



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

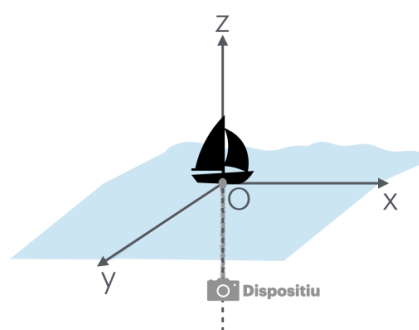
Model 2

La prueba consta de cuatro partes: la primera no tiene diferentes opciones, y las otras tres tienen dos posibles problemas, a contestar uno. En caso de contestar dos problemas de una misma parte, sólo se evaluará al primero.

Justificad las respuestas usando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Se permite utilizar calculadora científica básica, pero NO se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde).

Parte A. Contestad el único problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema A1. — Un grupo de investigación de la Escuela Politécnica Superior de la UIB participó en diciembre de 2023 en un estudio de las profundidades marinas. El equipo desplegó diversas tecnologías marinas avanzadas con el fin de explorar y recoger datos de hábitats marinos en una profundidad de 350 m. Por este motivo, una embarcación con el equipo de investigación se dirigió hacia unas coordenadas marinas específicas.



- a) [1 punto] Una vez alcanzado el punto deseado en la superficie del mar, llamémosle O, sumergieron un dispositivo verticalmente 315 m (véase la figura). A continuación, éste se desplazó 37 m sobre la recta

$$\begin{cases} x = 0 \\ 35y + 12z = -3780 \end{cases}$$

hasta alcanzar la profundidad deseada. Calcula el punto donde se situó el dispositivo después de este movimiento considerando el punto O el centro de referencia (el origen de coordenadas).

- b) [0.5 puntos] Si queremos mantener la profundidad deseada (350 m), ¿sobre qué plano debe desplazarse el dispositivo?
- c) [1 punto] Se deja que el dispositivo se desplace libremente sobre el plano calculado en el apartado b) y se va monitoreando desde el barco. Con un GPS se ha detectado, desde el barco, la presencia de un objeto (posiblemente un pez) que se desplaza en la línea recta sobre la trayectoria

$$\begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 10 + \lambda \\ z = -380 + 10\lambda \end{cases}$$

Si dicho objeto no cambia su trayectoria, ¿podría chocar contra el dispositivo? En caso afirmativo, ¿en qué punto podría tener lugar la colisión?

Parte B. Escoged un solo problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema B1. — Una empresa de construcción necesita comprar diferentes materias primas para elaborar sus productos. Se construyen 4 productos diferentes, los cuales requieren una cierta cantidad de madera (que tiene un coste de x €/kg), de hierro (que tiene un coste de y €/kg)

y de plástico (que tiene un coste de z €/kg). Para la elaboración de los diferentes productos se ha recopilado la siguiente información sobre el coste en materias primas:

Producto 1: $2x + y - z = 40$ €,

Producto 2: $x - y + 2z = 90$ €,

Producto 3: $x + 2y = 70$ €,

Producto 4: $x - y + z = 50$ €.

- (a) [0.5 puntos] Describe qué significa la ecuación del producto 1.
 (b) [2 puntos] Con los datos de que disponemos, ¿es posible calcular el precio del kg de cada materia primera? Es decir, ¿calcular x , y , z ? Justifica tu respuesta.

Problema B2. — Sean A y B dos matrices 3×3 tales que A es invertible. Sea I la matriz identidad de dimensión 3×3 .

- (a) [1 punto] Sabiendo que $AB + I = A$, calcula la inversa de A en función de I y B .
 (b) [1.5 puntos] Sabiendo que A y su inversa A^{-1} son tales que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula la matriz B que satisface la igualdad $AB + I = A$. ¿Es B invertible? Justifica la respuesta.

Parte C. Escoged sólo un problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema C1. — La función que describe la altitud A de un terreno (en metros) sobre un tramo de 500 metros es

$$A(x) = -0.0001x^3 + 0.05x^2 - 4x + 200,$$

donde $x \in [0, 500]$ es la distancia recorrida horizontalmente, medida en metros.

- (a) [1.5 puntos] Demuestra que existe al menos un punto x donde la altitud es 0 dentro del tramo considerado.

Indicación: se puede utilizar el teorema de Bolzano.

- (b) [1 punto] Estudia los puntos críticos de la función y su crecimiento/decrecimiento para concluir si este punto es único o no. ¿Lo es? Justifica la respuesta.

Problema C2. — Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(2x),$$

- (a) [1 punto] Determina el dominio de la función y el comportamiento de la función en los extremos de su dominio.

- (b) [1.5 puntos] Calcula el área comprendida entre $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas

$$x = \frac{1}{2} \text{ y } x = 5.$$

Parte D. Escoged sólo un problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema D1. — Supongamos que la probabilidad de tener tuberculosis es de 0.0005. Sabiendo que la probabilidad de que la prueba dé positivo sabiendo que la enfermedad está presente es del 99% y la probabilidad que dé negativo cuando la enfermedad no está presente también es del 99%, responde:

- (a) [1.25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que el test dé positivo si la persona no tiene la enfermedad?
 (b) [1.25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de tener tuberculosis si el resultado de la prueba es negativo?

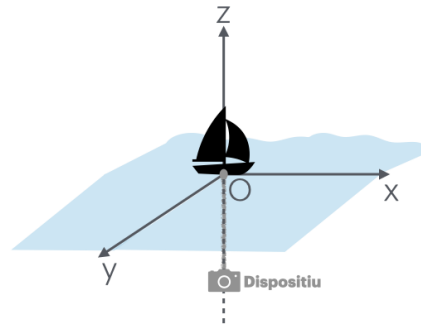
Problema D2. — En una universidad española, el 55% del alumnado son mujeres y el 45% son hombres. En esta universidad, el 13% de las mujeres estudia una carrera STEM, mientras que el 37% de los hombres también estudian una. Si seleccionamos un estudiante al azar:

- (a) **[0.75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccionado estudie STEM?
- (b) **[1 punto]** Sabiendo que el estudiante seleccionado estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
- (c) **[0.75 puntos]** Sabiendo que el estudiante escogido NO estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

SOLUCIONES

Parte A. Contestad el único problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema A1. — Un grupo de investigación de la Escuela Politécnica Superior de la UIB participó en diciembre de 2023 en un estudio de las profundidades marinas. El equipo desplegó diversas tecnologías marinas avanzadas con el fin de explorar y recoger datos de hábitats marinos en una profundidad de 350 m. Por este motivo, una embarcación con el equipo de investigación se dirigió hacia unas coordenadas marinas específicas.



- a) [1 punto] Una vez alcanzado el punto deseado en la superficie del mar, llamémosle O, sumergieron un dispositivo verticalmente 315 m (véase la figura). A continuación, éste se desplazó 37 m sobre la recta

$$\begin{cases} x = 0 \\ 35y + 12z = -3780 \end{cases}$$

hasta alcanzar la profundidad deseada. Calcula el punto donde se situó el dispositivo después de este movimiento considerando el punto O el centro de referencia (el origen de coordenadas).

- b) [0.5 puntos] Si queremos mantener la profundidad deseada (350 m), ¿sobre qué plano debe desplazarse el dispositivo?
- c) [1 punto] Se deja que el dispositivo se desplace libremente sobre el plano calculado en el apartado b) y se va monitoreando desde el barco. Con un GPS se ha detectado, desde el barco, la presencia de un objeto (posiblemente un pez) que se desplaza en la línea recta sobre la trayectoria

$$\begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 10 + \lambda \\ z = -380 + 10\lambda \end{cases}$$

Si dicho objeto no cambia su trayectoria, ¿podría chocar contra el dispositivo? En caso afirmativo, ¿en qué punto podría tener lugar la colisión?

- a) Partimos del punto O(0, 0, 0) y descendemos en vertical 315 metros hasta alcanzar el punto A(0, 0, -315). Desde este punto A nos desplazamos una longitud de 37 metros sobre una recta. Hallamos un vector director de la recta con módulo 37 y le sumamos al punto A este vector obteniendo un punto B que se supone estará a 350 metros de profundidad. Hallamos un vector director de la recta.

$$\begin{cases} x = 0 \\ 35y + 12z = -3780 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 35y = -3780 - 12z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{3780}{35} - \frac{12}{35}z = -108 - \frac{12}{35}z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -108 - \frac{12}{35}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, -108, 0) \\ \vec{v}_r = \left(0, -\frac{12}{35}, 1\right) \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r = 35\vec{v}_r = 35\left(0, -\frac{12}{35}, 1\right) = (0, -12, 35)$$

Hallamos un vector con módulo 37 en la dirección de $\vec{u}_r = (0, -12, 35)$.

$$\vec{u} = a\vec{u}_r = a(0, -12, 35) = (0, -12a, 35a)$$

$$|\vec{u}| = 37 \Rightarrow \sqrt{0^2 + (-12a)^2 + (35a)^2} = 37 \Rightarrow 144a^2 + 1225a^2 = 1369 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1369a^2 = 1369 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 = (0, -12, 35) \\ \vec{u}_2 = (0, 12, -35) \end{cases}$$

Como debe descender más (hasta los 350 metros) tomamos el vector $\vec{u}_2 = (0, 12, -35)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_2 = (0, 12, -35) \\ A(0, 0, -315) \end{array} \right\} \Rightarrow B = A + \vec{u}_2 = (0, 0, -315) + (0, 12, -35) = (0, 12, -350)$$

El punto donde se situó el dispositivo después de este movimiento es $B = (0, 12, -350)$.

- b) Debemos hallar el plano que contiene el punto $B = (0, 12, -350)$ con vector normal $\vec{n} = (0, 0, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (0, 0, 1) \\ B = (0, 12, -350) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : z + D = 0 \\ B = (0, 12, -350) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -350 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 350 \Rightarrow \pi : z + 350 = 0$$

El plano por el que debe moverse tiene ecuación $\pi : z + 350 = 0$.

- c) Debemos comprobar si la recta corta el plano $\pi : z + 350 = 0$. Intentamos resolver el sistema formado por la ecuación del plano y la ecuación de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : z + 350 = 0 \\ \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 10 + \lambda \\ z = -380 + 10\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -380 + 10\lambda + 350 = 0 \Rightarrow 10\lambda = 30 \Rightarrow \lambda = \frac{30}{10} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 + 4 \cdot 3 = 17 \\ y = 10 + 3 = 13 \\ z = -380 + 10 \cdot 3 = -350 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(17, 13, -350)}$$

Si podrían colisionar, siendo el punto de posible colisión $P(17, 13, -350)$.

Parte B. Escoged un solo problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema B1. — Una empresa de construcción necesita comprar diferentes materias primas para elaborar sus productos. Se construyen 4 productos diferentes, los cuales requieren una cierta cantidad de madera (que tiene un coste de x €/kg), de hierro (que tiene un coste de y €/kg) y de plástico (que tiene un coste de z €/kg). Para la elaboración de los diferentes productos se ha recopilado la siguiente información sobre el coste en materias primas:

$$\text{Producto 1: } 2x + y - z = 40 \text{ €},$$

$$\text{Producto 2: } x - y + 2z = 90 \text{ €},$$

$$\text{Producto 3: } x + 2y = 70 \text{ €},$$

$$\text{Producto 4: } x - y + z = 50 \text{ €}.$$

(a) [0.5 puntos] Describe qué significa la ecuación del producto 1.

(b) [2 puntos] Con los datos de que disponemos, ¿es posible calcular el precio del kg de cada materia primera? Es decir, ¿calcular x , y , z ? Justifica tu respuesta.

(a) La ecuación $2x + y - z = 40$ € significa que el gasto en el producto 1 se debe repartir de forma que 2 kg de madera más 1 kg de hierro menos 1 kg de plástico sean iguales a 40 €. O dicho de otra manera $2x + y = 40 + z$ que las cantidades para construir el producto 1 cumplen que 2 kg de madera más 1 kg de hierro supera en 40 € el precio de 1 kg de plástico.

(b) Intentamos resolver el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 40 \\ x - y + 2z = 90 \\ x + 2y = 70 \\ x - y + z = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 40 \\ x - y + 2z = 90 \\ x = 70 - 2y \\ x - y + z = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 140 - 4y + y - z = 40 \\ 70 - 2y - y + 2z = 90 \\ 70 - 2y - y + z = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3y - z = -100 \\ -3y + 2z = 20 \\ -3y + z = -20 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3y + 100 = z \\ -3y + 2z = 20 \\ -3y + z = -20 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3y - 6y + 200 = 20 \\ -3y - 3y + 100 = -20 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -9y = -180 \\ -6y = -120 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{-180}{-9} = 20 \\ y = \frac{-120}{-6} = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = -3 \cdot 20 + 100 = 40 \\ x = 70 - 2 \cdot 20 = 30 \end{array} \right\}$$

El sistema se puede resolver y se pueden calcular los valores de x , y , z que cumplen las condiciones impuestas.

El problema planteado tiene como solución: el precio del kg de madera a 30 €, el kg de hierro a 20 € y el kg de plástico a 40 €.

Problema B2. — Sean A y B dos matrices 3×3 tales que A es invertible. Sea I la matriz identidad de dimensión 3×3 .

(a) [1 punto] Sabiendo que $AB + I = A$, calcula la inversa de A en función de I y B.

(b) [1.5 puntos] Sabiendo que A y su inversa A^{-1} son tales que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula la matriz B que satisface la igualdad $AB + I = A$. ¿Es B invertible? Justifica la respuesta.

(a) Despejamos I de la igualdad.

$$AB + I = A \Rightarrow I = A - AB = A(I - B) \Rightarrow I - B = A^{-1}$$

La inversa de la matriz A es $A^{-1} = I - B$.

(b) Hemos obtenido en el apartado anterior que si $AB + I = A$ entonces $A^{-1} = I - B$, Obtenemos la expresión de la matriz B.

$$A^{-1} = I - B \Rightarrow B = I - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matriz B tiene la expresión $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Para que sea invertible su determinante debe ser distinto de cero. Lo comprobamos.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 + \frac{3}{4} + 0 - 0 + \frac{1}{4} = 1 \neq 0$$

La matriz B es invertible.

Parte C. Escoged sólo un problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema C1. — La función que describe la altitud A de un terreno (en metros) sobre un tramo de 500 metros es

$$A(x) = -0.0001x^3 + 0.05x^2 - 4x + 200,$$

donde $x \in [0, 500]$ es la distancia recorrida horizontalmente, medida en metros.

(a) **[1.5 puntos]** Demuestra que existe al menos un punto x donde la altitud es 0 dentro del tramo considerado.

Indicación: se puede utilizar el teorema de Bolzano.

(b) **[1 punto]** Estudia los puntos críticos de la función y su crecimiento/decrecimiento para concluir si este punto es único o no. ¿Lo es? Justifica la respuesta.

(a) Buscamos el valor “ x ” tal que $A(x) = 0$.

$$A(x) = 0 \Rightarrow -0.0001x^3 + 0.05x^2 - 4x + 200 = 0 \Rightarrow x^3 - 500x^2 - 40000x + 2000000 = 0 \Rightarrow$$

Esta ecuación es difícil de resolver. Lo intentamos de otra manera. No nos piden hallar el punto solo demostrar que existe.

Comprobamos el signo de la función en los extremos del intervalo $[0, 500]$.

$$\left. \begin{aligned} A(0) &= -0.0001 \cdot 0^3 + 0.05 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 200 = 200 > 0 \\ A(500) &= -0.0001 \cdot 500^3 + 0.05 \cdot 500^2 - 4 \cdot 500 + 200 = -1800 < 0 \end{aligned} \right\}$$

La función es continua en el intervalo $[0, 500]$, pues es una función polinómica. La función toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo. Podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $c \in (0, 500)$ tal que $A(c) = 0$.

(b) Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$A(x) = -0.0001x^3 + 0.05x^2 - 4x + 200 \Rightarrow A'(x) = -0.0003x^2 + 0.1x - 4$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow -0.0003x^2 + 0.1x - 4 = 0 \Rightarrow 0.003x^2 - x + 40 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 0.003 \cdot 40}}{2 \cdot 0.003} = \frac{1 \pm \frac{\sqrt{13}}{5}}{0.006} = \begin{cases} \frac{1 + \frac{\sqrt{13}}{5}}{0.006} = \frac{5 + \sqrt{13}}{0.03} \approx 286.85 \\ \frac{1 - \frac{\sqrt{13}}{5}}{0.006} = \frac{5 - \sqrt{13}}{0.03} \approx 46.48 \end{cases}$$

La función tiene dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

• En el intervalo $\left[0, \frac{5 - \sqrt{13}}{0.03}\right)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

$$A'(10) = -0.0003 \cdot 10^2 + 0.1 \cdot 10 - 4 = -3.03 < 0. \text{ La función decrece en } \left[0, \frac{5 - \sqrt{13}}{0.03}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{0.03}, \frac{5+\sqrt{13}}{0.03}\right)$ tomamos $x=100$ y la derivada vale $A'(100) = -0.0003 \cdot 100^2 + 0.1 \cdot 100 - 4 = 3 > 0$. La función crece en $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{0.03}, \frac{5+\sqrt{13}}{0.03}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{0.03}, 500\right]$ tomamos $x=400$ y la derivada vale $A'(400) = -0.0003 \cdot 400^2 + 0.1 \cdot 400 - 4 = -12 < 0$. La función decrece en $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{0.03}, 500\right]$.

La función decrece en $\left[0, \frac{5-\sqrt{13}}{0.03}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{13}}{0.03}, 500\right]$ y crece en $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{0.03}, \frac{5+\sqrt{13}}{0.03}\right)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = \frac{5-\sqrt{13}}{0.03} \approx 46.48$ y un máximo relativo en $x = \frac{5+\sqrt{13}}{0.03} \approx 286.85$.

Valoramos la función en los extremos del intervalo y en los puntos máximo y mínimo relativo.

$$\left. \begin{aligned} A(0) &= 200 > 0 \\ A(46.48) &= -0.0001 \cdot 46.48^3 + 0.05 \cdot 46.48^2 - 4 \cdot 46.48 + 200 = 112.06 > 0 \\ A(286.85) &= -0.0001 \cdot 286.85^3 + 0.05 \cdot 286.85^2 - 4 \cdot 286.85 + 200 = 806.46 > 0 \\ A(500) &= -1800 < 0 \end{aligned} \right\}$$

Como la función es continua y tenemos que la función empieza siendo positiva en $x=0$, luego decrece hasta $x=46.48$ de 200 a 112.06 que sigue siendo positivo no corta el eje de abscisas en el intervalo $[0, 46.48]$.

Luego crece desde $x=46.48$ hasta $x=286.85$ alcanzando la función un valor de 806.46. Tampoco puede cortar la gráfica de la función el eje de abscisas pues la función siempre es positiva.

En el intervalo $[286.85, 500]$ la función decrece desde un valor de 806.46 hasta un valor negativo -1800 por lo que la función corta el eje de abscisas en este intervalo $[286.85, 500]$.

Además, este punto de corte es único pues de haber otro punto de corte con el eje de abscisas en el intervalo $[286.85, 500]$ debería haber un punto en ese intervalo donde se anule la derivada y ese punto no existe (teorema de Rolle).

Problema C2. — Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(2x),$$

(a) **[1 punto]** Determina el dominio de la función y el comportamiento de la función en los extremos de su dominio.

(b) **[1.5 puntos]** Calcula el área comprendida entre $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = 5$.

(a) El dominio de la función son todos los valores reales que hacen que $2x > 0$. El dominio es $(0, +\infty)$.

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a 0.

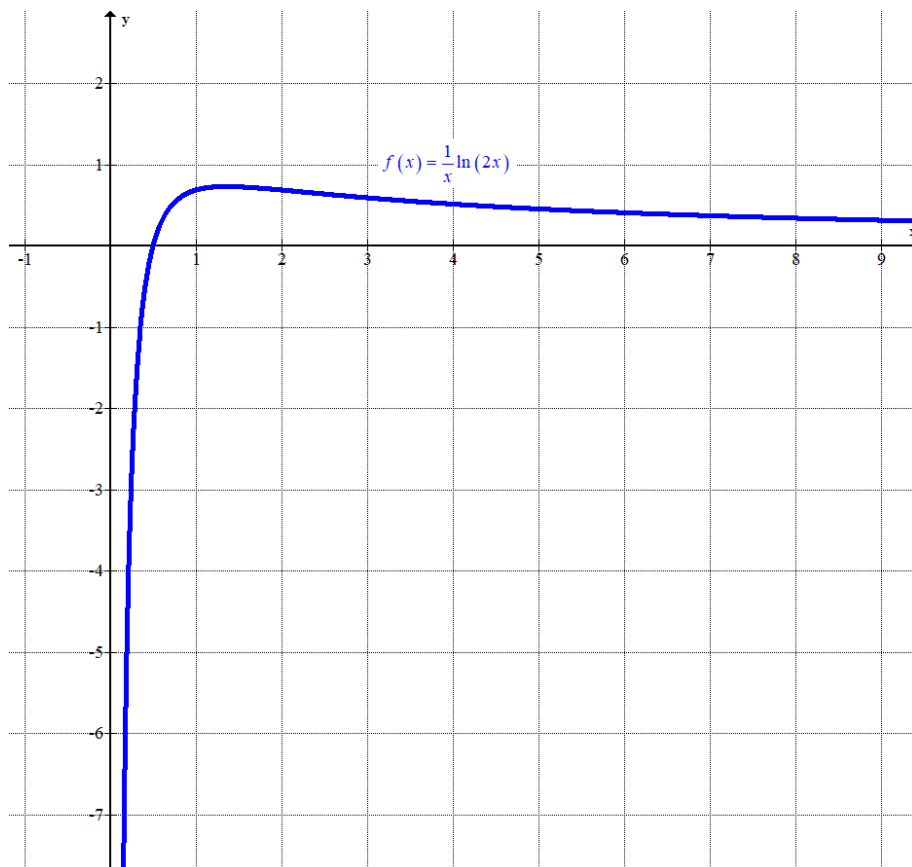
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln(2x) = \frac{1}{0^+} \cdot (-\infty) = (+\infty)(-\infty) = \boxed{-\infty}$$

La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{2x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = \boxed{0} \end{aligned}$$

La función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.



(b) Hallamos el punto de corte de la gráfica con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{x} \ln(2x) \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\ln(2x)}{x} = 0 \Rightarrow \ln(2x) = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Como el punto de corte está en $x = \frac{1}{2}$ y la función es positiva en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$ el área del recinto es el valor de la integral definida de la función entre $\frac{1}{2}$ y 5.

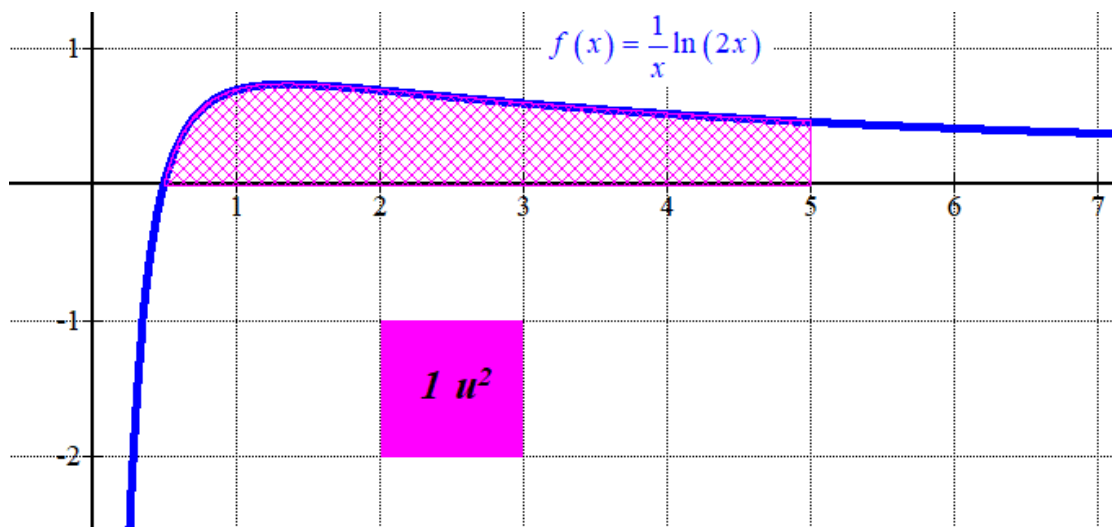
Hallamos primero la integral indefinida de la función.

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{1}{x} \ln(2x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \ln(2x) = t \rightarrow \frac{2}{2x} dx = \frac{1}{x} dx = dt \rightarrow dx = x dt \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{1}{x} t x dt = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\ln(2x))^2}{2} + C \end{aligned}$$

Usamos este resultado para calcular el valor del área.

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^5 f(x) dx &= \left[\frac{(\ln(2x))^2}{2} \right]_{1/2}^5 = \frac{(\ln(2 \cdot 5))^2}{2} - \frac{\left(\ln\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) \right)^2}{2} = \\ &= \frac{(\ln 10)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \boxed{\frac{(\ln 10)^2}{2} \approx 2.65} \end{aligned}$$

El área tiene un valor aproximado de $\frac{(\ln 10)^2}{2} \approx 2.65$ unidades cuadradas.



Parte D. Escoged sólo un problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema D1. — Supongamos que la probabilidad de tener tuberculosis es de 0.0005. Sabiendo que la probabilidad de que la prueba dé positivo sabiendo que la enfermedad está presente es del 99% y la probabilidad que dé negativo cuando la enfermedad no está presente también es del 99%, responde:

- (a) **[1.25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el test dé positivo si la persona no tiene la enfermedad?
- (b) **[1.25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de tener tuberculosis si el resultado de la prueba es negativo?

Llamamos T a “tener la Tuberculosis”, D+ a “dar positivo en la prueba” y D− a “dar negativo en la prueba”. Sabemos que $P(T) = 0.0005$, $P(T^c) = 1 - 0.0005 = 0.9995$, $P(D+/T) = 0.99$ y $P(D-/T^c) = 0.99$.

- (a) Nos piden calcular $P(D+/T^c)$.

$$P(D+/T^c) = 1 - P(D-/T^c) = 1 - 0.99 = \boxed{0.01}$$

- (b) Debemos calcular $P(T/D-)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(T/D-) &= \frac{P(T \cap D-)}{P(D-)} = \frac{P(T)P(D-/T)}{P(T)P(D-/T) + P(T^c)P(D-/T^c)} = \\ &= \frac{0.0005 \cdot (1 - 0.99)}{0.0005 \cdot (1 - 0.99) + 0.9995 \cdot 0.99} = \boxed{\frac{1}{197902} \approx 0.000005} \end{aligned}$$

La probabilidad es muy baja, prácticamente es nula. La prueba es muy fiable.

Problema D2. — En una universidad española, el 55% del alumnado son mujeres y el 45% son hombres. En esta universidad, el 13% de las mujeres estudia una carrera STEM, mientras que el 37% de los hombres también estudian una. Si seleccionamos un estudiante al azar:

(a) **[0.75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccionado estudie STEM?

(b) **[1 punto]** Sabiendo que el estudiante seleccionado estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

(c) **[0.75 puntos]** Sabiendo que el estudiante escogido NO estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Supongamos que hay 10000 alumnos en la universidad. El 55% son mujeres, es decir, hay 5500 mujeres universitarias y 4500 hombres universitarios. El 13 % de las mujeres estudia una carrera STEM, es decir, $0.13 \cdot 5500 = 715$ mujeres estudian una carrera STEM. El 37 % de los hombres estudian una carrera STEM, es decir, $0.37 \cdot 4500 = 1665$ hombres estudian una carrera STEM.

(a) De los 10000 estudiantes hay $715 + 1665 = 2380$ que estudian una STEM. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que el estudiante seleccionado estudie

$$\text{STEM es de } \frac{2380}{10000} = 0.238.$$

(b) Hay 2380 estudiantes de una carrera STEM y de ellos 715 son mujeres. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que sea mujer el universitario elegido que estudia

$$\text{STEM es de } \frac{715}{2380} = \frac{143}{476} \approx 0.3004.$$

(c) Hay $10000 - 2380 = 7620$ estudiantes que NO estudian STEM y de ellos son $5500 - 715 = 4785$ las mujeres que no estudian STEM. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que sea mujer el universitario que NO estudia STEM elegido es de

$$\frac{4785}{7620} = \frac{319}{508} \approx 0.628.$$