ 2x+3z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x-4z=-20 \\ 6x+9z=15 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{matrix} 5z=-5 \Rightarrow \boxed{z=-1} \Rightarrow 2x+3(-1)=5 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{x=4} \Rightarrow \boxed{y=-4-(-1)=-3} \end{matrix} \end{aligned}$$

La recta corta el plano en un único punto de coordenadas $P(4, -3, -1)$.

La recta s contenida en el plano tiene que ser perpendicular al vector normal del plano $\vec{n}=(1, -1, 2)$. También debe cortar perpendicularmente a la recta r , por lo que debe pasar por el punto P y debe ser perpendicular al vector director de la recta r .

Hallamos el vector director de la recta r .

$$\begin{aligned} r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=10 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} z=-x-y \\ 2x-y+z=10 \end{cases} \Rightarrow 2x-y-x-y=10 \Rightarrow x-2y=10 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{x=10+2y} \Rightarrow z=-10-2y-y=-10-3y \Rightarrow r: \begin{cases} x=10+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-10-3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_r(10, 0, -10) \\ \vec{v}_r=(2, 1, -3) \end{cases} \end{aligned}$$

La recta s tiene como vector director el producto vectorial de $\vec{n}=(1, -1, 2)$ y $\vec{v}_r=(2, 1, -3)$.

$$\begin{aligned} \vec{n}=(1, -1, 2) &\Rightarrow \vec{n} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3i + 4j + k + 2k + 3j - 2i = i + 7j + 3k = (1, 7, 3) \\ \vec{v}_r=(2, 1, -3) &\end{aligned}$$

$$s: \begin{cases} \vec{u}_s = \vec{n} \times \vec{v}_r = (1, 7, 3) \\ P(4, -3, -1) \in s \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x=4+\alpha \\ y=-3+7\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z=-1+3\alpha \end{cases}$$

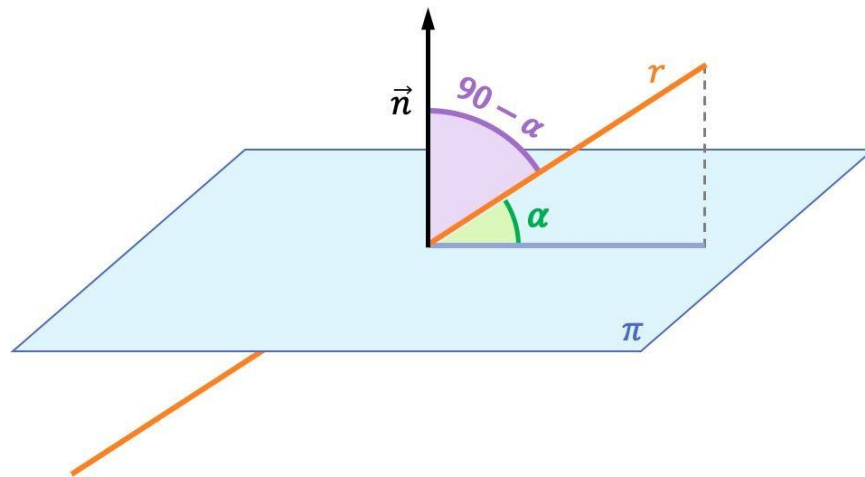
La recta s buscada es $s: \begin{cases} x = 4 + \alpha \\ y = -3 + 7\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 3\alpha \end{cases}$

c) Hallamos el ángulo que forman el vector normal del plano π y el vector director de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, -1, 2) \\ \vec{v}_r = (2, 1, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}_r|}{|\vec{n}| |\vec{v}_r|} = \frac{|(1, -1, 2)(2, 1, -3)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{|2 - 1 - 6|}{\sqrt{6} \sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{84}}$$

$$(\vec{n}, \vec{v}_r) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{84}}\right) \approx 57^\circ$$

El ángulo que forman la recta r y el plano π tiene un valor aproximado de $90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$.



3B. En el espacio tridimensional se tienen las siguientes rectas:

$$r: \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 2x + y - 6z = 2 \end{cases} \quad s: x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z + 1}{2}$$

- a) Comprobar que r y s son coplanarias. 1.5
b) Hallar la ecuación del plano que las contiene. 1

a) Para que las dos rectas sean coplanarias deben ser coincidentes, paralelas o cortarse en un único punto. Hallamos las ecuaciones paramétricas de las rectas, así como un punto y un vector director de cada recta.

$$r: \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 2x + y - 6z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - x + 2z \\ 2x + y - 6z = 2 \end{cases} \Rightarrow 2x + 3 - x + 2z - 6z = 2 \Rightarrow x - 4z = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -1 + 4z \Rightarrow y = 3 + 1 - 4z + 2z = 4 - 2z \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (4, -2, 1) \\ P_r(-1, 4, 0) \end{cases}$$

$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 3, 2) \\ Q_s(1, 0, -1) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas ni son coincidentes ni paralelas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (4, -2, 1) \\ \vec{u}_s = (1, 3, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{1} \neq \frac{-2}{3} \neq \frac{1}{2}$$

Las dos rectas se cortan o se cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (1, 0, -1) - (-1, 4, 0) = (2, -4, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (4, -2, 1) \\ \vec{u}_s = (1, 3, 2) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (2, -4, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -12 - 8 - 4 - 6 - 2 + 32 = 0$$

El producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = 0$, por lo que las rectas se cortan y por tanto son coplanarias.

- b) El plano π que contiene ambas rectas tiene como vectores directores del plano los vectores directores de las rectas y contiene al punto $Q_s(1, 0, -1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{v}_r = (4, -2, 1) \\ \vec{u} = \vec{u}_s = (1, 3, 2) \\ Q_s(1, 0, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x + 4 + y + 12z + 12 + 2z + 2 - 8y - 3x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7x - 7y + 14z + 21 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x + y - 2z - 3 = 0}$$

El plano que contiene las rectas r y s tiene ecuación $\pi : x + y - 2z - 3 = 0$.

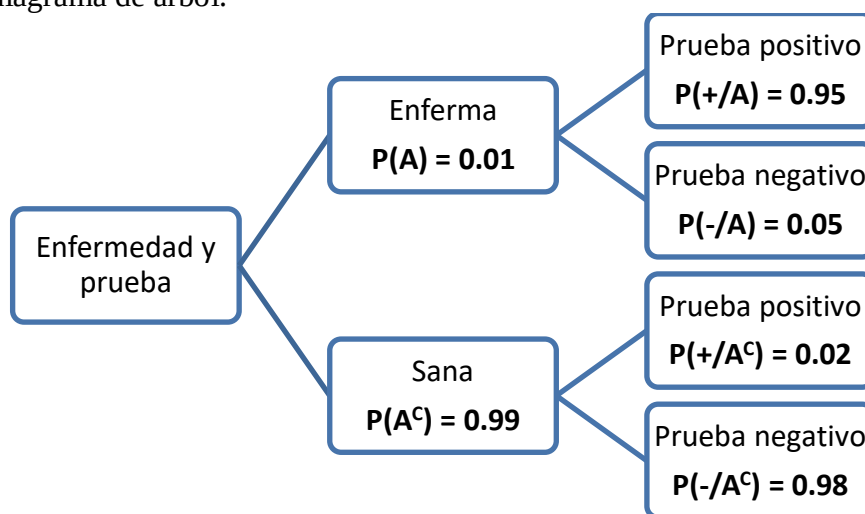
Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Se está desarrollando una prueba para detectar una enfermedad rara que afecta al 1% de la población adulta. Se sabe que, la sensibilidad de la prueba (dar positivo cuando la persona está enferma) es del 95%, y la especificidad de la prueba (dar negativo cuando la persona está sana) es del 98%. Se selecciona al azar un individuo de la población:

a) Si se somete a la prueba de diagnóstico, calcular la probabilidad de que esté realmente enfermo cuando la prueba da positivo. 1.5

b) Si una población de 35000 individuos se somete a la prueba, ¿podríamos afirmar que se espera que habrá más de 50 personas que estarán enfermas, aún cuando han obtenido un resultado negativo en el test? 1

Dibujamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(A/+)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/+) = \frac{P(A \cap +)}{P(+)} = \frac{P(A)P(+/A)}{P(A)P(+/A) + P(A^c)P(+/A^c)} =$$

$$= \frac{0.01 \cdot 0.95}{0.01 \cdot 0.95 + 0.99 \cdot 0.02} = \frac{95}{293} \approx 0.3242$$

La probabilidad de que una persona que da positivo en la prueba esté realmente enferma es de 0.3242.

b) Calculamos la probabilidad de que una persona esté enferma cuando da negativo en la prueba, es decir, calculamos $P(A/-)$.

$$P(A/-) = \frac{P(A \cap -)}{P(-)} = \frac{P(A)P(-/A)}{1 - P(+)} = \frac{0.01 \cdot 0.05}{1 - \frac{95}{293}} = \frac{293}{396000} \approx 0.00074$$

En una población de 35000 personas sometidas a esta prueba se espera que

$$\frac{293}{396000} \cdot 35000 = \frac{10255}{396} \approx 25.896 \text{ personas den negativo a pesar de estar enfermas.}$$

Aproximadamente 26 personas. Esta cifra es menor de 50.

No es cierto que se esperen más de 50 personas enfermas con resultado negativo en la prueba.

4B. El Instituto Canario de Estadística (ISTAC) se ha encargado de realizar un estudio multidisciplinar para optimizar la planificación de plazas en residencias universitarias de estudiantes de nuevo ingreso en las dos universidades públicas canarias (ULL y ULPGC). Para ello, se ha llevado a cabo una encuesta a 1800 estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas no capitalinas, de los que el 27% de estos estudiantes solicitan plaza en una residencia universitaria.

a) Comprobar si hay más de un 90% de posibilidades de recibir entre 460 y 510 solicitudes de plaza en una residencia de estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas diferentes a Tenerife y Gran Canaria. 1.75

b) A partir de 525 solicitudes de alojamiento de estos estudiantes, las universidades deberían acometer la construcción de nuevas residencias universitarias. ¿Qué probabilidad hay de que deban adoptar esta medida? 0.75

X = número de solicitudes de estudiantes de nuevo ingreso para plazas en residencias de estudiantes de islas no capitalinas.

Las solicitudes enviadas son independientes. La proporción de estos estudiantes que solicitan plaza en una residencia universitaria es $p = 0.27$

$X = B(1800, 0.27)$

Esta binomial la aproximamos con una variable Y normal de media $\mu = np = 1800 \cdot 0.27 = 486$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1800 \cdot 0.27 \cdot 0.73} \approx 18.84$. $Y = N(486, 18.84)$.

Esta aproximación es buena pues $np = 486 > 5$ y $nq = 1800 \cdot 0.73 = 1314 > 5$.

a) Calculamos $P(460 \leq X \leq 510)$.

$$P(460 < X < 510) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(460.5 \leq Y \leq 509.5) =$$

$$= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{460.5 - 486}{18.84} \leq Z \leq \frac{509.5 - 486}{18.84}\right) = P(-1.35 \leq Z \leq 1.25) =$$

$$= P(Z \leq 1.25) - P(Z \leq -1.35) = P(Z \leq 1.25) - P(Z \geq 1.35) =$$

$$= P(Z \leq 1.25) - [1 - P(Z \leq 1.35)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.8944 - 1 + 0.9115 = \boxed{0.8059}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9

Hay un 80.59% de posibilidades de recibir entre 460 y 510 solicitudes de plaza en una residencia de estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas diferentes a Tenerife y Gran Canaria. Este porcentaje de 80.59 es **menor** de 90 y no es cierto lo que se afirma.

b) Calculamos la probabilidad de que las solicitudes sean más de 525: $P(X > 525)$.

$$\begin{aligned} P(X > 525) &= \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 525.5) = \{\text{Tipificamos}\} = \\ &= P\left(Z \geq \frac{525.5 - 486}{18.84}\right) = P(Z > 2.1) = 1 - P(Z \leq 2.1) = 1 - 0.9821 = \boxed{0.0179} \end{aligned}$$

La probabilidad de que deban acometer la construcción de nuevas residencias universitarias es de 0.0179.