



Universidad
Zaragoza

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2025

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El examen consta de cuatro preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2,5 puntos. La primera pregunta es obligatoria, mientras que en las tres últimas se deberá elegir entre Opción 1 y Opción 2, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirá la opción que aparezca en primer lugar en el tríptico.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 2, 3 y 4. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que se haya respondido en primer lugar).

Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. Queremos encriptar el mensaje “HOLA” con un sistema de encriptado que consta de los siguientes pasos:

Paso 1: Convertimos cada carácter del mensaje a encriptar (en nuestro caso la palabra “HOLA”) en un número según la tabla siguiente:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Paso 2: Construimos una matriz columna, M_c , con los cuatro números obtenidos en el paso anterior.

Paso 3: Multiplicamos la matriz de encriptado, $M_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, por la matriz M_c

obtenida en el paso anterior.

El resultado del último paso, M_{final} , es el mensaje encriptado.

a) (0,5 puntos) Obtén el mensaje encriptado al que se llega a partir del mensaje “HOLA” inicial.

b) (0,5 puntos) Explica cómo podríamos realizar el proceso de desencriptado para recuperar un mensaje a partir de un mensaje encriptado recibido.

c) (1 punto) Si hemos obtenido el mensaje encriptado $M_{final} = \begin{pmatrix} 30 \\ -21 \\ -25 \\ -16 \end{pmatrix}$ con el proceso descrito

arriba, ¿cuál es el mensaje original?

d) (0,5 puntos) Si quisiéramos utilizar otra matriz de encriptado, del mismo tamaño que M_E , ¿qué condición debería cumplir dicha matriz para poder realizar el proceso completo de encriptado y desencriptado sin problemas?

2. Elige entre 2.1 y 2.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

2.1 (2,5 puntos) Sean u y v dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ perpendiculares entre sí y $w = u \times v$ su producto vectorial. Se definen $a = (u \times v) + w$, $b = v \times (v \times w)$ y $c = u \cdot (v \times w)$. Indica si a , b y c son vectores o escalares (números). Para aquellos que sean vectores, justifica si son paralelos o perpendiculares a cada uno de los vectores u , v y w .

2.2 a) (1 punto) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el punto $P(4, -3, 0)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$.

b) (1,5 puntos) Halla la ecuación del plano que contiene al punto $Q(1, 2, 3)$ y a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

3. Elige entre 3.1 y 3.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

3.1 Queremos aproximar la función $f(x) = e^x$, con x en el intervalo $[0, 1]$, por otra función $g_m(x) = mx$ con m un parámetro en $\mathbb{R}$. Definimos como error de la aproximación la expresión

$$\text{err}(m) = \int_0^1 (f(x) - g_m(x))^2 dx$$

a) (1,5 puntos) Comprueba que $\text{err}(m) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 2m + \frac{m^2}{3}$ con $m \in \mathbb{R}$.

b) (1 punto) ¿Cuál es el valor de $m \in \mathbb{R}$ que minimiza el error? ¿Cuál será el valor mínimo del error?

3.2 a) (1,25 puntos) Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin(x^2)}{1 - \cos(x)}$$

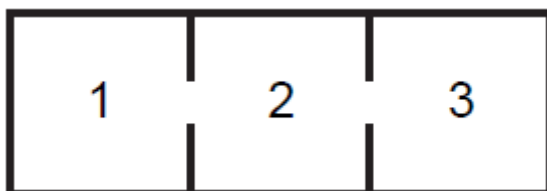
b) (1,25 puntos) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función

$$f(x) = \cos^2(x) \sin(x), \quad x \in [0, \pi]$$

y el eje de abscisas.

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 En un juego se cuenta con el siguiente tablero, de manera que una ficha puede desplazarse de la casilla 1 a la 2; de la 2 puede desplazarse a las casillas 1 y 3; y de la casilla 3 a la casilla 2.



Para decidir el movimiento a realizar en cada turno, se lanza una moneda equilibrada (misma probabilidad de cara y cruz). Si sale cara, se intenta desplazar la ficha a la izquierda; si sale cruz, a la derecha. En caso de no poder realizar el desplazamiento correspondiente, la ficha se queda en la casilla en la que está durante ese turno.

a) (0,5 puntos) Construye un árbol (o una tabla) que muestre las probabilidades de pasar de una casilla a otra en un turno.

b) (1 punto) Si la ficha se encuentra en la casilla 1, ¿cuál es la probabilidad de que tras tres turnos se encuentre de nuevo en la casilla 1?

c) (1 punto) Para comenzar el juego, se procede a un sorteo para ver dónde comienza la ficha. Si la probabilidad de empezar en la casilla 1 es $1/2$ y la probabilidad de empezar en la casilla 2 y en la 3 es de $1/4$ para cada una, ¿cuál es la probabilidad de que la ficha esté en cada una de las tres casillas dos turnos después de empezar?

4.2 Dados dos sucesos aleatorios de los que se sabe que $P(A|B) = 2/3$ y $P(B|A) = 3/4$.

a) (1 punto) Si A y B fueran independientes, ¿cuánto valdría $P(A \cup B)$?

b) (1,5 puntos) Si $P(A \cup B) = 5/6$, ¿cuáles son las probabilidades $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cap \bar{B})$?

SOLUCIONES

1. Queremos encriptar el mensaje “HOLA” con un sistema de encriptado que consta de los siguientes pasos:

Paso 1: Convertimos cada carácter del mensaje a encriptar (en nuestro caso la palabra “HOLA”) en un número según la tabla siguiente:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Paso 2: Construimos una matriz columna, M_C , con los cuatro números obtenidos en el paso anterior.

Paso 3: Multiplicamos la matriz de encriptado, $M_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, por la matriz M_C

obtenida en el paso anterior.

El resultado del último paso, M_{final} , es el mensaje encriptado.

a) (0,5 puntos) Obtén el mensaje encriptado al que se llega a partir del mensaje “HOLA” inicial.

b) (0,5 puntos) Explica cómo podríamos realizar el proceso de desencriptado para recuperar un mensaje a partir de un mensaje encriptado recibido.

c) (1 punto) Si hemos obtenido el mensaje encriptado $M_{final} = \begin{pmatrix} 30 \\ -21 \\ -25 \\ -16 \end{pmatrix}$ con el proceso descrito

arriba, ¿cuál es el mensaje original?

d) (0,5 puntos) Si quisiéramos utilizar otra matriz de encriptado, del mismo tamaño que M_E , ¿qué condición debería cumplir dicha matriz para poder realizar el proceso completo de encriptado y desencriptado sin problemas?

a) Las correspondencias son H – 8, O – 16, L – 12, A – 1 y la matriz queda $M_C = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Multiplicamos por la matriz M_E .

$$M_{final} = M_E M_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+16+12+1 \\ -8+0-12-1 \\ -8-16+0-1 \\ -8-16-12+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ -21 \\ -25 \\ -36 \end{pmatrix}$$

$4 \times \boxed{4} \cdot 4 \times 1 \longrightarrow 4 \times 1$

El mensaje encriptado es $M_{final} = \begin{pmatrix} 37 \\ -21 \\ -25 \\ -36 \end{pmatrix}$.

- b) Como $M_{final} = M_E M_C$ entonces $(M_E)^{-1} \cdot M_{final} = M_C$. Después miramos la correspondencia de cada número con la letra según la tabla y obtenemos el mensaje descifrado.

Calculamos la matriz inversa usando del método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ \text{Fila } 4^a + \text{Fila } 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{ \text{Fila } 1^a - \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 4^a \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow (M_E)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- c) Aplicamos el descifrado a la matriz cifrada $M_{final} = \begin{pmatrix} 30 \\ -21 \\ -25 \\ -16 \end{pmatrix}$.

$$M_C = (M_E)^{-1} \cdot M_{final} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ -21 \\ -25 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 + 21 + 25 + 16 \\ 30 - 21 + 0 + 0 \\ 30 + 0 - 25 + 0 \\ 30 + 0 + 0 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Buscando la correspondencia en la tabla: 2 – B, 9 – I, 5 – E, 14 – N.

La palabra que se ha enviado es BIEN.

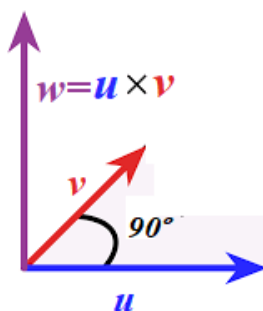
- d) La matriz de encriptado debe tener inversa (matriz de descifrado), por lo que su determinante debe ser distinto de cero.

2.1 (2,5 puntos) Sean u y v dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ perpendiculares entre sí y $w = u \times v$ su producto vectorial. Se definen $a = (u \times v) + w$, $b = v \times (v \times w)$ y $c = u \cdot (v \times w)$. Indica si a , b y c son vectores o escalares (números). Para aquellos que sean vectores, justifica si son paralelos o perpendiculares a cada uno de los vectores u , v y w .

$a = (u \times v) + w$ es un vector pues $u \times v$ es un vector (w) y al sumarle w obtenemos un vector que es igual a $2w$.

$b = v \times (v \times w)$ es un vector pues los productos vectoriales siempre dan como resultado un vector.

$c = u \cdot (v \times w)$ es un escalar, de hecho, es el producto mixto de los vectores u , v y w que se usa para determinar el volumen del paralelepípedo determinado por dichos vectores.



El vector $a = (u \times v) + w$ hemos visto que es igual a $2w$, por lo que es paralelo a w y perpendicular a u y v pues $a = 2(u \times v)$ y con el producto vectorial $u \times v$ obtenemos un vector perpendicular a u y v .

El vector $b = v \times (v \times w)$ es perpendicular a u y v , paralelo a w . Con $v \times w$ obtenemos un vector paralelo a u y con $v \times (v \times w)$ obtenemos un vector perpendicular a u y v , por lo tanto, paralelo a w .

Otra forma de razonarlo. Situamos el vector u sobre el eje X , así sería $u = (m, 0, 0)$. Situamos el vector v sobre el eje Y , así sería $v = (0, n, 0)$.

Al realizar el producto vectorial $u \times v$ tendríamos un vector w situado en el eje Z , así sería $w = (0, 0, mn)$.

$$w = u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ m & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \end{vmatrix} = mnk = (0, 0, mn)$$

El vector $v \times w$ estaría sobre el eje X y sería $v \times w = (mn^2, 0, 0)$.

$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & mn^2 \end{vmatrix} = mn^3i = (mn^3, 0, 0)$$

El vector $b = v \times (v \times w)$ estaría sobre el eje Z y sería paralelo a w y perpendicular a u y v .

$$b = v \times (v \times w) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & n & 0 \\ mn^3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = mn^4k = (0, 0, mn^4)$$

2.2 a) (1 punto) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el punto $P(4, -3, 0)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$.

b) (1,5 puntos) Halla la ecuación del plano que contiene al punto $Q(1, 2, 3)$ y a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

a) Si la recta debe ser perpendicular al plano π entonces debe tener como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -2, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = \vec{n} = (1, -2, 1) \\ P(4, -3, 0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -3 - 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) Hallamos dos puntos de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} x = y = 0 \\ \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 0 + z = 1 \\ 0 - 2 \cdot 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_r(0, 0, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 4, y = 2 \\ \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 2 + z = 1 \\ 4 - 2 \cdot 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -5 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow B_r(4, 2, -5)$$

El plano que contiene el punto Q y la recta r es el plano que contiene los puntos Q , A_r y B_r .

$$\left. \begin{array}{l} Q(1, 2, 3) \in \pi \\ A_r(0, 0, 1) \in \pi \\ B_r(4, 2, -5) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{A_r B_r} = (4, 2, -5) - (0, 0, 1) = (4, 2, -6) \\ \vec{v} = \overrightarrow{A_r Q} = (1, 2, 3) - (0, 0, 1) = (1, 2, 2) \\ A_r(0, 0, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 4 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x - 6y + 8(z-1) - 2(z-1) - 8y + 12x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 6y + 8z - 8 - 2z + 2 - 8y + 12x = 0 \Rightarrow 1$$

$$\Rightarrow 16x - 14y + 6z - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : 8x - 7y + 3z - 3 = 0}$$

La ecuación del plano que contiene al punto Q y a la recta r es $\pi : 8x - 7y + 3z - 3 = 0$.

3.1 Queremos aproximar la función $f(x) = e^x$, con x en el intervalo $[0, 1]$, por otra función $g_m(x) = mx$ con m un parámetro en $\mathbb{R}$. Definimos como error de la aproximación la expresión

$$\text{err}(m) = \int_0^1 (f(x) - g_m(x))^2 dx$$

a) (1,5 puntos) Comprueba que $\text{err}(m) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 2m + \frac{m^2}{3}$ con $m \in \mathbb{R}$.

b) (1 punto) ¿Cuál es el valor de $m \in \mathbb{R}$ que minimiza el error? ¿Cuál será el valor mínimo del error?

a) Determinamos la expresión de la función $\text{err}(m)$.

$$\text{err}(m) = \int_0^1 (f(x) - g_m(x))^2 dx = \int_0^1 (e^x - mx)^2 dx = \int_0^1 e^{2x} + m^2 x^2 - 2mxe^x dx = \dots$$

$$\int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

$$\dots = \left[\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{m^2 x^3}{3} - 2m(xe^x - e^x) \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^2 + \frac{m^2 \cdot 1^3}{3} - 2m(e^1 - e^1) \right] - \left[\frac{1}{2} e^0 + \frac{m^2 \cdot 0^3}{3} - 2m(0 \cdot e^0 - e^0) \right] = \boxed{\frac{e^2}{2} + \frac{m^2}{3} - \frac{1}{2} - 2m}$$

Queda comprobado que $\text{err}(m) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 2m + \frac{m^2}{3}$.

b) Derivamos la función y buscamos cuando se anula.

$$\text{err}(m) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 2m + \frac{m^2}{3} \Rightarrow \text{err}'(m) = -2 + \frac{2m}{3}$$

$$\text{err}'(m) = 0 \Rightarrow -2 + \frac{2m}{3} = 0 \Rightarrow \frac{2m}{3} = 2 \Rightarrow 2m = 6 \Rightarrow \boxed{m = 3}$$

Sustituimos $m = 3$ en la segunda derivada.

$$\text{err}'(m) = -2 + \frac{2m}{3} \Rightarrow \text{err}''(m) = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{err}''(3) = \frac{2}{3} > 0$$

Al tomar la segunda derivada valor positivo la función presenta un mínimo relativo en $m = 3$. El error se minimiza para $m = 3$. Hallamos el valor del error para $m = 3$.

$$\text{err}(3) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 2 \cdot 3 + \frac{3^2}{3} = \boxed{\frac{e^2}{2} - \frac{7}{2} \simeq 0.1945}$$

3.2 a) (1,25 puntos) Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \operatorname{sen}(x^2)}{1 - \cos(x)}$$

b) (1,25 puntos) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función

$$f(x) = \cos^2(x) \operatorname{sen}(x), \quad x \in [0, \pi]$$

y el eje de abscisas.

a) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \operatorname{sen}(x^2)}{1 - \cos(x)} = \frac{0^2 - \operatorname{sen}(0^2)}{1 - \cos(0)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2x \cos(x^2)}{0 + \operatorname{sen}(x)} = \frac{0 - 0}{\operatorname{sen}(0)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos(x^2) - 2x(-2x \operatorname{sen}(x^2))}{\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos(x^2) + 4x^2 \operatorname{sen}(x^2)}{\cos(x)} =$$

$$= \frac{2 - 2 \cos(0^2) + 4 \cdot 0^2 \operatorname{sen}(0^2)}{\cos(0)} = \frac{2 - 2}{1} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$$

b) Estudiamos si la gráfica de la función corta el eje de abscisas en el intervalo $[0, \pi]$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \cos^2(x) \operatorname{sen}(x) \\ \text{Eje abscisas} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \cos^2(x) \operatorname{sen}(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos(x) = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \end{cases}$$

Como la gráfica corta el eje de abscisas en $x = \frac{\pi}{2}$ la región la dividimos en dos partes.

Calculamos el área de esta región como el valor absoluto de la integral definida de la función entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$ más el valor absoluto de la integral definida de la función entre $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \pi$.

$$\int_0^{\pi/2} f(x) dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \operatorname{sen}(x) dx = \dots$$

$$\int \cos^2(x) \operatorname{sen}(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \cos(x) = t \rightarrow -\operatorname{sen}(x) dx = dt \\ \operatorname{sen}(x) dx = -dt \end{array} \right\} = \int t^2 (-dt) = -\int t^2 dt =$$

$$= -\frac{t^3}{3} = -\frac{\cos^3(x)}{3} + C$$

$$\dots = \left[-\frac{\cos^3(x)}{3} \right]_0^{\pi/2} = \left[-\frac{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3} \right] - \left[-\frac{\cos^3(0)}{3} \right] = \boxed{\frac{1}{3}}$$

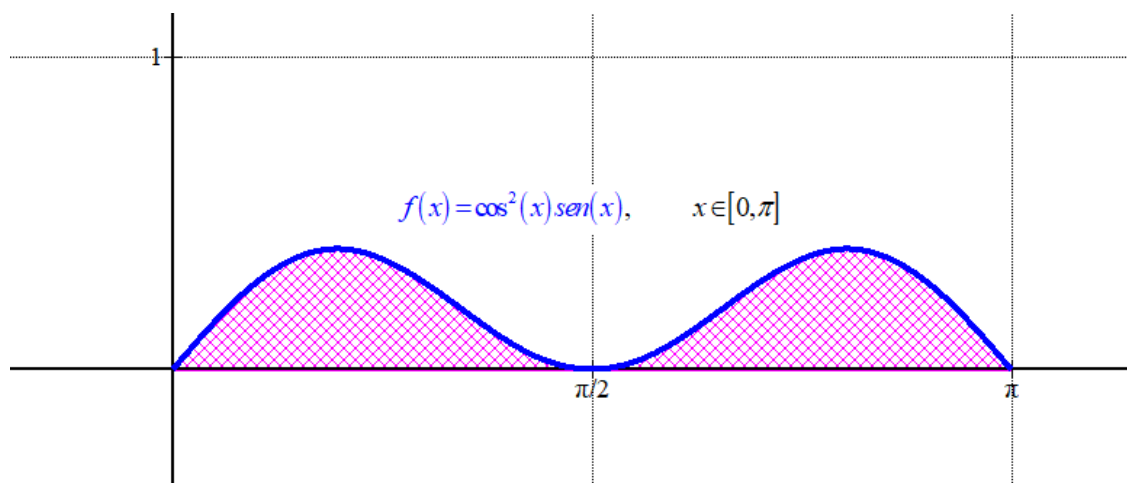
El área de la primera parte de la región vale $1/3$ unidades cuadradas.

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(x) dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2(x) \operatorname{sen}(x) dx = \left[-\frac{\cos^3(x)}{3} \right]_{\pi/2}^{\pi} =$$

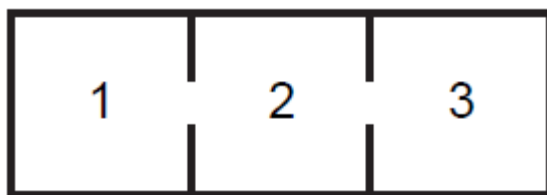
$$= \left[-\frac{\cos^3(\pi)}{3} \right] - \left[-\frac{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3} \right] = \frac{1}{3} + 0 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

El área de la segunda parte de la región vale $1/3$ unidades cuadradas.

El área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = \cos^2(x) \operatorname{sen}(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, \pi]$ vale $2/3$ unidades cuadradas.



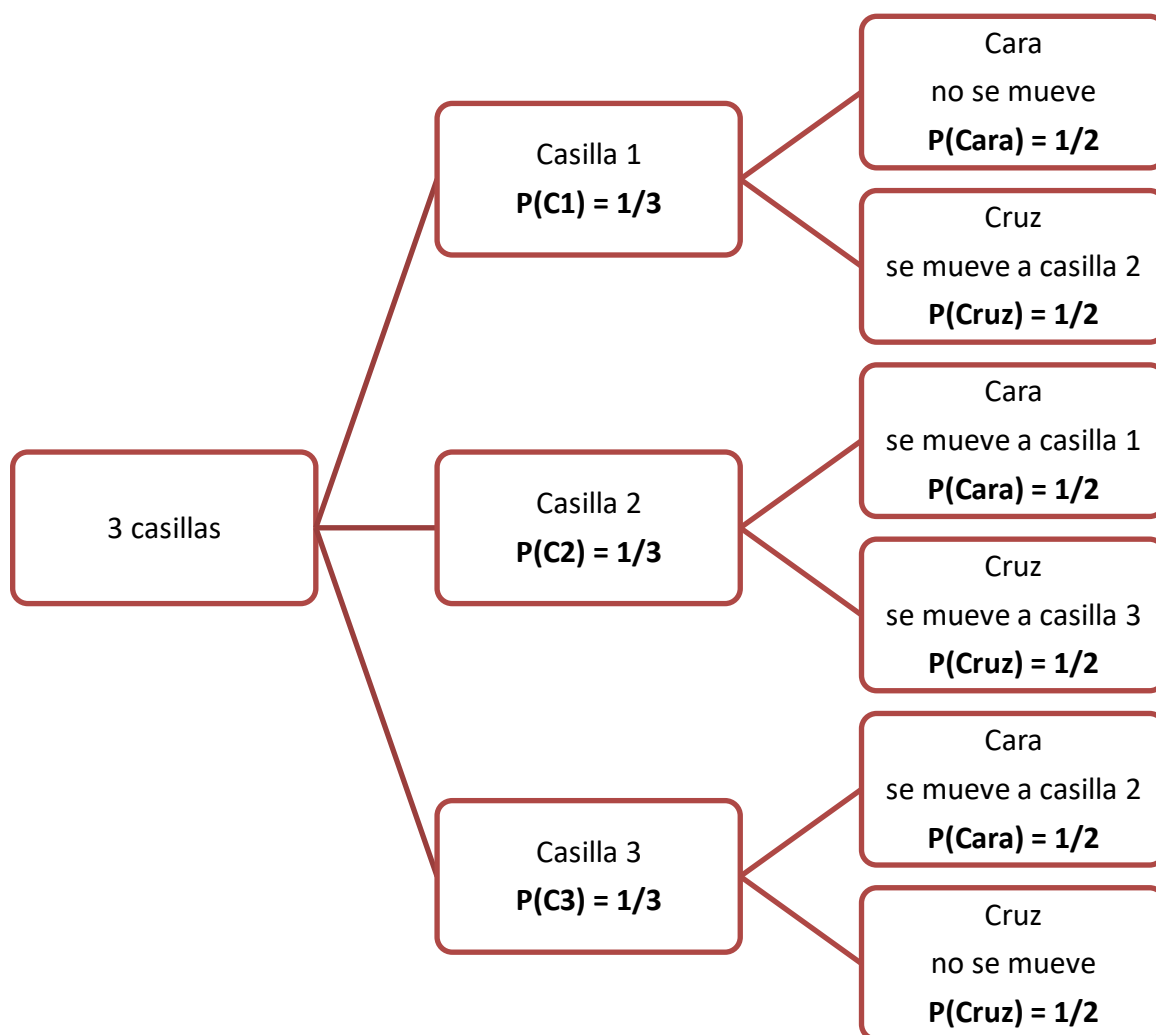
4.1 En un juego se cuenta con el siguiente tablero, de manera que una ficha puede desplazarse de la casilla 1 a la 2; de la 2 puede desplazarse a las casillas 1 y 3; y de la casilla 3 a la casilla 2.



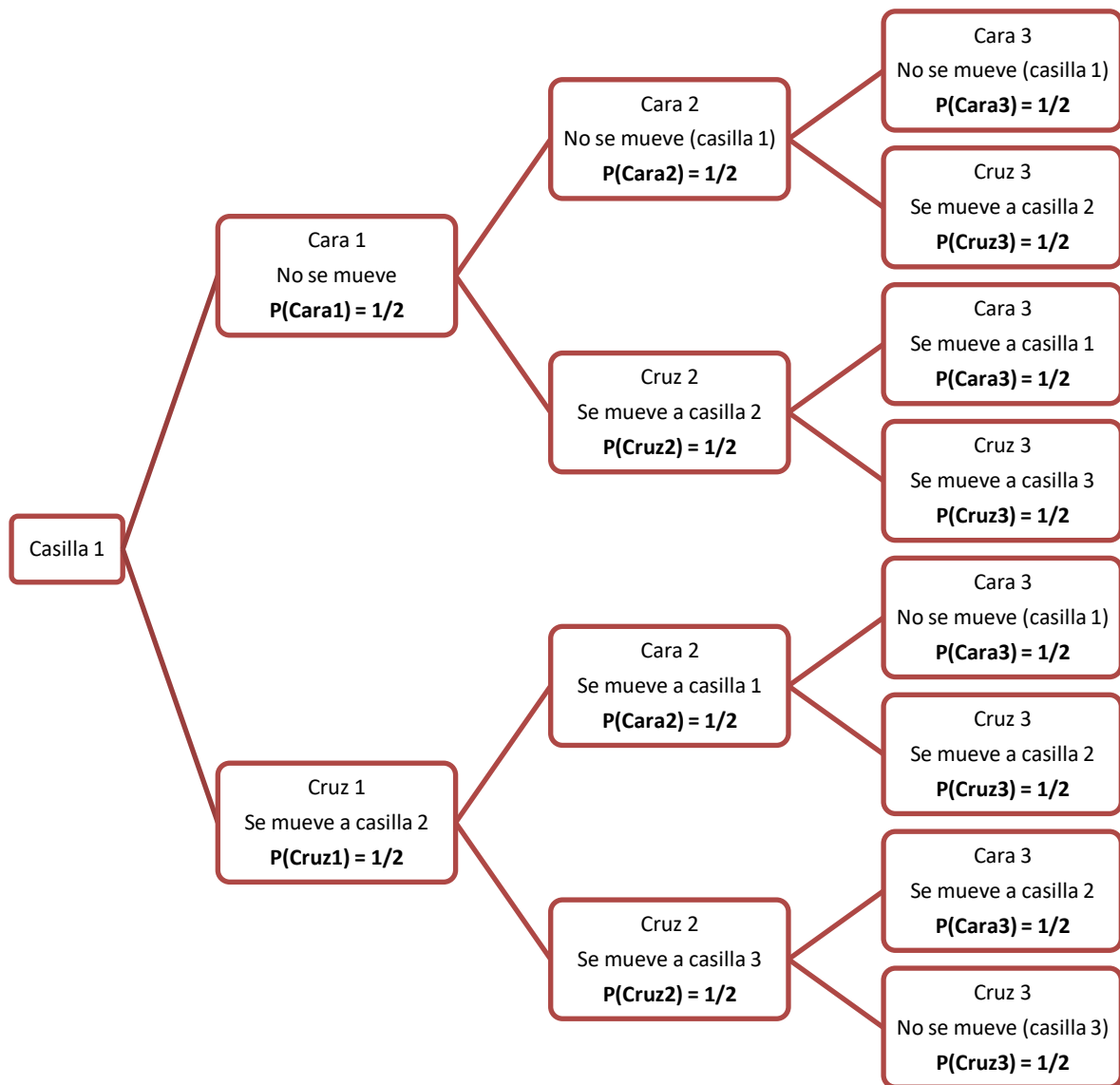
Para decidir el movimiento a realizar en cada turno, se lanza una moneda equilibrada (misma probabilidad de cara y cruz). Si sale cara, se intenta desplazar la ficha a la izquierda; si sale cruz, a la derecha. En caso de no poder realizar el desplazamiento correspondiente, la ficha se queda en la casilla en la que está durante ese turno.

- (0,5 puntos) Construye un árbol (o una tabla) que muestre las probabilidades de pasar de una casilla a otra en un turno.
- (1 punto) Si la ficha se encuentra en la casilla 1, ¿cuál es la probabilidad de que tras tres turnos se encuentre de nuevo en la casilla 1?
- (1 punto) Para comenzar el juego, se procede a un sorteo para ver dónde comienza la ficha. Si la probabilidad de empezar en la casilla 1 es $1/2$ y la probabilidad de empezar en la casilla 2 y en la 3 es de $1/4$ para cada una, ¿cuál es la probabilidad de que la ficha esté en cada una de las tres casillas dos turnos después de empezar?

- Construimos el diagrama de probabilidades de los movimientos. Consideramos igual de probable estar situado en cualquiera de las 3 casillas.



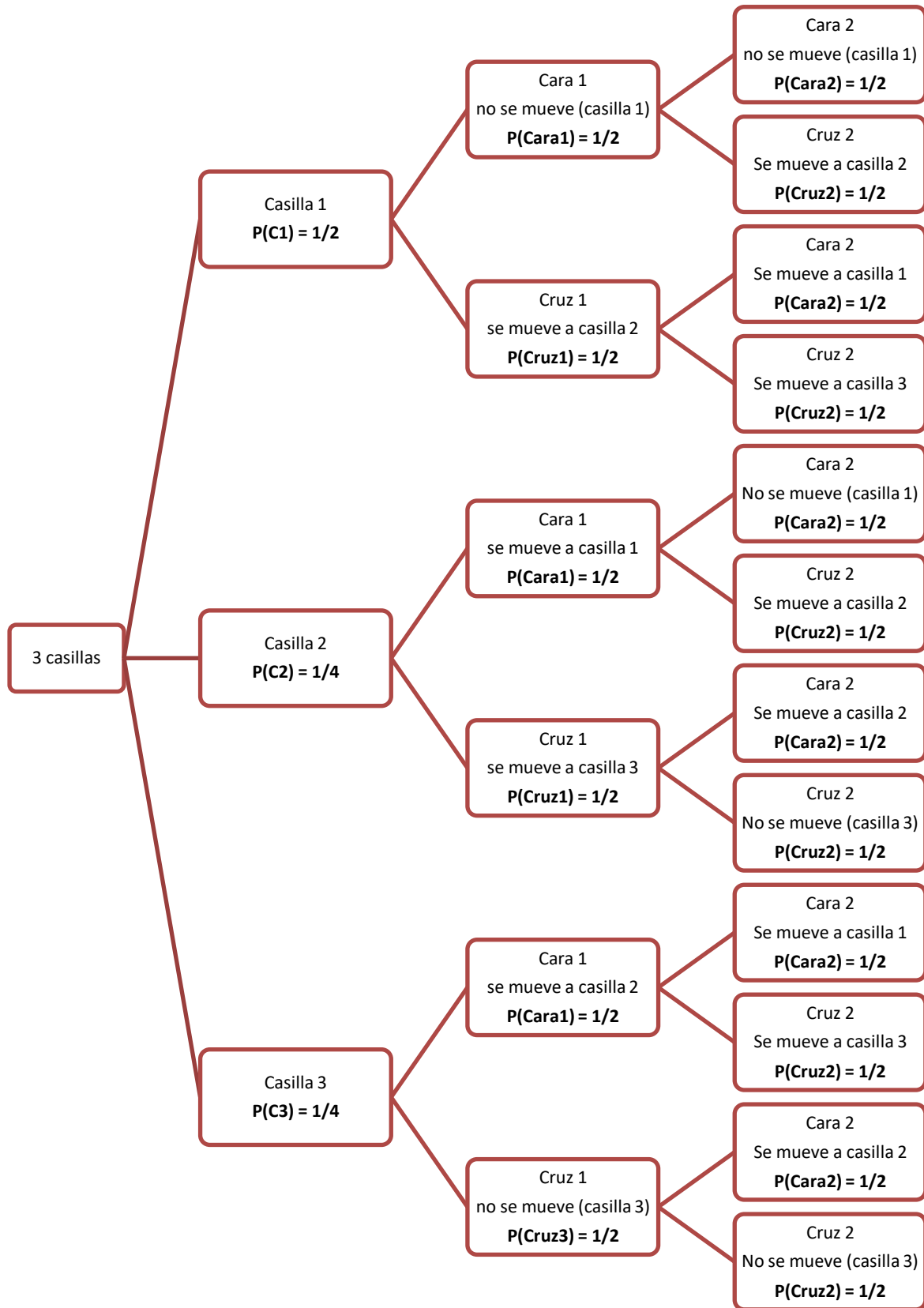
b) Realizamos un diagrama de árbol con los 3 lanzamientos.



Vemos en el diagrama de árbol que vuelve a la casilla 1 sacando Cara 1, Cara 2 y Cara 3, también con Cara 1, Cruz 2 y Cara 3, también con Cruz 1, Cara 2 y Cara 3.

Como cualquiera de los movimientos son equiprobables tenemos que 3 movimientos favorecen a quedarse en casilla 1 y los restantes $8 - 3 = 5$ movimientos te desplazan de la casilla 1, por lo que la probabilidad de quedarte en la casilla 1 vale $\frac{3}{8} = 0.375$.

c) Realizamos un diagrama de árbol descriptivo de lo que ocurre en las dos tiradas partiendo de cada una de las casillas del tablero.



Calculamos la probabilidad de acabar en la casilla 1 sumando el producto de las probabilidades de cada rama que acaba en casilla 1.

$$P(\text{Casilla 1}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$$

Calculamos la probabilidad de acabar en la casilla 2.

$$P(\text{Casilla 2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \boxed{\frac{5}{16}}$$

Calculamos la probabilidad de acabar en la casilla 3.

$$P(\text{Casilla 3}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \boxed{\frac{5}{16}}$$

4.2 Dados dos sucesos aleatorios de los que se sabe que $P(A|B) = 2/3$ y $P(B|A) = 3/4$.

a) (1 punto) Si A y B fueran independientes, ¿cuánto valdría $P(A \cup B)$?

b) (1,5 puntos) Si $P(A \cup B) = 5/6$, ¿cuáles son las probabilidades $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cup \bar{B})$?

a) Determinamos las probabilidades de los sucesos A y B.

$$P(A/B) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \text{ y } B \text{ son independientes} \\ P(A \cap B) = P(A)P(B) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{2}{3}}$$

$$P(B/A) = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{4} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \text{ y } B \text{ son independientes} \\ P(A \cap B) = P(A)P(B) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{P(B) = \frac{3}{4}}$$

Calculamos la probabilidad de la unión de los dos sucesos usando la fórmula.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \boxed{\frac{11}{12}}$$

b) Sin considerar los sucesos A y B independientes calculamos sus probabilidades.

$$\left. \begin{array}{l} P(A/B) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{3}P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{3}{2}P(A \cap B) \\ P(B/A) = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{4} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{4}P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{4}{3}P(A \cap B) \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{5}{6} = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{3}{2}P(A \cap B) + \frac{4}{3}P(A \cap B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{5}{6} = \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} - 1 \right) P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{11}{6}P(A \cap B) \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = \frac{5}{11}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(B) = \frac{3}{2}P(A \cap B) = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{11} = \frac{15}{22} \\ P(A) = \frac{4}{3}P(A \cap B) = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{11} = \frac{20}{33} \end{array} \right.$$

Hemos determinado que $P(A) = \frac{20}{33}$ y $P(B) = \frac{15}{22}$.

Calculamos $P(A \cup \bar{B})$.

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = P(A) + 1 - P(B) - [P(A) - P(A \cap B)] =$$

$$= \frac{20}{33} + 1 - \frac{15}{22} - \left[\frac{20}{33} - \frac{5}{11} \right] = \boxed{\frac{17}{22}}$$