



PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

PAU

CURSO 2024–2025

MATERIA: MATEMÁTICAS II

Convocatoria:

JUNIO_VIERNES_6

Instrucciones:

- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (Metabolix)

1. En un hospital de las Islas Canarias, un equipo de investigación está analizando cómo se metaboliza en sangre un nuevo medicamento llamado Metabolix, utilizado para tratar infecciones bacterianas. La concentración residual del fármaco en el plasma sanguíneo, denotada como $f(x)$ (medida en miligramos por litro, mg/L), depende del tiempo transcurrido x (en horas) desde su administración. El estudio indica que el medicamento sigue dos fases diferenciadas:

- Fase de absorción: En las primeras dos horas, el fármaco se distribuye por el organismo.
- Fase de eliminación: A partir de la segunda hora, el fármaco empieza a eliminarse.

Este comportamiento se modeliza mediante la siguiente función matemática:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{9}{\sqrt{5x-1}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

El equipo de investigación necesita aclarar algunas dudas del modelo matemático:

- Confirmar si este modelo es realmente continuo. Justifica tu respuesta. 0.5
- La concentración residual varía con el tiempo, comprobar que la velocidad de crecimiento instantánea de la concentración residual a las 3 horas de administrar Metabolix es mayor que $-0.5 (mg/L)/h$. 0.75
- ¿Es cierto que la concentración residual del fármaco en la sangre siempre va disminuyendo con respecto al tiempo transcurrido? Averiguar en qué instante la concentración residual es máxima y calcular el valor de dicha concentración. 0.75
- Pasado un largo periodo de tiempo, ¿cuál será la concentración residual de este medicamento?

0.5

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Dada la matriz $M \in M_{2 \times 2}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

- Para cualquier valor del parámetro a : comprobar que M es invertible y dar la expresión de M^{-1} . 1
- Para $a = -1$, calcula el valor de la matriz X que satisface la ecuación $MA = B - MX$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 1.5$$

2B. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro k . 1.25
 b) Para $k = -1$, comprobar que $A^2 = 2A - I$, donde I denota la matriz identidad de orden 3.
 Además, utilizando la igualdad anterior verifica, sin calcular la potencia, que $A^4 = 4A - I$.

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional, dados el punto P y las rectas r_1 y r_2 siguientes:

$$P(2, -1, 1); \quad r_1: \begin{cases} 4x + 3y - 3z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 1 \end{cases}; \quad r_2: \frac{x+3}{2} = 2 - y = \frac{z+4}{3}$$

- a) Comprobar que $P \in r_1$ y que $P \notin r_2$. 0.25
 b) Hallar la distancia entre el punto P y el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 . 1
 c) Hallar el ángulo con el que se cortan las rectas r_1 y r_2 . 1.25

3B. En el espacio tridimensional se consideran los siguientes elementos geométricos:

$$A(1, 0, 2); \quad \pi: -x + 2y + z + 1 = 0; \quad r: \begin{cases} 4x - 7y + 2z = 7 \\ y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

- a) Hallar la posición relativa del plano π y la recta r . 1
 b) Hallar el punto simétrico de A con respecto del plano π . 1.5

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. En una feria, un participante tiene la oportunidad de ganar premios eligiendo entre tres cajas sorpresa: una con premio y dos vacías. Hay una regla especial si se selecciona una caja vacía:

En caso de elegir una caja sin premio, se debe extraer una bola al azar de una urna compuesta por 2 bolas verdes y 3 negras, de idéntica forma y tamaño. Si se elige la bola negra, finaliza la jugada sin premio. Si se elige la bola verde, tendrá la oportunidad de elegir una nueva caja, de las dos cajas no seleccionadas anteriormente, y acabaría la jugada.

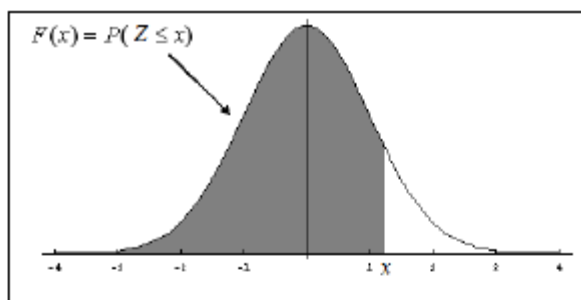
Responder a las siguientes cuestiones:

- a) Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos de este juego.
 b) Calcular la probabilidad de obtener premio en este juego.
 c) Si el participante ha obtenido premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido una bola verde en la urna?

4B. La temperatura diurna en el Parque Nacional de las Cañadas del Teide durante el mes de agosto sigue una distribución normal. La temperatura media durante el día es de 22°C con desviación típica de 5°C. Además, se sabe que, las condiciones ideales para realizar senderismo es cuando la temperatura diurna se sitúa entre 18°C y 25°C. Si se superan los 30°C, los excursionistas tendrían un riesgo elevado de insolación. Mientras que, si la temperatura se sitúa por debajo de los 15°C, existe riesgo de cambios meteorológicos bruscos previstos para ese día.

Se está elaborando una guía informativa para los servicios de emergencia. Responder a lo siguiente:

- a) ¿Qué probabilidad hay de que un día de agosto se den las condiciones ideales para realizar senderismo?
 b) ¿Cuántos días de agosto se espera que haya senderistas con riesgo de insolación?
 c) Si las Cañadas del Teide recibe un promedio de 11000 visitantes diarios en el mes de agosto y, de ellos, un 5% realiza senderismo. ¿Cuántos visitantes se estima que se puedan ver afectados por cambios meteorológicos bruscos a lo largo de dicho mes?



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

Bloque 1.- Análisis (Metabolix)

1. En un hospital de las Islas Canarias, un equipo de investigación está analizando cómo se metaboliza en sangre un nuevo medicamento llamado Metabolix, utilizado para tratar infecciones bacterianas. La concentración residual del fármaco en el plasma sanguíneo, denotada como $f(x)$ (medida en miligramos por litro, mg/L), depende del tiempo transcurrido x (en horas) desde su administración. El estudio indica que el medicamento sigue dos fases diferenciadas:

- Fase de absorción: En las primeras dos horas, el fármaco se distribuye por el organismo.
- Fase de eliminación: A partir de la segunda hora, el fármaco empieza a eliminarse.

Este comportamiento se modeliza mediante la siguiente función matemática:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{9}{\sqrt{5x-1}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

El equipo de investigación necesita aclarar algunas dudas del modelo matemático:

- Confirmar si este modelo es realmente continuo. Justifica tu respuesta. 0.5
- La concentración residual varía con el tiempo, comprobar que la velocidad de crecimiento instantánea de la concentración residual a las 3 horas de administrar Metabolix es mayor que $-0.5 (mg/L)/h$. 0.75
- ¿Es cierto que la concentración residual del fármaco en la sangre siempre va disminuyendo con respecto al tiempo transcurrido? Averiguar en qué instante la concentración residual es máxima y calcular el valor de dicha concentración. 0.75
- Pasado un largo periodo de tiempo, ¿cuál será la concentración residual de este medicamento? 0.5

a) Esta función en el intervalo $[0, 2)$ es $f(x) = x^2 - 6x + 11$ que es continua.

En el intervalo $(2, +\infty)$ la función es $f(x) = \frac{9}{\sqrt{5x-1}}$, donde el radicando es positivo en el

intervalo indicado: $x > 2 \rightarrow 5x > 10 \rightarrow 5x - 1 > 9$.

Falta estudiar la continuidad en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= \frac{9}{\sqrt{5 \cdot 2 - 1}} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{9}{\sqrt{5x-1}} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 6x + 11 = 2^2 - 6 \cdot 2 + 11 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 3$$

La función es continua en $x = 2$.

La función es continua en su dominio $[0, +\infty)$.

b) En un entorno de $x = 3$ la función tiene la expresión $f(x) = \frac{9}{\sqrt{5x-1}}$. Obtenemos la derivada de la función para $x = 3$.

$$f(x) = \frac{9}{\sqrt{5x-1}} = 9(5x-1)^{-1/2} \Rightarrow f'(x) = 9 \cdot \frac{-1}{2} \cdot 5(5x-1)^{-1/2-1} = \frac{-45}{2}(5x-1)^{-3/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-45}{2\sqrt{(5x-1)^3}} \Rightarrow f'(3) = \frac{-45}{2\sqrt{(5 \cdot 3 - 1)^3}} = \frac{-45}{2\sqrt{14^3}} = \boxed{\frac{-45}{28\sqrt{14}} \approx -0.4295 > -0.5}$$

Hemos comprobado que $f'(3) = \frac{-45}{28\sqrt{14}} \approx -0.4295 > -0.5$.

c) Buscamos los puntos donde la derivada se anula (puntos críticos).

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-6 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{-45}{2\sqrt{(5x-1)^3}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-6=0 \rightarrow x=3 \notin [0,2) \\ \frac{-45}{2\sqrt{(5x-1)^3}} = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

La derivada nunca se anula y el signo de la misma es igual en cada intervalo.

En el intervalo $[0, 2)$ la derivada es $f'(x) = 2x-6$ que siempre es negativa para $0 \leq x < 2$.

En el intervalo $(2, +\infty)$ la derivada es $f'(x) = \frac{-45}{2\sqrt{(5x-1)^3}}$ que también es negativa.

La función siempre decrece.

La función es continua y siempre decrece por lo que la concentración máxima se producirá en $x=0$, siendo esta concentración $f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 11 = 11 \text{ mg/L}$.

d) Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{\sqrt{5x-1}} = \frac{9}{+\infty} = 0$$

Pasado un largo periodo de tiempo la concentración de la bacteria es 0 mg/L.

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Dada la matriz $M \in M_{2 \times 2}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

a) Para cualquier valor del parámetro a : comprobar que M es invertible y dar la expresión de M^{-1} .

b) Para $a = -1$, calcula el valor de la matriz X que satisface la ecuación $MA = B - MX$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 1.5$$

a) Comprobamos el valor del determinante de M .

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{vmatrix} = 2 - a + a - 3 = -1 \neq 0$$

Como el determinante de M es distinto de cero e independiente del valor de a , la matriz M es invertible para cualquier valor de a .

Hallamos la expresión de la inversa de la matriz M .

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^T)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a-3 & 2-a \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} 2-a & -a+3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 & a-3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Para $a = -1$ la matriz queda $M = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Despejamos X de la ecuación matricial.

$$MA = B - MX \Rightarrow MX = B - MA \Rightarrow X = M^{-1}(B - MA) = M^{-1}B - M^{-1}MA = M^{-1}B - A$$

Para $a = -1$ la inversa de la matriz M es $M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Determinamos la expresión de X .

$$\begin{aligned} X = M^{-1}B - A &= \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -3+4 & 0-8 & -9-4 \\ -1+1 & 0-2 & -3-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

2B. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro k . 1.25

b) Para $k = -1$, comprobar que $A^2 = 2A - I$, donde I denota la matriz identidad de orden 3.

Además, utilizando la igualdad anterior verifica, sin calcular la potencia, que $A^4 = 4A - 3I$.
1.25

a) Calculamos el determinante de A y averiguamos cuando vale cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{vmatrix} = 5k^2 + 16 + 16 + 8k + 8k - 20 = 5k^2 + 16k + 12$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 5k^2 + 16k + 12 = 0 \Rightarrow k = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 5 \cdot 12}}{2 \cdot 5} = \frac{-16 \pm 4}{10} = \begin{cases} \frac{-16+4}{10} = \boxed{-1.2 = k} \\ \frac{-16-4}{10} = \boxed{-2 = k} \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $k \neq -1.2$ y $k \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $k = -1.2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1.2 & 1 \\ -4 & 4 & -1.2 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta

de quitar la primera fila y la primera columna $\rightarrow \begin{vmatrix} -1.2 & 1 \\ 4 & -1.2 \end{vmatrix} = 1.44 - 4 = -2.56 \neq 0$. El

rango de A es 2.

CASO 3. $k = -2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. La fila tercera es proporcional a la segunda y la

columna segunda es proporcional a la tercera. Consideramos el menor de orden 2 que

resulta de quitar la tercera fila y la tercera columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 8 = -2 \neq 0$. El rango

de A es 2.

Resumiendo: Si $k \neq -1.2$ y $k \neq -2$ el rango de A es 3 y si $k = -1.2$ o $k = -2$ el rango de A es 2.

b) Para $k = -1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Comprobamos si se cumple la igualdad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25-8-8 & -20+4+8 & 10-4-2 \\ 10-2-4 & -8+1+4 & 4-1-1 \\ -20+8+4 & 16-4-4 & -8+4+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2A - I = 2 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Se observa que se cumple la igualdad $A^2 = 2A - I$.

Comprobamos que se cumple $A^4 = 4A - 3I$.

$$\boxed{A^4} = A^2 A^2 = \{A^2 = 2A - I\} = (2A - I)(2A - I) = 4A \cdot A - 2A - 2A + I \cdot I =$$

$$= 4A^2 - 4A + I = 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = \boxed{4A - 3I}$$

Queda demostrado que se cumple la igualdad $A^4 = 4A - 3I$.

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)**3A.** En el espacio tridimensional, dados el punto P y las rectas r_1 y r_2 siguientes:

$$P(2, -1, 1); \quad r_1: \begin{cases} 4x + 3y - 3z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 1 \end{cases}; \quad r_2: \frac{x+3}{2} = 2 - y = \frac{z+4}{3}$$

- a) Comprobar que $P \in r_1$ y que $P \notin r_2$. 0.25
- b) Hallar la distancia entre el punto P y el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 . 1
- c) Hallar el ángulo con el que se cortan las rectas r_1 y r_2 . 1.25

a) Comprobamos si el punto P pertenece a la recta r_1 .

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \text{¿} P(2, -1, 1) \in r_1? \\ & r_1: \begin{cases} 4x + 3y - 3z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 1 \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} & \begin{cases} 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = 2 \\ 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 = 1 \end{cases} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} & \begin{cases} 8 - 3 - 3 = 2 \\ 4 + 3 - 6 = 1 \end{cases} \end{aligned} \Rightarrow \text{¡SIIIII!} \end{aligned}$$

Se cumplen las dos igualdades y el punto P pertenece a la recta r_1 .Comprobamos si el punto P pertenece a la recta r_2 .

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \text{¿} P(2, -1, 1) \in r_2? \\ & r_2: \frac{x+3}{2} = 2 - y = \frac{z+4}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} & \frac{2+3}{2} = 2 - (-1) = \frac{1+4}{3} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} & \frac{5}{2} = 2 + 1 = \frac{5}{3} \end{aligned} \Rightarrow \text{¡NOOOO!} \end{aligned}$$

No se cumplen las igualdades y el punto P no pertenece a la recta r_2 .

b) Hallamos el punto Q de intersección de las dos rectas.

$$\begin{aligned} r_2: \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{3} & \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_2 = (2, -1, 3) \\ A(-3, 2, -4) \in r_2 \end{cases} \Rightarrow r_2: \begin{cases} x = -3 + 2\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = -4 + 3\alpha \end{cases} \\ r_1: \begin{cases} 4x + 3y - 3z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 1 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} 4(-3 + 2\alpha) + 3(2 - \alpha) - 3(-4 + 3\alpha) = 2 \\ 2(-3 + 2\alpha) - 3(2 - \alpha) - 6(-4 + 3\alpha) = 1 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} -12 + 8\alpha + 6 - 3\alpha + 12 - 9\alpha = 2 \\ -6 + 4\alpha - 6 + 3\alpha + 24 - 18\alpha = 1 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} -4\alpha = -4 \rightarrow \boxed{\alpha = 1} \\ -11\alpha = -11 \rightarrow \boxed{\alpha = 1} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 2 \cdot 1 = -1 \\ y = 2 - 1 = 1 \\ z = -4 + 3 \cdot 1 = -1 \end{cases} & \Rightarrow \boxed{Q(-1, 1, -1)} \end{aligned}$$

El punto de corte de las dos rectas es $Q(-1, 1, -1)$.

La distancia del punto P al punto Q es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left. \begin{array}{l} P(2, -1, 1) \\ Q(-1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (-1, 1, -1) - (2, -1, 1) = (-3, 2, -2)$$

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \boxed{\sqrt{17} \approx 4.12}$$

La distancia entre el punto P y el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 vale $\sqrt{17} \approx 4.12$ unidades.

c) Hallamos el ángulo que forman sus respectivos vectores directores.

$$r_2 : \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{3} \Rightarrow \vec{v}_2 = (2, -1, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(2, -1, 1) \in r_1 \\ Q(-1, 1, -1) \in r_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_1 = \overrightarrow{PQ} = (-3, 2, -2)$$

$$\cos(\vec{v}_2, \vec{u}_1) = \frac{|\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1|}{|\vec{v}_2| |\vec{u}_1|} = \frac{|(2, -1, 3) \cdot (-3, 2, -2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-6 - 2 - 6|}{\sqrt{14} \sqrt{17}} = \frac{14}{\sqrt{14} \sqrt{17}} \Rightarrow$$

$$(r_1, r_2) = \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{14}{17}} \right) \approx 25^\circ$$

El ángulo que forman las rectas tiene un valor aproximado de 25° .

3B. En el espacio tridimensional se consideran los siguientes elementos geométricos:

$$A(1,0,2); \quad \pi: -x+2y+z+1=0; \quad r: \begin{cases} 4x-7y+2z=7 \\ y-2z+5=0 \end{cases}$$

a) Hallar la posición relativa del plano π y la recta r . 1

b) Hallar el punto simétrico de A con respecto del plano π . 1.5

a) Hallamos un vector director de la recta.

$$r: \begin{cases} 4x-7y+2z=7 \\ y-2z+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-7y+2z=7 \\ y=2z-5 \end{cases} \Rightarrow 4x-14z+35+2z=7 \Rightarrow$$

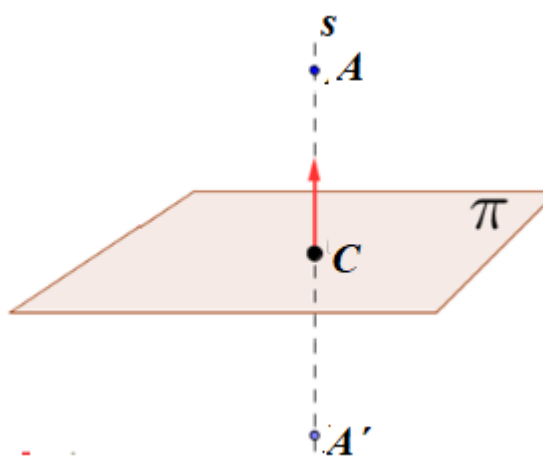
$$\Rightarrow 4x=-28+12z \Rightarrow x=-7+3z \Rightarrow r: \begin{cases} x=-7+3\lambda \\ y=-5+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r=(3,2,1) \\ P_r(-7,-5,0) \end{cases}$$

Comprobamos si el vector normal del plano y el director de la recta son perpendiculares, es decir, si su producto escalar es nulo.

$$\pi: -x+2y+z+1=0 \Rightarrow \vec{n}=(-1,2,1) \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r=(3,2,1) \\ \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (-1,2,1)(3,2,1) = -3+4+1 = 2 \neq 0 \end{array} \right.$$

Al ser el producto escalar distinto de cero la recta ni está contenida en el plano ni es paralela al plano. La recta corta al plano en un único punto.

b) Hallamos la recta s perpendicular al plano π que pasa por el punto $A(1,0,2)$. Luego hallamos el punto C de corte de recta s y el plano. Por último, determinamos el punto A' simétrico de A respecto del plano π .



Hallo la ecuación de la recta s . Como es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano $\vec{n}=(-1,2,1)$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,2) \in s \\ \vec{v}_s = \vec{n} = (-1,2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$$

Hallo el punto C de corte de la recta s y el plano resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv -x + 2y + z + 1 = 0 \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + \lambda + 4\lambda + 2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow 6\lambda = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ y = 2 \cdot \frac{-1}{3} = \frac{-2}{3} \\ z = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

Las coordenadas del punto simétrico A' las hallamos sumando al punto C el vector $\overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} C\left(\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right) \\ A(1, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \left(\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right) - (1, 0, 2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

$$A' = C + \overrightarrow{AC} = \left(\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

El punto simétrico de A respecto del plano π es $A'\left(\frac{5}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

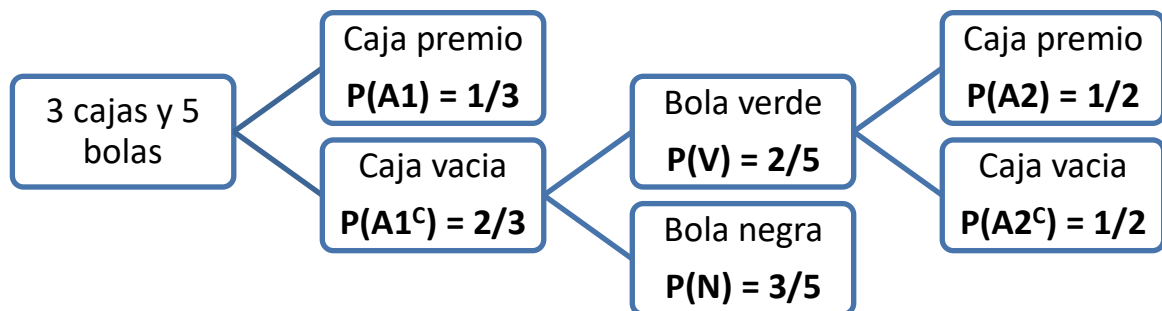
4A. En una feria, un participante tiene la oportunidad de ganar premios eligiendo entre tres cajas sorpresa: una con premio y dos vacías. Hay una regla especial si se selecciona una caja vacía:

En caso de elegir una caja sin premio, se debe extraer una bola al azar de una urna compuesta por 2 bolas verdes y 3 negras, de idéntica forma y tamaño. Si se elige la bola negra, finaliza la jugada sin premio. Si se elige la bola verde, tendrá la oportunidad de elegir una nueva caja, de las dos cajas no seleccionadas anteriormente, y acabaría la jugada.

Responder a las siguientes cuestiones:

- Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos de este juego.
- Calcular la probabilidad de obtener premio en este juego.
- Si el participante ha obtenido premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido una bola verde en la urna?

a) Dibujamos el diagrama de árbol pedido,



b) Hay dos formas de acabar sin premio y otras dos de acabar con premio. Sumamos las probabilidades de las dos formas de conseguir un premio.

$$P(\text{Premio}) = P(A1) + P(A1^c)P(V)P(A2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{15} \approx 0.4667$$

c) Nos piden calcular $P(V / \text{Premio})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V / \text{Premio}) = \frac{P(V \cap \text{Premio})}{P(\text{Premio})} = \frac{P(A1^c)P(V)P(A2)}{P(\text{Premio})} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{15}} = \frac{2}{7} \approx 0.2857$$

4B. La temperatura diurna en el Parque Nacional de las Cañadas del Teide durante el mes de agosto sigue una distribución normal. La temperatura media durante el día es de 22°C con desviación típica de 5°C. Además, se sabe que, las condiciones ideales para realizar senderismo es cuando la temperatura diurna se sitúa entre 18°C y 25°C. Si se superan los 30°C, los excursionistas tendrían un riesgo elevado de insolación. Mientras que, si la temperatura se sitúa por debajo de los 15°C, existe riesgo de cambios meteorológicos bruscos previstos para ese día.

Se está elaborando una guía informativa para los servicios de emergencia. Responder a lo siguiente:

- ¿Qué probabilidad hay de que un día de agosto se den las condiciones ideales para realizar senderismo?
- ¿Cuántos días de agosto se espera que haya senderistas con riesgo de insolación?
- Si las Cañadas del Teide recibe un promedio de 11000 visitantes diarios en el mes de agosto y, de ellos, un 5% realiza senderismo. ¿Cuántos visitantes se estima que se puedan ver afectados por cambios meteorológicos bruscos a lo largo de dicho mes?

Sea X = La temperatura diurna en el Parque Nacional de las Cañadas del Teide durante un día del mes de agosto. $X = N(22, 5)$.

- a) Debemos calcular $P(18 \leq X \leq 25)$.

$$P(18 \leq X \leq 25) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{18-22}{5} \leq Z \leq \frac{25-22}{5}\right) = P(-0.8 \leq Z \leq 0.6) =$$

$$= P(Z \leq 0.6) - P(Z \leq -0.8) = P(Z \leq 0.6) - P(Z \geq 0.8) =$$

$$= P(Z \leq 0.6) - [1 - P(Z \leq 0.8)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.7257 - 1 + 0.7881 = \boxed{0.5138}$$

	0	0,0'
0	0,5000	0,5040
0,1	0,5198	0,5438
0,2	0,5293	0,5832
0,3	0,5379	0,6217
0,4	0,5454	0,6591
0,5	0,5515	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7486	0,7611
0,8	0,7881	0,7910
0,9	0,8159	0,8186

La probabilidad de que un día de agosto las condiciones sean ideales para realizar senderismo vale 0.5138.

- b) Calculamos la probabilidad de que un día de agosto la temperatura supere los 30°C y exista riesgo elevado de insolación: $P(X \geq 30)$.

$$P(X > 30) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{30-22}{5}\right) = P(Z > 1.6) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.6) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9452 = \boxed{0.0548}$$

	0	
0	0.5000	0.5
0,1	0.5398	0.5
0,2	0.5793	0.5
0,3	0.6179	0.6
0,4	0.6554	0.6
0,5	0.6915	0.6
0,6	0.7257	0.7
0,7	0.7580	0.7
0,8	0.7881	0.7
0,9	0.8159	0.8
1	0.8413	0.8
1,1	0.8643	0.8
1,2	0.8849	0.8
1,3	0.9032	0.9
1,4	0.9192	0.9
1,5	0.9332	0.9
1,6	0.9452	0.9

Como agosto tiene 31 días el número de días que se espera la temperatura supere los 30° y haya alto riesgo de insolación son $31 \cdot 0.548 = 1.6988$, aproximadamente 2 días.

- c) Hallamos la probabilidad de que un día los visitantes se puedan ver afectados por cambios meteorológicos bruscos, es decir, que la temperatura diurna sea inferior a 15°: $P(X \leq 15)$.

$$P(X \leq 15) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{15-22}{5}\right) = P(Z \leq -1.4) = P(Z \geq 1.4) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.4) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9192 = \boxed{0.0808}$$

	0	
0	0.5000	0.5
0,1	0.5398	0.5
0,2	0.5793	0.5
0,3	0.6179	0.6
0,4	0.6554	0.6
0,5	0.6915	0.6
0,6	0.7257	0.7
0,7	0.7580	0.7
0,8	0.7881	0.7
0,9	0.8159	0.8
1	0.8413	0.8
1,1	0.8643	0.8
1,2	0.8849	0.8
1,3	0.9032	0.9
1,4	0.9192	0.9
1,5	0.9332	0.9

Como agosto tiene 31 días se espera que la temperatura sea inferior a 15° en $31 \cdot 0.0808 = 2.5048$ días, aproximadamente 3 días.

De los 11000 visitantes diarios realizarán senderismo $11000 \cdot 0.05 = 550$. Como en 3 días habrán temperaturas inferiores a 15° tenemos que $550 \cdot 3 = 1650$ visitantes se verán afectados por cambios meteorológicos bruscos.