

UNIVERSIDAD
DE MURCIAUniversidad
Politécnica
de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
306-MATEMÁTICAS II
PAU2026 - EJEMPLO

NOTA IMPORTANTE: Las preguntas se pueden hacer en cualquier orden. Las preguntas 1, 2 y 3 son obligatorias. En la pregunta 4 solo hay que contestar la 4.1 o la 4.2. En la pregunta 5 solo hay que contestar la 5.1 o la 5.2. Si se responden las 2 opciones de la pregunta 4 o 5 solo se corregirá la primera opción contestada. La puntuación máxima de cada pregunta es de 2 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

PARTE A (preguntas 1, 2 y 3). Conteste TODAS las preguntas de esta parte.

Pregunta 1.

CONTEXTO

La caída de los tipos de interés en el segundo semestre de 2024 permitió a las familias ahorrar alrededor de 200 euros al mes en comparación con lo que venían pagando por sus hipotecas y préstamos. Este ahorro equivalía a más de 2000 euros anuales. Ante este escenario, los bancos ofrecieron condiciones más atractivas para captar clientes, lo que generó una fuerte competencia entre las entidades. Una de ellas lanzó los siguientes productos: Préstamo 24 Horas, Préstamo Auto y Préstamo Estudia. Cada cliente podía contratar, como máximo, uno de ellos.

La política de la empresa determinó que el reparto final de los préstamos concedidos fuera el siguiente: un 45% correspondió a Préstamos 24 Horas, un 40% a Préstamos Auto y un 15% a Préstamos Estudia. Además, se analizó el porcentaje de impago en estos productos, que fue del 20% en Préstamos 24 Horas, del 30% en Préstamos Auto y del 25% en Préstamos Estudia.

Basándose en el contexto anterior, responda estos cuatro apartados:

- (a) [0.5 puntos] Seleccionado un préstamo al azar, calcule la probabilidad de que no se haya pagado.
- (b) [0.5 puntos] Sabiendo que no se pagó un préstamo, calcule la probabilidad de que sea un Préstamo Auto.
- (c) [0.5 puntos] Si se pagó el préstamo, calcule la probabilidad de que sea un Préstamo Estudia.
- (d) [0.5 puntos] Según los datos proporcionados por el enunciado, indique dos sucesos relacionados con este problema que sean incompatibles. Justifique la respuesta.

Pregunta 2. Responda justificadamente los siguientes apartados:

- (a) [1 punto] Calcule el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$.
- (b) [0.5 puntos] Razone, sin calcular la integral, si $\int_1^2 xe^x dx$ tiene signo positivo o negativo.
- (c) [0.5 puntos] Calcule la integral $\int_1^2 xe^x dx$.

Pregunta 3. Una fábrica de productos químicos produce 3 fármacos diferentes, Anualmente, esta fábrica tiene 4 clientes que, durante el mes de febrero, realizaron pedidos y/o devoluciones. Dichos datos (en miles de unidades) se han recogido en la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) [0.5 puntos] Indique qué representan las filas y las columnas, y especifique cuáles son las compras que ha hecho cada cliente durante el mes de febrero.
- (b) [1.5 puntos] Sabiendo que el primer cliente ha gastado un total de 3250 €, el segundo un total de 2850 € y el cuarto un total de 2800 €, ¿cuál es el precio por unidad de cada fármaco?

PARTE B (preguntas 4 y 5).

Pregunta 4. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2).

4.1 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \operatorname{arctg}(x + \pi)$, donde arctg denota la función arcotangente.

- (a) [1 punto] Determine los intervalos de concavidad y convexidad de f . Estudie y halle, si existen, los puntos de inflexión de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan)
- (b) [0.5 + 0.5 = 1 punto] Calcule $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{f(x)}{\operatorname{sen}(x)}$. ¿Cuál sería el valor del límite si cambiamos en el denominador $\operatorname{sen}(x)$ por $g(x)$, siendo $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ si $x \neq -\pi$ y $g(-\pi) = 2$?

4.2 La suma de los perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero es 100 metros.

- (a) [1.5 puntos] ¿Cuáles deben ser las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea mínima?
- (b) [0.5 puntos] ¿Es posible determinar las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea máxima?

Pregunta 5. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2).

5.1 Responda justificadamente los siguientes apartados:

- (a) [1.5 puntos] Sean $\pi_1: mx + y - z = m - 2$, $\pi_2: x + y + 2z = 0$ y $\pi_3: 3x + my + z = m - 2$ tres planos. Estudie su posición relativa en función del parámetro m .
- (b) [0.5 puntos] En el caso de que sean secantes en un punto, ¿podrán tener ese punto las dos primeras coordenadas diferentes?

5.2 Responda justificadamente los siguientes apartados:

- (a) [0.5 + 0.5 = 1 punto] Considere el triángulo de vértices $A(0, 0, 0)$, $B(2, 4, 0)$ y $C(5, 0, 0)$. Utilizando productos vectoriales calcule su área, y compruebe el resultado mediante otro método.
- (b) [1 punto] Calcule la distancia del punto $P(2, 4, 2)$ al plano que pasa por los puntos $A(0, 0, 0)$, $C(5, 0, 0)$ y $D(0, 0, 3)$.

SOLUCIONES del modelo 2026

Análisis 40%	Álgebra (20%)	Geometría (20%)	Probabilidad y estadística (20%)
--------------	---------------	-----------------	----------------------------------

Pregunta 1. (Obligatoria) Probabilidad y estadística.

Pregunta 2. (Obligatoria) Análisis.

Pregunta 3. (Obligatoria) Álgebra.

Pregunta 4. (Con optatividad) Análisis.

Pregunta 5. (Con optatividad) Geometría.

PARTE A (preguntas 1, 2 y 3). Conteste TODAS las preguntas de esta parte.

Pregunta 1.

CONTEXTO

La caída de los tipos de interés en el segundo semestre de 2024 permitió a las familias ahorrar alrededor de 200 euros al mes en comparación con lo que venían pagando por sus hipotecas y préstamos. Este ahorro equivalía a más de 2000 euros anuales. Ante este escenario, los bancos ofrecieron condiciones más atractivas para captar clientes, lo que generó una fuerte competencia entre las entidades. Una de ellas lanzó los siguientes productos: Préstamo 24 Horas, Préstamo Auto y Préstamo Estudia. Cada cliente podía contratar, como máximo, uno de ellos.

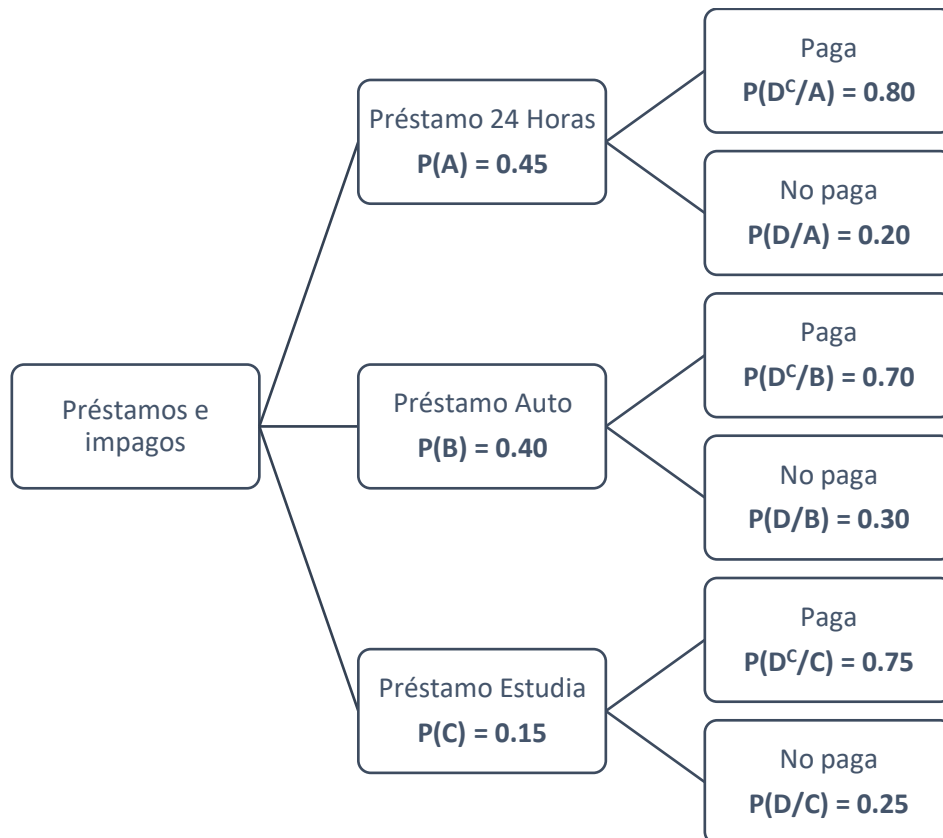
La política de la empresa determinó que el reparto final de los préstamos concedidos fuera el siguiente: un 45% correspondió a Préstamos 24 Horas, un 40% a Préstamos Auto y un 15% a Préstamos Estudia. Además, se analizó el porcentaje de impago en estos productos, que fue del 20% en Préstamos 24 Horas, del 30% en Préstamos Auto y del 25% en Préstamos Estudia.

Basándose en el contexto anterior, responda estos cuatro apartados:

- [0.5 puntos]** Seleccionado un préstamo al azar, calcule la probabilidad de que no se haya pagado.
- [0.5 puntos]** Sabiendo que no se pagó un préstamo, calcule la probabilidad de que sea un Préstamo Auto.
- [0.5 puntos]** Si se pagó el préstamo, calcule la probabilidad de que sea un Préstamo Estudia.
- [0.5 puntos]** Según los datos proporcionados por el enunciado, indique dos sucesos relacionados con este problema que sean incompatibles. Justifique la respuesta.

Llamamos A al suceso “tener un Préstamo 24 Horas”, B a “tener un Préstamo Auto”, C a “tener un Préstamo Estudia” y D a “no pagar el préstamo”.

Realizamos un diagrama de árbol que nos permite expresar de forma ordenada lo que sucede en el experimento y la probabilidad de cada suceso del mismo.



(a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(D) &= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = \\
 &= 0.45 \cdot 0.20 + 0.40 \cdot 0.30 + 0.15 \cdot 0.25 = \boxed{0.2475}
 \end{aligned}$$

(b) Nos piden calcular $P(B/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{P(D)} = \frac{0.40 \cdot 0.30}{0.2475} = \boxed{\frac{16}{33} \approx 0.4848}$$

(c) Nos piden calcular $P(C/D^c)$.

$$P(C/D^c) = \frac{P(C \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(C)P(D^c/C)}{1 - P(D)} = \frac{0.15 \cdot 0.75}{1 - 0.2475} = \boxed{\frac{45}{301} \approx 0.1495}$$

(d) Dos sucesos F y G son incompatibles cuando $F \cap G = \emptyset$, es decir, no tienen nada en común. El experimento consiste en elegir un préstamo al azar y sabemos que cada cliente solo puede tener uno de los préstamos que la entidad concede, por lo que $A \cap B = \emptyset$. El suceso A = “el préstamo es 24 Horas” y el suceso B = “el préstamo es Auto” son incompatibles: $P(A \cap B) = 0$.

Pregunta 2. Responda justificadamente los siguientes apartados:

- (a) [1 punto] Calcule el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$.
- (b) [0.5 puntos] Razone, sin calcular la integral, si $\int_1^2 xe^x dx$ tiene signo positivo o negativo.
- (c) [0.5 puntos] Calcule la integral $\int_1^2 xe^x dx$.

(a) Averiguamos donde se cortan las gráficas de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x = x^2 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \\ x = x^2 \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

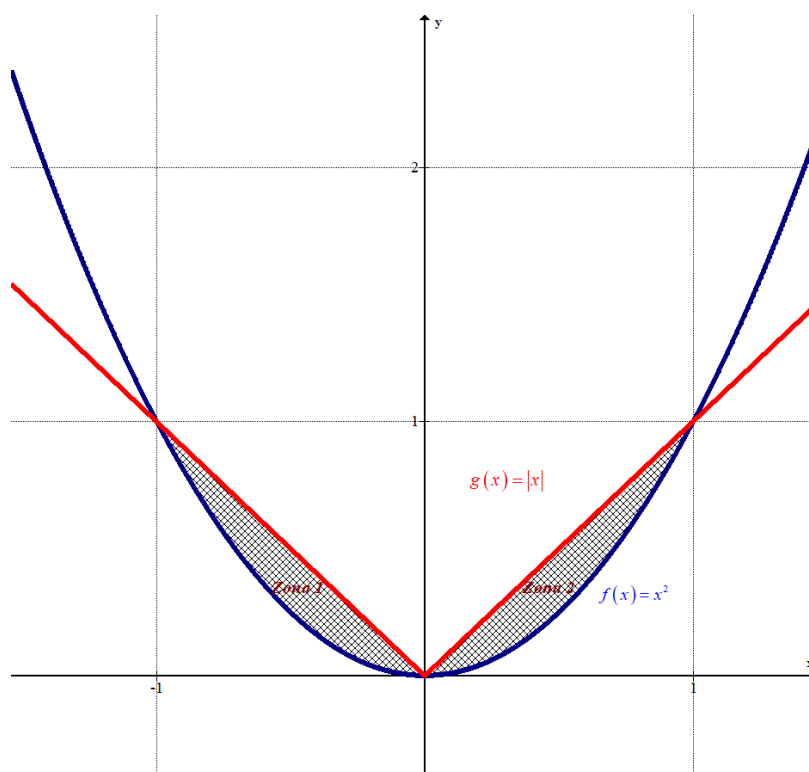
Las dos gráficas se cortan en tres puntos. Dibujamos las gráficas de las dos funciones y el recinto limitado por ellas.

$$f(x) = x^2$$

x	y = x ²
-2	4
-1	1
0	0 vértice
1	1
2	4

$$g(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

x	y = x
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	4



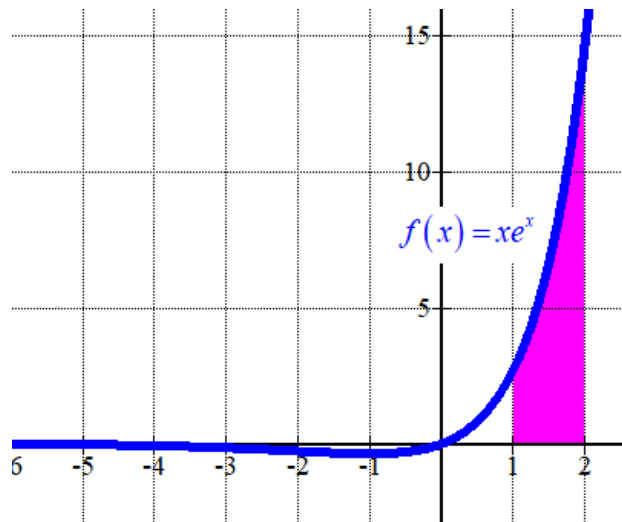
El área es la suma de área de la zona 1 y de la zona 2 del dibujo. Las dos funciones son simétricas respecto del eje de ordenadas y como se aprecia los dos recintos tienen el mismo valor de área. El área total es el doble del área de la zona 2.

$$\text{Área} = 2 \int_0^1 x - x^2 dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \left(\left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right] - \left[\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right] \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

El área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$ tiene un valor de $\frac{1}{3} \approx 0.333$ unidades cuadradas.

(b) La función $f(x) = xe^x$ es una función positiva en el intervalo $(1, 2)$ por lo que la integral definida $\int_1^2 xe^x dx$ tendrá un valor positivo.

$$\left. \begin{array}{l} x \in (1, 2) \rightarrow x > 0 \\ e^x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = xe^x > 0, \text{ siendo } x \in (1, 2)$$



(c) Calculamos primero la integral indefinida $\int xe^x dx$.

$$\int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = \boxed{xe^x - e^x + K}$$

Calculamos el valor de la integral definida $\int_1^2 xe^x dx$

$$\int_1^2 xe^x dx = \left[xe^x - e^x \right]_1^2 = \left[2 \cdot e^2 - e^2 \right] - \left[1 \cdot e^1 - e^1 \right] = \boxed{e^2 \approx 7.39}$$

Pregunta 3. Una fábrica de productos químicos produce 3 fármacos diferentes, Anualmente, esta fábrica tiene 4 clientes que, durante el mes de febrero, realizaron pedidos y/o devoluciones. Dichos datos (en miles de unidades) se han recogido en la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) [0.5 puntos] Indique qué representan las filas y las columnas, y especifique cuáles son las compras que ha hecho cada cliente durante el mes de febrero.
- (b) [1.5 puntos] Sabiendo que el primer cliente ha gastado un total de 3250 €, el segundo un total de 2850 € y el cuarto un total de 2800 €, ¿cuál es el precio por unidad de cada fármaco?

- (a) Es una matriz con 4 filas y 3 columnas. En cada fila aparecen los datos de cada cliente y en cada columna los datos de cada fármaco, por lo que en la celda situada en la fila 4 y columna 2 aparece un 7 que indica que el cliente 4 pide 7000 unidades del 4º fármaco.
El cliente 1º ha hecho una compra de 9000 unidades del fármaco 1, 5000 unidades del 2º y 2000 del 3º.
El cliente 2º ha hecho una compra de 3000 unidades del fármaco 1, 8000 unidades del 2º y 0 del 3º.
El cliente 3º no ha hecho ninguna compra (toda la fila 3ª está llena de ceros).
El cliente 4º ha hecho una compra de 6000 unidades del fármaco 1, 7000 unidades del 2º y ha devuelto 1000 unidades del 3º.

- (b) Si llamamos “x”, “y” y “z” a los precios por unidad del fármaco 1, 2 y 3, respectivamente se nos plantea el siguiente sistema de ecuaciones que resolvemos.

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000x \\ 1000y \\ 1000z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3250 \\ 2850 \\ 0 \\ 2800 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 9000x + 5000y + 2000z = 3250 \\ 3000x + 8000y = 2850 \\ 6000x + 7000y - 1000z = 2800 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 900x + 500y + 200z = 325 \\ 300x + 800y = 285 \\ 60x + 70y - 10z = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 900x + 500y + 200z = 325 \\ x = \frac{285 - 800y}{300} \\ 60x + 70y - 10z = 28 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 900 \frac{285 - 800y}{300} + 500y + 200z = 325 \\ 60 \frac{285 - 800y}{300} + 70y - 10z = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(285 - 800y) + 500y + 200z = 325 \\ \frac{285 - 800y}{5} + 70y - 10z = 28 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 855 - 2400y + 500y + 200z = 325 \\ 57 - 160y + 70y - 10z = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1900y + 200z = -530 \\ -90y - 10z = -29 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -190y + 20z = -53 \\ -90y - 10z = -29 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -190y + 20z = -53 \\ -180y - 20z = -58 \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\frac{-370y}{-370y} = -111 \Rightarrow \boxed{y = \frac{111}{370} = 0.30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{285 - 800 \cdot 0.3}{300} = 0.15} \Rightarrow 60 \cdot 0.15 + 70 \cdot 0.3 - 10z = 28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 + 21 - 10z = 28 \Rightarrow -10z = -2 \Rightarrow \boxed{z = \frac{2}{10} = 0.20}$$

Una unidad del primer fármaco cuesta 15 céntimos, una del segundo 30 céntimos y una del tercer fármaco cuesta 20 céntimos.

PARTE B (preguntas 4 y 5).**Pregunta 4. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2).**

4.1 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \operatorname{arctg}(x + \pi)$, donde arctg denota la función arcotangente.

(a) [1 punto] Determine los intervalos de concavidad y convexidad de f . Estudie y halle, si existen, los puntos de inflexión de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan)

(b) [0.5 + 0.5 = 1 punto] Calcule $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{f(x)}{\operatorname{sen}(x)}$. ¿Cuál sería el valor del límite si cambiamos en el denominador $\operatorname{sen}(x)$ por $g(x)$, siendo $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ si $x \neq -\pi$ y $g(-\pi) = 2$?

(a) Obtenemos la segunda derivada y averiguamos cuando se anula.

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x + \pi) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + (x + \pi)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{0 - 1 \cdot 2(x + \pi)}{(1 + (x + \pi)^2)^2} = \frac{-2(x + \pi)}{(1 + (x + \pi)^2)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2(x + \pi)}{(1 + (x + \pi)^2)^2} = 0 \Rightarrow -2(x + \pi) = 0 \Rightarrow x + \pi = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\pi}$$

Estudiamos la concavidad y convexidad de la función antes y después de $x = -\pi$.

- En el intervalo $(-\infty, -\pi)$ tomamos $x = -2\pi$ y la segunda derivada vale

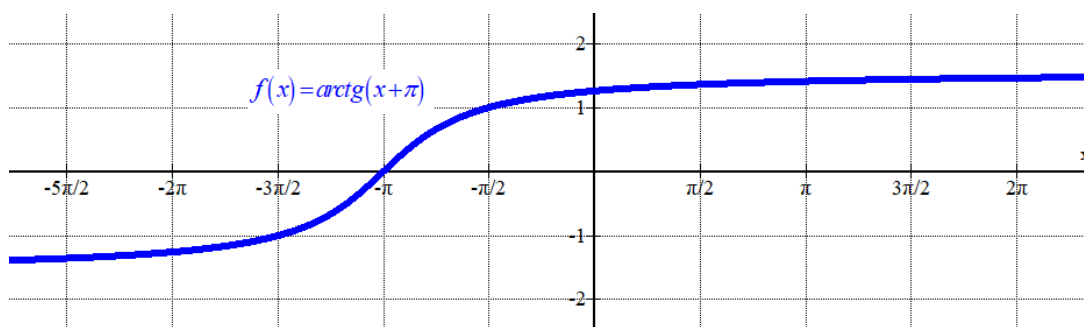
$$f''(-2\pi) = \frac{-2(-2\pi + \pi)}{(1 + (-2\pi + \pi)^2)^2} = \frac{2\pi}{(1 + \pi^2)^2} > 0. \text{ La función es convexa (U) en el intervalo } (-\infty, -\pi).$$

- En el intervalo $(-\pi, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la segunda derivada vale

$$f''(0) = \frac{-2(0 + \pi)}{(1 + (0 + \pi)^2)^2} = \frac{-2\pi}{(1 + \pi^2)^2} < 0. \text{ La función es cóncava (O) en el intervalo } (-\pi, +\infty).$$

La función es convexa antes de $x = -\pi$ y cóncava después. La función presenta un punto de inflexión en $x = -\pi$.

Para $x = -\pi$ tenemos que $f(-\pi) = \operatorname{arctg}(-\pi + \pi) = \operatorname{arctg}(0) = 0$, por lo que el punto de inflexión tiene coordenadas $(-\pi, 0)$.



(b) Calculamos el límite pedido.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{f(x)}{\operatorname{sen}(x)} &= \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\operatorname{arctg}(x + \pi)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\operatorname{arctg}(-\pi + \pi)}{\operatorname{sen}(-\pi)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{\cos(x)} = \frac{1}{1+(-\pi+\pi)^2} = \frac{1}{-1} = \boxed{-1} \end{aligned}$$

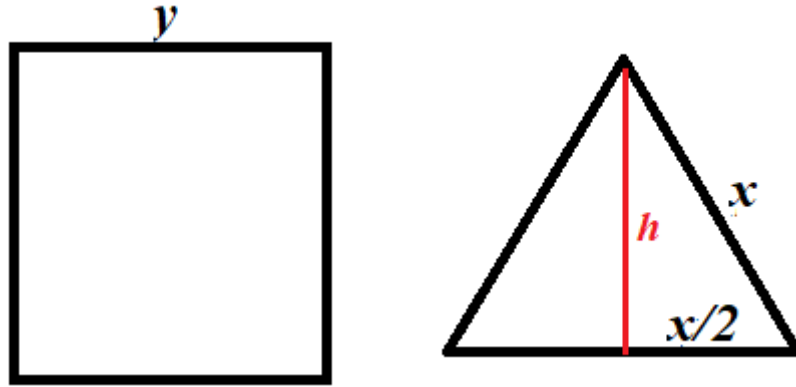
Si cambiamos en el denominador $\operatorname{sen}(x)$ por $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ si $x \neq -\pi$ y $g(-\pi) = 2$ el límite nos queda igual. La función $g(x)$ y la función $\operatorname{sen}(x)$ solo difieren en $x = -\pi$. Esta variación puntual no cambia la tendencia de la función en el entorno de $x = -\pi$. El cálculo del límite seguiría el mismo proceso, obteniendo el mismo valor.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\operatorname{arctg}(x + \pi)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\pi} \operatorname{arctg}(x + \pi)}{\lim_{x \rightarrow -\pi} g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\pi} \operatorname{arctg}(x + \pi)}{\lim_{x \rightarrow -\pi} \operatorname{sen}(x)} = \\ &= \frac{\operatorname{arctg}(-\pi + \pi)}{\operatorname{sen}(-\pi)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{g'(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{(\operatorname{sen}(x))'} = \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{\cos(x)} = \frac{1}{1+(-\pi+\pi)^2} = \frac{1}{-1} = \boxed{-1} \end{aligned}$$

4.2 La suma de los perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero es 100 metros.

- (a) [1.5 puntos] ¿Cuáles deben ser las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea mínima?
- (b) [0.5 puntos] ¿Es posible determinar las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea máxima?

(a) Hacemos un dibujo de la situación planteada.



El cuadrado tiene de lado “y” y el triángulo equilátero tiene de lado “x”.
La suma de los perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero es 100 metros.

$$4y + 3x = 100 \Rightarrow y = \frac{100 - 3x}{4} = 25 - \frac{3}{4}x$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos “h” y “x/2”.

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Obtenemos la expresión de la suma de las áreas de cuadrado y triángulo.

$$A(x, y) = y^2 + \frac{hx}{2} \Rightarrow \left\{ h = \frac{\sqrt{3}}{2}x \right\} \Rightarrow A(x, y) = y^2 + \frac{x \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = y^2 + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ y = 25 - \frac{3}{4}x \right\} \Rightarrow A(x) = \left(25 - \frac{3}{4}x \right)^2 + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} =$$

$$= 625 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{150}{4}x + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} = \frac{(9 + 4\sqrt{3})x^2 - 600x + 10000}{16}$$

Derivamos la función área y vemos cuando se anula.

$$A(x) = \frac{(9 + 4\sqrt{3})x^2 - 600x + 10000}{16} \Rightarrow A'(x) = \frac{2(9 + 4\sqrt{3})x - 600}{16}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(9+4\sqrt{3})x - 600}{16} = 0 \Rightarrow 2(9+4\sqrt{3})x - 600 = 0 \Rightarrow x = \frac{600}{18+8\sqrt{3}} \approx 18.83$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- Antes de $x=18.83$ tomamos $x=10$ y la derivada vale

$$A'(10) = \frac{2(9+4\sqrt{3})10 - 600}{16} \approx -17 < 0. \text{ La función decrece antes de } x=18.83.$$

- Después de $x=18.83$ tomamos $x=20$ y la derivada vale

$$A'(20) = \frac{2(9+4\sqrt{3})20 - 600}{16} \approx 2.32 > 0. \text{ La función crece después de } x=18.83.$$

Como la función decrece antes y crece después podemos afirmar que en $x=18.83$ la función tiene un mínimo.

Para este valor del lado del triángulo determinamos el valor del lado del cuadrado.

$$y = 25 - \frac{3}{4} \left(\frac{600}{18+8\sqrt{3}} \right) \approx 10.87$$

El cuadrado debe tener 10.87 metros de lado y el triángulo equilátero debe tener 18.83 metros de lado para conseguir una suma de áreas del cuadrado y triángulo mínima.

(b) Como debe cumplirse que $4y + 3x = 100$, entonces el valor de “x” está en el intervalo

$\left(0, \frac{100}{3}\right)$ y el valor de “y” está en el intervalo $(0, 25)$.

La función $A(x) = \frac{(9+4\sqrt{3})x^2 - 600x + 10000}{16}$ decrece hasta $x=18.83$ y crece después, por

lo que el valor máximo debe situarse en los extremos del intervalo de definición de “x”.

Obtenemos el área para $x=0$ y para $x = \frac{100}{3}$.

$$A(0) = \frac{(9+4\sqrt{3}) \cdot 0^2 - 600 \cdot 0 + 10000}{16} = \frac{10000}{16} = 625 m^2$$

$$A\left(\frac{100}{3}\right) = \frac{(9+4\sqrt{3})\left(\frac{100}{3}\right)^2 - 600 \frac{100}{3} + 10000}{16} = 481.12 m^2$$

Para $x=0$ se consigue una suma de áreas máxima, que en realidad es el área del cuadrado pues el triángulo no existe (lado 0). El valor del lado del cuadrado es $y = 25 - \frac{3}{4} \cdot 0 = 25$

El área máxima se puede conseguir sin triángulo y solo con un cuadrado de lado 25 metros.

Pregunta 5. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2).**5.1** Responda justificadamente los siguientes apartados:

- (a) [1.5 puntos] Sean $\pi_1: mx + y - z = m - 2$, $\pi_2: x + y + 2z = 0$ y $\pi_3: 3x + my + z = m - 2$ tres planos. Estudie su posición relativa en función del parámetro m .
- (b) [0.5 puntos] En el caso de que sean secantes en un punto, ¿podrán tener ese punto las dos primeras coordenadas diferentes?

(a) Planteamos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: mx + y - z = m - 2 \\ \pi_2: x + y + 2z = 0 \\ \pi_3: 3x + my + z = m - 2 \end{array} \right\}$$

Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & m & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 & m-2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & m & 1 & m-2 \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

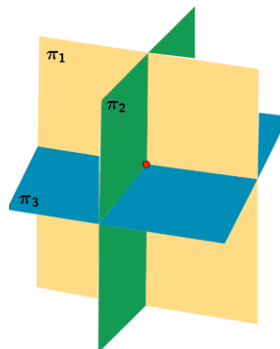
$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix} = m + 6 - m + 3 - 1 - 2m^2 = -2m^2 + 8$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2m^2 + 8 = 0 \Rightarrow m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow \boxed{m = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $m \neq -2$ y $m \neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución). Lo cual significa que los tres planos coinciden en un punto cuyas coordenadas son la solución del sistema de ecuaciones.

**CASO 2.** $m = -2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 3 \quad -2 \quad 1 \quad -4 \\ -3 \quad -3 \quad -6 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -5 \quad -5 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 4 \quad 0 \\ -2 \quad 1 \quad -1 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 3 \quad 3 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & -5 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \text{Fila } 2^a + 3 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad 15 \quad 15 \quad -20 \\ 0 \quad -15 \quad -15 \quad -12 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -32 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{A/B} & & \\ \hline -2 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \\ \hline & \underbrace{A} & & \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Los planos quedan $\left. \begin{array}{l} \pi_1 : -2x + y - z = -4 \\ \pi_2 : x + y + 2z = 0 \\ \pi_3 : 3x - 2y + z = -4 \end{array} \right\}$. Los planos no coinciden en ningún punto y no hay planos paralelos.



CASO 3. $m = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$\begin{aligned}
 A/B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \\ -3 \quad -3 \quad -6 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -5 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \\
 &\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2 \quad 4 \quad 0 \\ -2 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 5 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 5 \quad 0 \\ 0 \quad -1 \quad -5 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} & & & A/B \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & A \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el de la matriz A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones). Esto

significa que los planos $\pi_1 : 2x + y - z = 0$
 $\pi_2 : x + y + 2z = 0$
 $\pi_3 : 3x + 2y + z = 0$ } se cortan en una recta sin ser ninguno de ellos paralelo entre sí, ni coincidentes.



Resumiendo: Para $m \neq -2$ y $m \neq 2$ los tres planos se cortan en un punto, para $m = -2$ los tres planos no coinciden en ningún punto y para $m = 2$ los tres planos coinciden en una recta.

(b) Los planos son secantes en un punto cuando $m \neq -2$ y $m \neq 2$.

Resolvemos parcialmente el sistema $\left. \begin{array}{l} \pi_1 : mx + y - z = m - 2 \\ \pi_2 : x + y + 2z = 0 \\ \pi_3 : 3x + my + z = m - 2 \end{array} \right\}$ aplicando el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m-2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ m-2 & m & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix}} = \frac{m-2+2m-4+0+m-2-0+2m^2-4m}{-2m^2+8} = \frac{2m^2-8}{-2m^2+8} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & m-2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & m-2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0+6m-12-m+2-0-m+2-2m^2+4m}{-2m^2+8} = \frac{-2m^2+8m-8}{-2m^2+8} =$$

$$= \frac{m^2-4m+4}{m^2-4} = \frac{(m-2)^2}{(m-2)(m+2)} = \{m \neq 2\} = \frac{m-2}{m+2}$$

Averiguamos cuando son iguales los valores de “x” e “y”.

$$\frac{m-2}{m+2} = -1 \Rightarrow m-2 = -m-2 \Rightarrow 2m = 0 \Rightarrow \boxed{m=0}$$

Las dos primeras coordenadas del punto de corte de los tres planos son iguales cuando $m=0$.
Para el resto de valores de $m \neq -2$ y $m \neq 2$ las dos primeras coordenadas serán diferentes.

5.2 Responda justificadamente los siguientes apartados:

- (a) [0.5 + 0.5 = 1 punto] Considere el triángulo de vértices $A(0,0,0)$, $B(2,4,0)$ y $C(5,0,0)$. Utilizando productos vectoriales calcule su área, y compruebe el resultado mediante otro método.
- (b) [1 punto] Calcule la distancia del punto $P(2,4,2)$ al plano que pasa por los puntos $A(0,0,0)$, $C(5,0,0)$ y $D(0,0,3)$.

- (a) Consideramos los vectores que unen el vértice A con los vértices B y C. El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(0,0,0) \\ B(2,4,0) \\ C(5,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,4,0) - (0,0,0) = (2,4,0) \\ \overrightarrow{AC} = (5,0,0) - (0,0,0) = (5,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -20k = (0,0,-20)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 0^2 + (-20)^2}}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ u}^2$$

El área del triángulo ABC vale 10 unidades cuadradas.

Calculamos el área utilizando conceptos geométricos.

Hallamos la longitud del lado BC.

$$\overrightarrow{BC} = (5,0,0) - (2,4,0) = (3,-4,0) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = 5.$$

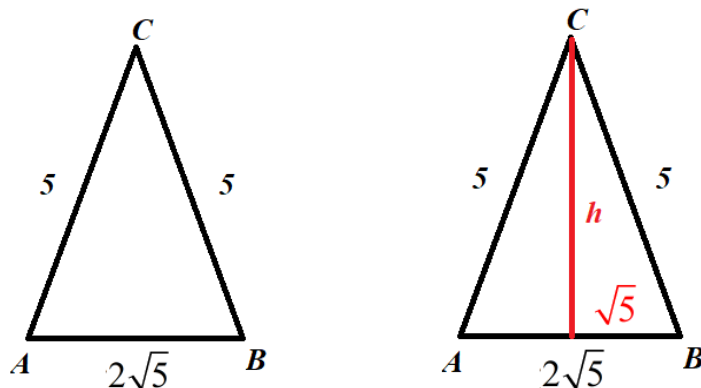
Hallamos la longitud del lado AC.

$$\overrightarrow{AC} = (5,0,0) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = 5$$

Hallamos la longitud del lado AB.

$$\overrightarrow{AB} = (2,4,0) - (0,0,0) = (2,4,0) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Los lados BC y AC son iguales. El triángulo ABC es un triángulo isósceles como se indica en el dibujo.



Hallamos h con el teorema de Pitágoras: $h^2 = 5^2 - (\sqrt{5})^2 = 25 - 5 = 20 \Rightarrow h = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

El área del triángulo ABC es la mitad del producto de la base ($2\sqrt{5}$) por la altura ($2\sqrt{5}$).

$$\text{Área } ABC = \frac{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 10 \text{ u}^2$$

El área del triángulo ABC vale 10 unidades cuadradas.

(b) Hallamos la ecuación del plano π que pasa por los puntos $A(0,0,0)$, $C(5,0,0)$ y $D(0,0,3)$.

$$\left. \begin{array}{l} A(0,0,0) \in \pi \\ C(5,0,0) \in \pi \\ D(0,0,3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AC} = (5,0,0) - (0,0,0) = (5,0,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AD} = (0,0,3) - (0,0,0) = (0,0,3) \\ A(0,0,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -15y = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: y = 0}$$

El plano que contiene los puntos A, C y D tiene ecuación $\pi: y = 0$.

Hallamos la distancia del punto $P(2,4,2)$ al plano $\pi: y = 0$.

$$d(P, \pi) = \frac{|4|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = 4 \text{ u}$$

La distancia del punto $P(2,4,2)$ al plano $\pi: y = 0$ tiene un valor de 4 unidades.