



Universidad de
Oviedo

Prueba de acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2024-2025

MATEMÁTICAS II

- Responda en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste **una única opción**, A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. Opción A Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) **(0.75 puntos)** Encuentre todos los valores de a para los cuales el sistema de ecuaciones homogéneo $AX = [0]$ tiene infinitas soluciones. ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema no tenga solución? Razone sus respuestas.
- (b) **(0.75 puntos)** Suponiendo que A es la matriz ampliada de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Calcule los valores de a para los cuales el sistema tiene solución.
- (c) **(1 punto)** Resuelva el sistema homogéneo de apartado (a), para el valor de $a = 0$.

Pregunta 1. Opción B Una matriz M verifica que $\det(M) = x$. (Los apartados siguientes son independientes.) Se pide:

- (a) **(1 punto)** Supongamos que la matriz M tiene 2 filas y 2 columnas, y que $M^2 = (x-1)I$, siendo I la matriz identidad. Calcule todos los valores de $x \in \mathbb{R}$.
- (b) **(0.75 puntos)** Supongamos ahora que la matriz M tiene 3 filas y 3 columnas. Estudie si existe algún valor de x para el que pueda ser

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

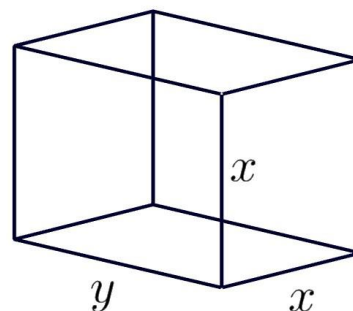
- (c) **(0.75 puntos)** Supongamos ahora que el tamaño de M es 3×3 , que $x \neq 0$ y que $M = xM^2$. Calcule los posibles valores de x y $\det(M^{-1})$ para cada uno de ellos.

Pregunta 2. Opción A Un depósito tiene una tubería de entrada de agua y un grifo. Se estudia la cantidad de agua del depósito en cada instante t a lo largo de 4 horas, teniendo en cuenta que en ocasiones se descarga por la apertura del grifo. Se observa que la cantidad de agua viene dada por la función: $f(t) = 2\cos(t + \pi/2) + 10$, donde $t \in [0, 4]$. Se pide:

- (a) **(1 punto)** Calcular los máximos y mínimos de la función.
- (b) **(0.75 puntos)** Demostrar que el depósito no se vacía nunca.
- (c) **(0.75 puntos)** Deducir durante cuánto tiempo el depósito está aumentando el volumen de agua durante esas 4 horas.

Pregunta 2. Opción B

Se quiere construir una caja sin tapa de forma que tenga dos caras paralelas cuadradas de lado x y tres caras rectangulares, dos de ellas paralelas, de lados x e y , como la figura. Si se quiere utilizar 3 m^2 de material, calcule los valores de x e y para que la capacidad de la caja sea máxima.



Pregunta 3. Opción A Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Se pide:

- (a) **(1.25 puntos)** Una primitiva de la función f que en 0 valga 1.
- (b) **(1.25 puntos)** Calcular el área encerrada entre la gráfica de f , el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Pregunta 3. Opción B Se sabe que la función $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 5$ es una primitiva de una función g , donde $a, b \in \mathbb{R}$ son valores desconocidos, pero constantes. Se pide:

- (a) **(1 punto)** Determinar la función $g(x)$ en función de los parámetros a y b
- (b) **(0.5 puntos)** ¿Podría dar la forma de todas las primitivas de g en función de una constante K ?
- (c) **(1 punto)** Sabiendo que $g(1) = 2$ y $g(0) = 1$, determinar la función g .

Pregunta 4. Opción A Se consideran los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(-1, 1, 3)$. Se pide que:

- (a) **(1 punto)** Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto medio entre A y B y es perpendicular a la recta que los contiene.
- (b) **(1 punto)** Calcule las distancias de A y B al plano π .
- (c) **(0.5 puntos)** Tome un punto cualquiera del plano π , distinto del calculado en el apartado (a). Calcule su distancia a A y a B y compruebe que es la misma.

Pregunta 4. Opción B Se consideran la recta $r = \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + \beta z = 3$

. Se pide:

- (a) **(0.75 puntos)** Calcular, en caso de que exista, el valor de $\beta \in \mathbb{R}$ que hace que r y π sean paralelos.
- (b) **(0.75 puntos)** Calcular, en caso de que exista, el valor de β para que el plano y la recta sean perpendiculares.
- (c) **(1 punto)** Para $\beta = 0$, calcular el simétrico del punto $(-1, 0, 1)$ respecto del plano π .

Pregunta 5. Opción A Supongamos que tenemos en un monedero 5 monedas de 1 euro, 3 de 2 euros y 2 de 10 céntimos.

- (a) **(1.25 puntos)** Si sacamos 3 monedas al azar del monedero ¿cuál es la probabilidad de que al menos una sea de 1 euro?
- (b) **(1.25 puntos)** Sacamos dos monedas una tras otra (sin reemplazamiento) ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea de 10 céntimos?

Pregunta 5. Opción B La esperanza de vida de un elefante sigue una distribución normal de media 82 años y desviación típica 30.

- (a) **(0.75 puntos)** ¿Qué porcentaje de población de elefantes se espera que viva más de 100 años?
- (b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 4 elefantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno supere los 100 años de vida?
- (c) **(1 punto)** Calcula un valor $a \in \mathbb{R}$ que haga que el 98% de los elefantes tengan una esperanza de vida menor o igual que $82 + a$.

Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.6$, $F(0.6) = 0.7257$, $F(2.06) = 0.98$, $F(0.98) = 0.8365$..
Si tus valores no están entre los expuestos, toma el más cercano.

SOLUCIONES

Pregunta 1. Opción A Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) **(0.75 puntos)** Encuentre todos los valores de a para los cuales el sistema de ecuaciones homogéneo $AX = [0]$ tiene infinitas soluciones. ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema no tenga solución? Razone sus respuestas.
- (b) **(0.75 puntos)** Suponiendo que A es la matriz ampliada de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Calcule los valores de a para los cuales el sistema tiene solución.
- (c) **(1 punto)** Resuelva el sistema homogéneo de apartado (a), para el valor de $a = 0$.

(a) Al ser un sistema homogéneo el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada es siempre el mismo. El sistema siempre tiene solución.

Para que el sistema homogéneo tenga infinitas soluciones el rango de la matriz de coeficientes A debe tener rango menor de 3 (número de incógnitas). El determinante de A debe ser nulo.

$$|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4 + 10 - 12a + 10a - 6 - 8 = 0 \Rightarrow -2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

Para $a = 0$ el rango de A es menor de 3. El sistema tendrá infinitas soluciones.

El sistema siempre va a tener solución. Un sistema homogéneo siempre tiene la solución trivial $x = y = z = 0$. No existe un valor de a para que el sistema no tenga solución.

(b) Si A es la matriz ampliada de un sistema de 3 ecuaciones y 2 incógnitas la matriz de

coeficientes es $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene rango 2, pues tiene un menor de orden 2 con

determinante no nulo: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$.

Para que tenga solución el sistema el determinante de A debe ser nulo para que el rango de la matriz ampliada pueda ser 2, igual al rango de la matriz de coeficientes. Debe ser $a = 0$.

(c) Para $a = 0$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ y el sistema homogéneo sería

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 0 \\ -3x + 2y + 2z = 0 \\ -5x + 4y + 2z = 0 \end{array} \right\} \text{ Lo resolvemos.}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 0 \\ -3x + 2y + 2z = 0 \\ -5x + 4y + 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = y \\ -3x + 2y + 2z = 0 \\ -5x + 4y + 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3y + 2y + 2z = 0 \\ -5y + 4y + 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -y + 2z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{y = 2z} \Rightarrow \boxed{x = 2z} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.

Pregunta 1. Opción B Una matriz M verifica que $\det(M) = x$. (Los apartados siguientes son independientes.) Se pide:

(a) **(1 punto)** Supongamos que la matriz M tiene 2 filas y 2 columnas, y que $M^2 = (x-1)I$, siendo I la matriz identidad. Calcule todos los valores de $x \in \mathbb{R}$.

(b) **(0.75 puntos)** Supongamos ahora que la matriz M tiene 3 filas y 3 columnas. Estudie si existe algún valor de x para el que pueda ser

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) **(0.75 puntos)** Supongamos ahora que el tamaño de M es 3×3 , que $x \neq 0$ y que $M = xM^2$. Calcule los posibles valores de x y $\det(M^{-1})$ para cada uno de ellos.

(a) Tomamos determinantes en la igualdad $M^2 = (x-1)I$.

$$\det(M^2) = \det((x-1)I) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I \text{ es } 2 \times 2 \\ \det(aI) = a^2 \det I \end{array} \right\} \Rightarrow (\det(M))^2 = (x-1)^2 \det(I) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \det(I) = 1 \\ \det(M) = x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = (x-1)^2 \Rightarrow x^2 = x^2 + 1 - 2x \Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Para $x = \frac{1}{2}$ se cumple la igualdad.

(b) Calculamos el determinante de la matriz M .

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -x - 1 + 2x = x - 1$$

No se cumple la igualdad $\det(M) = x$. No existe ningún valor x para el que la matriz A cumpla que $\det(M) = x$.

(c) Aplicamos determinantes en la igualdad $M = xM^2$.

$$\det(M) = \det(xM^2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M^2 \text{ es } 3 \times 3 \\ \det(xM^2) = x^3 \det(M^2) \end{array} \right\} \Rightarrow x = x^3 \det(M^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = x^3 (\det(M))^2 \Rightarrow x = x^3 \cdot x^2 \Rightarrow x = x^5 \Rightarrow x^5 - x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^4 - 1) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ x^4 - 1 = 0 \rightarrow x^4 = 1 \rightarrow \boxed{x = \sqrt[4]{1} = \pm 1} \end{array} \right.$$

Como $x \neq 0$ entonces se cumple para $x = -1$ y para $x = 1$.

Para $x = -1$ tenemos que $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)} = \frac{1}{-1} = -1$.

Para $x = 1$ tenemos que $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)} = \frac{1}{1} = 1$

Pregunta 2. Opción A Un depósito tiene una tubería de entrada de agua y un grifo. Se estudia la cantidad de agua del depósito en cada instante t a lo largo de 4 horas, teniendo en cuenta que en ocasiones se descarga por la apertura del grifo. Se observa que la cantidad de agua viene dada por la función: $f(t) = 2\cos(t + \pi/2) + 10$, donde $t \in [0, 4]$. Se pide:

- (a) **(1 punto)** Calcular los máximos y mínimos de la función.
 (b) **(0.75 puntos)** Demostrar que el depósito no se vacía nunca.
 (c) **(0.75 puntos)** Deducir durante cuánto tiempo el depósito está aumentando el volumen de agua durante esas 4 horas.

(a) Derivamos la función y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$f(t) = 2\cos(t + \pi/2) + 10 \Rightarrow f'(t) = -2\sin(t + \pi/2)$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow -2\sin(t + \pi/2) = 0 \Rightarrow \sin(t + \pi/2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow t = \frac{-\pi}{2} \notin [0, 4] \\ t + \frac{\pi}{2} = \pi \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \approx 1.57 \in [0, 4] \\ t + \frac{\pi}{2} = 2\pi \rightarrow t = \frac{3\pi}{2} \approx 4.71 \notin [0, 4] \end{cases}$$

La función tiene un punto crítico en $t = \frac{\pi}{2} \approx 1.57 \in [0, 4]$.

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f'(t) = -2\sin(t + \pi/2) \Rightarrow f''(t) = -2\cos(t + \pi/2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos(\pi) = 2 > 0$$

Como la segunda derivada es positiva la función tiene un mínimo relativo en $\frac{\pi}{2}$.

Calculamos el valor de la función en los extremos del intervalo de definición y en el mínimo.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 2\cos(0 + \pi/2) + 10 = 10 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2\cos(\pi/2 + \pi/2) + 10 = 2\cos(\pi) + 10 = 8 \text{ Mínimo} \\ f(4) &= 2\cos(4 + \pi/2) + 10 \approx 11.51 \text{ Máximo} \end{aligned} \right\}$$

El mínimo de la función en el intervalo $[0, 4]$ es 8 y se obtiene en $t = \frac{\pi}{2}$.

El máximo de la función en el intervalo $[0, 4]$ es 11.51 y se obtiene en $t = 4$.

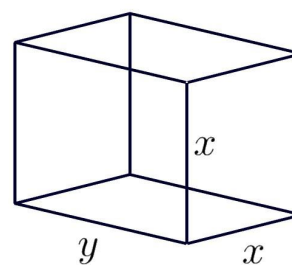
- (b) El depósito no se vacía nunca pues su valor mínimo es 8 que es mayor que 0.

(c) La cantidad de agua en el depósito disminuye desde $t = 0$ hasta $t = \frac{\pi}{2}$ y crece desde $t = \frac{\pi}{2}$ hasta $t = 4$.

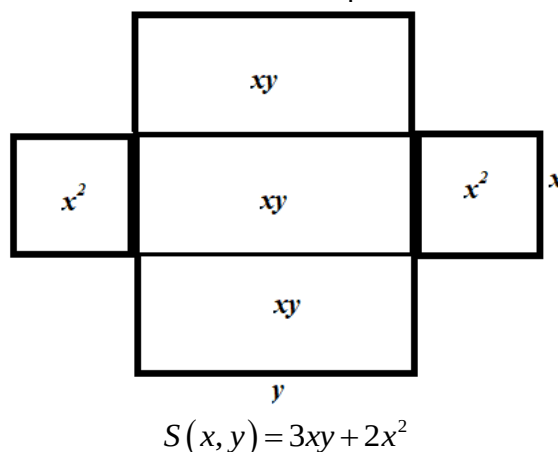
El depósito está aumentando el volumen de agua durante $4 - \frac{\pi}{2} \approx 2.43$ horas.

Pregunta 2. Opción B

Se quiere construir una caja sin tapa de forma que tenga dos caras paralelas cuadradas de lado x y tres caras rectangulares, dos de ellas paralelas, de lados x e y , como la figura. Si se quiere utilizar 3 m^2 de material, calcule los valores de x e y para que la capacidad de la caja sea máxima.



Determinamos la expresión del material necesario para construir la caja.



Este material vale 3. Despejamos y en la igualdad.

$$S(x, y) = 3 \Rightarrow 3xy + 2x^2 = 3 \Rightarrow 3xy = 3 - 2x^2 \Rightarrow y = \frac{3 - 2x^2}{3x}$$

Obtenemos la expresión del volumen de la caja.

$$\left. \begin{array}{l} V(x, y) = xy \cdot x = x^2 y \\ y = \frac{3 - 2x^2}{3x} \end{array} \right\} \Rightarrow V(x) = x^2 \frac{3 - 2x^2}{3x} = x \frac{3 - 2x^2}{3} = \frac{3x - 2x^3}{3} = x - \frac{2}{3}x^3$$

Derivamos esta función y buscamos cuando se anula la derivada.

$$V(x) = x - \frac{2}{3}x^3 \Rightarrow V'(x) = 1 - \frac{2}{3}3x^2 = 1 - 2x^2$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Solo consideramos el valor positivo al tratarse de una longitud. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$V'(x) = 1 - x^2 \Rightarrow V''(x) = -2x \Rightarrow V''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa la función volumen tiene un máximo relativo para

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Para este valor calculamos } y = \frac{3 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3 - 2\frac{1}{2}}{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.9428.$$

La caja de máxima capacidad que se puede montar tiene de dimensiones

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707 \text{ metros e } y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.9428 \text{ metros.}$$

Pregunta 3. Opción A Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Una primitiva de la función f que en 0 valga 1.

(b) **(1.25 puntos)** Calcular el área encerrada entre la gráfica de f , el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

(a) Hallamos la primitiva de $f(x)$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

Aplicamos la condición $F(0) = 1$ para determinar el valor de C .

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \\ F(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \ln(1+0^2) + C \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \ln(1) + C \Rightarrow \boxed{C=1}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + 1$.

(b) Averiguamos si la función corta el eje X entre -1 y 1 .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x}{x^2+1} \\ \text{Eje X} \rightarrow y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \in (-1, 1)$$

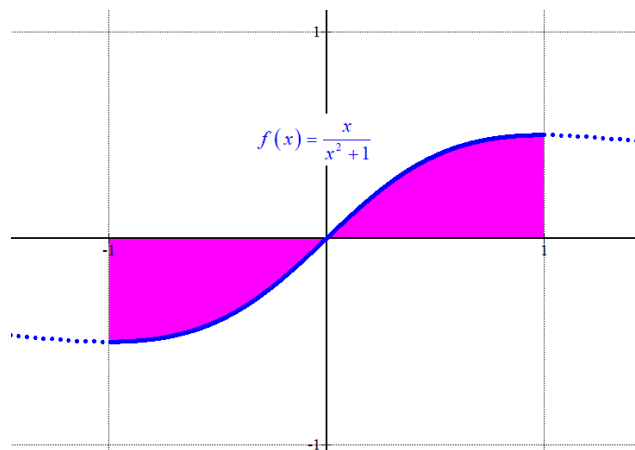
Calculamos el área pedida como la suma de los valores absolutos de la integral definida entre -1 y 0 de la función más la integral definida entre 0 y 1 de la función.

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{-1}^0 = \left[\frac{1}{2} \ln(1+0^2) \right] - \left[\frac{1}{2} \ln(1+(-1)^2) \right] = -\frac{1}{2} \ln 2$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \left[\frac{1}{2} \ln(1+1^2) \right] - \left[\frac{1}{2} \ln(1+0^2) \right] = \frac{1}{2} \ln 2$$

El área encerrada entre la gráfica de f , el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$ vale

$$\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \ln 2 \approx 0.6931 \text{ unidades cuadradas.}$$



Pregunta 3. Opción B Se sabe que la función $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 5$ es una primitiva de una función g , donde $a, b \in \mathbb{R}$ son valores desconocidos, pero constantes. Se pide:

- (a) **(1 punto)** Determinar la función $g(x)$ en función de los parámetros a y b
 (b) **(0.5 puntos)** ¿Podría dar la forma de todas las primitivas de g en función de una constante K ?
 (c) **(1 punto)** Sabiendo que $g(1) = 2$ y $g(0) = 1$, determinar la función g .

(a) La función $g(x)$ es la derivada de la función $G(x)$.

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 5 \Rightarrow g(x) = G'(x) = \frac{3}{3}x^2 + 2ax + b = x^2 + 2ax + b$$

La función tiene la expresión $g(x) = x^2 + 2ax + b$.

(b) Como una de sus primitivas es $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 5$ cualquier primitiva de la función

$$g(x) \text{ tiene la expresión } F(x) = G(x) + K = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + K$$

(c) Aplicamos las dos condiciones dadas para determinar los valores de a y b .

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = x^2 + 2ax + b \\ g(1) = 2 \\ g(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1^2 + 2a + b = 2 \\ 0^2 + 2a \cdot 0 + b = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a + b = 1 \\ b = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a + 1 = 1 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

Los valores buscados son $a = 0$ y $b = 1$. La función queda $g(x) = x^2 + 1$.

Pregunta 4. Opción A Se consideran los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(-1, 1, 3)$. Se pide que:

- (a) **(1 punto)** Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto medio entre A y B y es perpendicular a la recta que los contiene.
 (b) **(1 punto)** Calcule las distancias de A y B al plano π .
 (c) **(0.5 puntos)** Tome un punto cualquiera del plano π , distinto del calculado en el apartado (a). Calcule su distancia a A y a B y compruebe que es la misma.

(a) Hallamos el punto medio C del segmento AB.

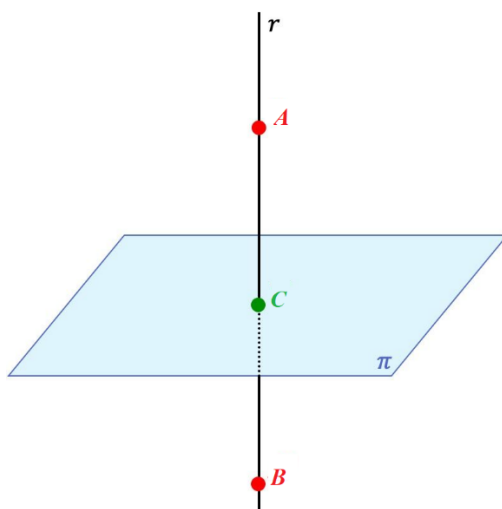
$$\left. \begin{array}{l} A(1,1,1) \\ B(-1,1,3) \end{array} \right\} \Rightarrow C = \frac{(1,1,1) + (-1,1,3)}{2} = (0,1,2)$$

El plano perpendicular a la recta tiene como vector normal el vector director de la recta $\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{AB} = (-1,1,3) - (1,1,1) = (-2,0,2) \\ C(0,1,2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : -2x + 2z + D = 0 \\ C(0,1,2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow 4 + D = 0 \Rightarrow D = -4 \Rightarrow \pi : -2x + 2z - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x - z + 2 = 0}$$

El plano que pasa por el punto medio entre A y B y es perpendicular a la recta que los contiene tiene ecuación $\pi : x - z + 2 = 0$.



(b) Hallamos las distancias pedidas. Estas distancias deben valer lo mismo pues el plano está en medio de los dos puntos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - z + 2 = 0 \\ A(1,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(A, \pi) = \frac{|1 - 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - z + 2 = 0 \\ B(-1,1,3) \end{array} \right\} \Rightarrow d(B, \pi) = \frac{|-1 - 3 + 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

- (c) Hallamos un punto P del plano π distinto del punto C. Como la coordenada “y” no aparece en la ecuación del plano podemos tomar esta coordenada como 0.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - z + 2 = 0 \\ x = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - z + 2 = 0 \Rightarrow 4 = z \Rightarrow P(2, 0, 4)$$

Calculamos la distancia del punto P a los puntos A y B y comprobaremos que vale lo mismo. De hecho, el plano hallado en el apartado (b) contiene todos los puntos del espacio equidistantes de A y B. Esto es lo que vamos a demostrar.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,1,1) \\ B(-1,1,3) \\ P(2,0,4) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AP} = (2,0,4) - (1,1,1) = (1,-1,3) \\ \overrightarrow{BP} = (2,0,4) - (-1,1,3) = (3,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11} \\ |\overrightarrow{BP}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{11} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(A, P) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{11} = |\overrightarrow{BP}| = d(B, P)$$

Pregunta 4. Opción B Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x+y+\beta z=3$

. Se pide:

- (a) **(0.75 puntos)** Calcular, en caso de que exista, el valor de $\beta \in \mathbb{R}$ que hace que r y π sean paralelos.
 (b) **(0.75 puntos)** Calcular, en caso de que exista, el valor de β para que el plano y la recta sean perpendiculares.
 (c) **(1 punto)** Para $\beta = 0$, calcular el simétrico del punto $(-1, 0, 1)$ respecto del plano π .

- (a) Para que la recta sea paralela al plano su vector director debe ser perpendicular al vector normal del plano. Además, ningún punto de la recta debe pertenecer al plano.

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2-y-x \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow 2x-y+2-y-x=0 \Rightarrow x-2y+2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=2y-2} \Rightarrow z=2-y-2y+2=-3y+4 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-2+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=4-3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r=(2,1,-3) \\ Q_r(-2,0,4) \end{cases}$$

$$\pi \equiv 2x+y+\beta z=3 \Rightarrow \vec{n}=(2,1,\beta)$$

Hacemos que el producto escalar de $\vec{v}_r=(2,1,-3)$ y $\vec{n}=(2,1,\beta)$ sea nulo.

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (2,1,\beta)(2,1,-3) = 0 \Rightarrow 4+1-3\beta=0 \Rightarrow 5-3\beta=0 \Rightarrow \boxed{\beta=\frac{5}{3}}$$

Para $\beta = \frac{5}{3}$ los vectores son perpendiculares. Comprobamos que el punto $Q_r(-2,0,4)$ de la recta no pertenece al plano $\pi \equiv 2x+y+\frac{5}{3}z=3$.

$$\left. \begin{aligned} \pi \equiv 2x+y+\frac{5}{3}z=3 \\ \text{¿} Q_r(-2,0,4) \in \pi? \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2(-2)+0+\frac{5}{3}4=0? \Rightarrow \text{¿} -4+\frac{20}{3}=0? \text{ ¡¡No!!}$$

Para $\beta = \frac{5}{3}$ la recta es paralela al plano.

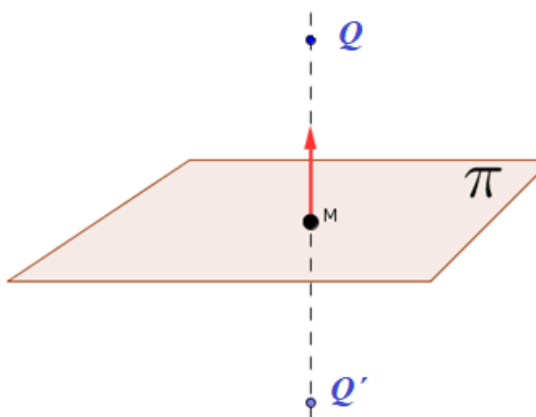
- (b) Para que la recta sea perpendicular al plano el vector director de la recta debe tener coordenadas proporcionales a las del vector normal del plano.

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_r=(2,1,-3) \\ \vec{n}=(2,1,\beta) \\ r \perp \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{1}{1} = \frac{-3}{\beta} \Rightarrow \boxed{\beta=-3}$$

Para $\beta = -3$ la recta es perpendicular al plano.

(c) Para $\beta = 0$ el plano queda $\pi \equiv 2x + y = 3$.

Para obtener el punto Q' simétrico de $Q(-1, 0, 1)$ respecto del plano determinamos la recta que pasa por Q y es perpendicular al plano. Luego determinamos el punto M de corte de recta y plano y por último hallamos Q' sumando a M el vector $\overrightarrow{QM}$.



Hallo la ecuación de la recta. Como es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano.

$$\pi \equiv 2x + y = 3 \Rightarrow \vec{n} = (2, 1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q(-1, 0, 1) \in s \\ \vec{v}_s = \vec{n} = (2, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

Hallo el punto de corte de la recta s y el plano (lo llamamos M) resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + y = 3 \\ s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -2 + 4\lambda + \lambda = 3 \Rightarrow 5\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2 = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M(1, 1, 1)$$

Las coordenadas del punto simétrico Q' las hallamos sumando al punto M el vector $\overrightarrow{QM}$.

$$\left. \begin{array}{l} M(1, 1, 1) \\ Q(-1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{QM} = (1, 1, 1) - (-1, 0, 1) = (2, 1, 0)$$

$$Q' = M + \overrightarrow{QM} = (1, 1, 1) + (2, 1, 0) = (3, 2, 1)$$

El punto simétrico de Q respecto del plano π es $Q'(3, 2, 1)$

Pregunta 5. Opción A Supongamos que tenemos en un monedero 5 monedas de 1 euro, 3 de 2 euros y 2 de 10 céntimos.

- (a) **(1.25 puntos)** Si sacamos 3 monedas al azar del monedero ¿cuál es la probabilidad de que al menos una sea de 1 euro?
- (b) **(1.25 puntos)** Sacamos dos monedas una tras otra (sin reemplazamiento) ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea de 10 céntimos?

- (a) Hallamos la probabilidad de que ninguna moneda de las 3 sea de 1 euro. Llamamos A1, A2 y A3 a sacar moneda de 1 euro en primera, segunda y tercera extracción (sin reemplazamiento).

$$P(0 \text{ monedas de } 1\text{€}) = P(\overline{A1} \cap \overline{A2} \cap \overline{A3}) = P(A1)P(\overline{A2} / \overline{A1})P(\overline{A3} / (\overline{A1} \cap \overline{A2})) =$$

$$= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}$$

La probabilidad de que al menos una de las 3 monedas sea de 1 euro vale $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \approx 0.9167$

- (b) Después de realizar la primera extracción, en la segunda extracción (sin reemplazamiento) nos quedan 9 monedas y caben dos posibilidades que la primera haya sido una moneda de 10 céntimos o no.

Llamamos C1 y C2 a sacar moneda de 10 céntimos en primera y segunda extracción respectivamente.

Nos piden calcular $P(C2)$.

$$P(C2) = P(C1 \cap C2) + P(\overline{C1} \cap C2) = P(C1)P(C2 / C1) + P(\overline{C1})P(C2 / \overline{C1}) =$$

$$= \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \boxed{\frac{1}{5} = 0.2}$$

Pregunta 5. Opción B La esperanza de vida de un elefante sigue una distribución normal de media 82 años y desviación típica 30.

- (a) **(0.75 puntos)** ¿Qué porcentaje de población de elefantes se espera que viva más de 100 años?
 (b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 4 elefantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno supere los 100 años de vida?
 (c) **(1 punto)** Calcula un valor $a \in \mathbb{R}$ que haga que el 98% de los elefantes tengan una esperanza de vida menor o igual que $82 + a$.

Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.6$, $F(0.6) = 0.7257$, $F(2.06) = 0.98$, $F(0.98) = 0.8365$..

Si tus valores no están entre los expuestos, toma el más cercano.

- (a) X = La esperanza de vida de un elefante en años. $X = N(82, 30)$.

Calculamos $P(X \geq 100)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 100) &= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{100-82}{30}\right) = P(Z \geq 0.6) = \\ &= 1 - P(Z \leq 0.6) = \{\text{Miramos en la lista} \rightarrow F(0.6) = 0.7257\} = 1 - 0.7257 = \boxed{0.2743} \end{aligned}$$

El porcentaje de elefantes que viven más de 100 años es de 27.43%.

- (b) Consideramos la binomial Y = Número de elefantes que viven más de 100 años de un grupo de 4 elefantes. Los parámetros son $n = 4$ y $p = 0.2743$. $Y = B(4, 0.2743)$.

Nos piden calcular $P(Y \geq 1)$.

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{4}{0} 0.2743^0 (1 - 0.2743)^4 = 1 - 0.7257^4 = \boxed{0.7226}$$

La probabilidad de que al menos uno de los 4 elefantes supere los 100 años de vida es de 0.7226.

- (c) Tenemos que hallar “a” tal que $P(X \leq 82 + a) = 0.98$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 82 + a) &= 0.98 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{82 + a - 82}{30}\right) = 0.98 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{30}\right) = 0.98 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la lista} \\ F(2.06) = 0.98 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{30} = 2.06 \Rightarrow \boxed{a = 61.8} \end{aligned}$$

El valor buscado es $a = 61.8$.