



# Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2025-2026

Materia: MATEMÁTICAS II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

## INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

El estudiante deberá resolver cuatro ejercicios de los propuestos en este examen. Los ejercicios 1, 2 y 3 tienen dos opciones A y B. Solo hay que contestar una de las dos opciones (A o B). Si se contesta a las dos se corregirá solo la que aparezca en primer lugar, salvo que esté tachada. **El ejercicio 4 es único y obligatorio.**

## CADA EJERCICIO COMPLETO PUNTUARÁ 2,5 PUNTOS COMO MÁXIMO.

Se adjunta al final tabla de la distribución NORMAL por si hiciera falta para algún ejercicio.

*Todas las instrucciones son las recogidas en los criterios generales de evaluación ya publicados junto con los modelos de exámenes.* Indicamos a modo de recordatorio y resumen:

**Criterios generales.** Las respuestas de los ejercicios deberán realizarse expresando de forma razonada el proceso seguido en su resolución con el rigor y la precisión necesaria, usando el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados. Se valorará con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio.

**Ortografía y redacción.** Se valorará la corrección ortográfica (grafías, tildes y puntuación), así como la coherencia, la cohesión, la corrección gramatical y léxica y la presentación. Se deducirá 0,10 puntos por cada falta a partir de la tercera. Se podrá deducir hasta 1 punto máximo en la puntuación final.

**Materiales.** Se permitirá una calculadora no gráfica y no programable, según el anexo aprobado y publicado.

*Este documento es un modelo de examen que tiene carácter orientativo y puede servir como referencia para el estudiante que realice las pruebas. No obstante, además de los problemas contenidos en este modelo de examen, podrán plantearse otros tipos de ejercicios que se encuadren en lo establecido en los saberes básicos que aparecen en el currículo de la materia publicados en el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato.*

*También pueden servir de orientación los exámenes de la convocatoria ordinaria, extraordinaria y el modelo de 2024, puesto que en este curso las directrices y formato de los exámenes PAU son las mismas que en 2024.*

[Coordinación PAU \(Prueba de Acceso a la Universidad\) – Vicerrectorado de Estudiantes, Empleo y Movilidad](#)

### EJERCICIO 1.A. (2,5 puntos)

Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Calcula los valores de  $a$  para los que la matriz  $A$  tiene inversa.
- Para  $a=1$ , calcula la inversa de la matriz  $A-3I$ , siendo  $I$  la matriz identidad de orden 3.
- Para  $a=1$  resuelve la ecuación matricial  $AX - B = 3X$

### EJERCICIO 1.B. (2,5 puntos)

Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & a+4 & 2 \end{pmatrix}$  donde  $a$  es un número real.

- a) Encuentra los valores de  $a$  para los cuales el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones.

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- b) Resuelve el sistema anterior para el caso  $a = 0$ , si es posible.  
 c) ¿Existe algún valor de  $a$  para el cual el sistema anterior no tiene solución? Justifica tu respuesta.

### EJERCICIO 2.A. (2,5 puntos)

Dada la función  $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ .

- a) Encuentra sus máximos y mínimos relativos y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.  
 b) Calcula  $g(x)$  sabiendo que  $g'(x) = f(x)$  y que  $g(0) = 1$ .

### EJERCICIO 2.B. (2,5 puntos)

Sean las funciones:  $f(x) = -3x - 5$  y  $g(x) = (x+1)^2 - 2$

- a) Calcula el polinomio de grado 3 que tiene un máximo relativo en el punto  $(0,2)$  y su recta tangente en el punto de inflexión de abscisa  $x=1$  es paralela a la recta  $f(x)$   
 b) Calcula el área del recinto limitado por  $f(x)$  y  $g(x)$

### EJERCICIO 3.A. (2,5 puntos)

Sean el plano  $\pi: 2x + y - z - 5 = 0$  y los puntos  $A(1, 2, -1)$ ,  $B(2, 1, 0)$ . Obtén de forma razonada:

- a) La ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a  $\pi$ .  
 b) La ecuación de la recta  $r$  que es perpendicular a  $\pi$  y pasa por A.  
 c) La distancia entre el punto B y la recta  $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$

### EJERCICIO 3.B. (2,5 puntos)

Dada la recta  $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -t \end{cases}$  y dado el plano  $\pi: mx + 3y - 4z + 6 = 0$ .

- a) Estudia la posición relativa de la recta y el plano según los valores del parámetro  $m$ .  
 b) Para  $m = 2$ , calcula la ecuación general del plano que contiene a la recta  $r$  y es perpendicular al plano  $\pi$ .  
 c) Para  $m = 0$ , halla el ángulo que determinan la recta y el plano.

### EJERCICIO 4. (2,5 puntos)

Una fábrica dedicada a la elaboración de tomate localizada en el centro de Extremadura tiene tres tipos de productos para su venta: cuatro de cada siete producciones son botes de tomate frito, dos de cada siete son latas de tomate crudo y el resto, bolsas de concentrado de tomate en polvo. Sabemos, además, que exporta el 70% del tomate frito, el 50% del tomate crudo y el 90% del concentrado de tomate en polvo. Elegido un producto al azar, se pide:

- a) Calcular la probabilidad de que el producto elegido sea destinado a la exportación.

- b) Calcular la probabilidad de que el producto elegido sea un bote de tomate crudo sabiendo que no se ha destinado a la exportación.
- c) Calcular la probabilidad de que el producto elegido al azar sea tomate frito y que se exporte.
- d) Calcular la probabilidad de que el producto elegido al azar sea tomate frito o que se exporte.

## ANEXO TABLA DISTRIBUCIÓN NORMAL

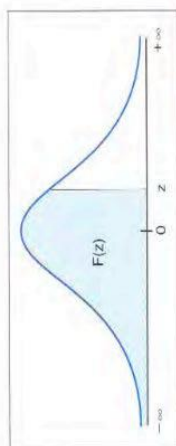


Tabla de distribución

normal  $N(0,1)$ 

$$F(z) = P(Z \leq z)$$

| z   | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| 3.6 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.7 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.8 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

## SOLUCIONES

|                                |              |              |               |
|--------------------------------|--------------|--------------|---------------|
| Probabilidad y Estadística 25% | Álgebra 25 % | Análisis 25% | Geometría 25% |
|--------------------------------|--------------|--------------|---------------|

**Pregunta 1. (Con optatividad – 2.5 puntos) Álgebra.**

**Pregunta 2. (Con optatividad – 2.5 puntos) Análisis.**

**Pregunta 3. (Con optatividad – 2.5 puntos) Geometría.**

**Pregunta 4. (Obligatoria – 2.5 puntos) Probabilidad y estadística.**

**EJERCICIO 1.A. (2,5 puntos)**

Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Calcula los valores de  $a$  para los que la matriz  $A$  tiene inversa.
- Para  $a=1$ , calcula la inversa de la matriz  $A-3I$ , siendo  $I$  la matriz identidad de orden 3.
- Para  $a=1$  resuelve la ecuación matricial  $AX - B = 3X$

a) La matriz  $A$  tiene inversa si su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + a^2 + a - 0 - 0 - 0 = a^2 + a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a+1 = 0 \rightarrow a = -1 \end{cases}$$

El determinante de  $A$  se anula para  $a=0$  y  $a=-1$ . La matriz  $A$  tiene inversa para cualquier valor de  $a$  distinto de 0 y  $-1$ .

b) Para  $a=1$  la matriz  $A$  queda  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Obtenemos la expresión de la matriz  $A-3I$ .

$$A-3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de esta matriz, comprobamos que es distinto de cero y hallamos la expresión de su inversa.

$$|A-3I| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -27 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 = -16 \neq 0$$

$$\begin{aligned} (A-3I)^{-1} &= \frac{\text{Adj}(A-3I)^T}{|A-3I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}}{-16} = \\ &= \frac{-1}{16} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{-1}{16} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & -1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Despejamos X en la ecuación matricial  $AX - B = 3X$ .

$$AX - B = 3X \Rightarrow AX - 3X = B \Rightarrow (A - 3I)X = B \Rightarrow X = (A - 3I)^{-1}B$$

Para  $a=1$  hemos visto que  $(A - 3I)^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Hallamos la expresión de X.

$$\begin{aligned} X = (A - 3I)^{-1}B &= \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 6-1-2 \\ 3-2-2 \\ 3-1-4 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ &\quad 3 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 1 \longrightarrow 3 \times 1 \end{aligned}$$

La matriz buscada es  $X = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ .

**EJERCICIO 1.B. (2,5 puntos)**

Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & a+4 & 2 \end{pmatrix}$  donde  $a$  es un número real.

a) Encuentra los valores de  $a$  para los cuales el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones.

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Resuelve el sistema anterior para el caso  $a = 0$ , si es posible.

c) ¿Existe algún valor de  $a$  para el cual el sistema anterior no tiene solución? Justifica tu respuesta.

Estudiamos el sistema  $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

El sistema tiene como matriz de coeficientes  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & a+4 & 2 \end{pmatrix}$  y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ -5 & a+4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de  $A$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & a+4 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 10 - 3a(a+4) + 10a - 6 - 2(a+4) =$$

$$= 4 + 10 - 3a^2 - 12a + 10a - 6 - 2a - 8 = -3a^2 - 4a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3a^2 - 4a = 0 \Rightarrow -a(3a+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 3a+4 = 0 \rightarrow 3a = -4 \rightarrow a = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Nos surgen tres situaciones distintas que analizamos por separado.

**CASO 1.**  $a \neq 0$  y  $a \neq -\frac{4}{3}$ .

En este caso el determinante de la matriz  $A$  es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada  $A/B$  y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (una única solución).

**CASO 2.**  $a = 0$ 

En este caso el determinante de la matriz A es nulo y su rango no es 3. Analizamos su rango y el de la matriz ampliada obteniendo una matriz triangular equivalente a la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -3 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \\ 3 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 5 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -5 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \\ 5 \quad -5 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

**CASO 3.**  $a = \frac{-4}{3}$ 

En este caso el determinante de la matriz A es nulo y su rango no es 3. Analizamos su rango y el de la matriz ampliada obteniendo una matriz triangular equivalente a la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4/3 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ -5 & -4/3 + 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4/3 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ -5 & 8/3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -3 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \\ 3 \quad -3 \quad -4 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -2 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 5 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -5 \quad 8/3 \quad 2 \quad 0 \\ 5 \quad -5 \quad -20/3 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -7/3 \quad -14/3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4/3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -7/3 & -14/3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \frac{7}{3} \cdot \text{Fila } 2^a \\ 1 \quad -1 \quad -4/3 \quad 0 \\ 0 \quad -7/3 \quad -14/3 \quad 0 \\ 0 \quad 7/3 \quad 14/3 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} \overbrace{1 \quad -1 \quad -4/3}^{A/B} & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_A & 0 \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

El sistema tiene infinitas soluciones para  $a = 0$  y para  $a = \frac{-4}{3}$ .

b) Para  $a = 0$  el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos partiendo del sistema triangular obtenido en el apartado anterior.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} \overbrace{1 \quad -1 \quad 0}^{A/B} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_A & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = y \\ 2z = y \Rightarrow z = \frac{1}{2}y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = \frac{1}{2}t \end{array} \right\}, \text{ siendo } t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Para } a = 0 \text{ las soluciones del sistema son } \left. \begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = \frac{1}{2}t \end{array} \right\}, \text{ siendo } t \in \mathbb{R}.$$

c) El sistema siempre tiene solución. En el apartado a) hemos visto que si  $a \neq 0$  y  $a \neq \frac{-4}{3}$  el sistema tiene una única solución y si  $a = 0$  o  $a = \frac{-4}{3}$  el sistema tiene infinitas soluciones.

**Otra forma de razonarlo:** El sistema es homogéneo e independientemente del valor de  $a$  siempre tiene una solución:  $x = y = z = 0$ .



**EJERCICIO 2.A. (2,5 puntos)**

Dada la función  $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ .

- a) Encuentra sus máximos y mínimos relativos y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.  
 b) Calcula  $g(x)$  sabiendo que  $g'(x) = f(x)$  y que  $g(0) = 1$ .

- a) Dado que el denominador de la función nunca se anula el dominio de la función es  $\mathbb{R}$ .  
 Averiguamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos)

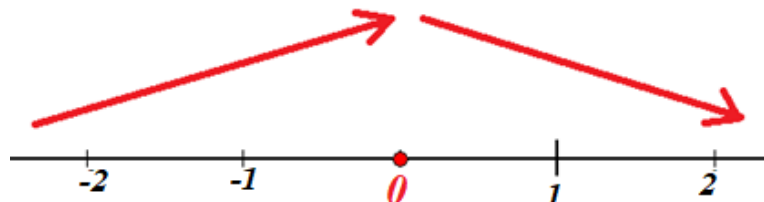
$$f(x) = \frac{x+1}{e^x} = (x+1)e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (x+1)(-1) \cdot e^{-x} = (1-x-1)e^{-x} = -xe^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -xe^{-x} = 0 \Rightarrow \{e^{-x} \neq 0\} \Rightarrow -x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después del punto crítico  $x=0$ .

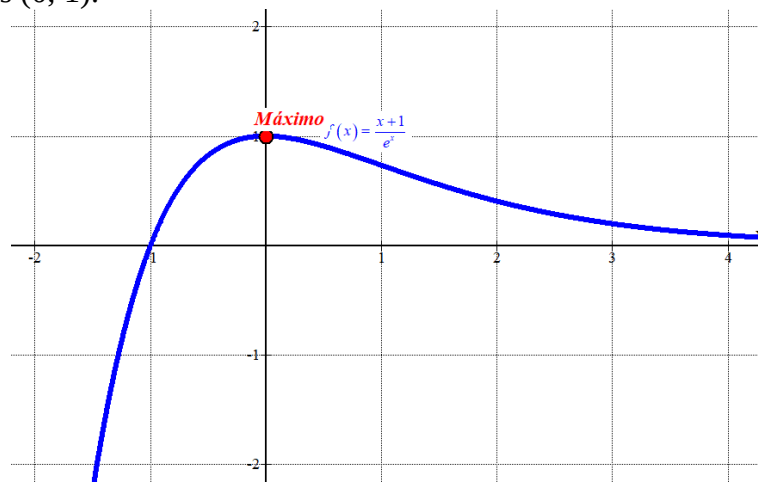
- En el intervalo  $(-\infty, 0)$  tomamos  $x=-1$  y la derivada vale  $f'(-1) = -(-1)e^{-(-1)} = e^1 > 0$ . La función crece en  $(-\infty, 0)$ .
- En el intervalo  $(0, +\infty)$  tomamos  $x=1$  y la derivada vale  $f'(1) = -1e^{-1} = \frac{-1}{e} < 0$ . La función decrece en  $(0, +\infty)$ .

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en  $(-\infty, 0)$  y decrece en  $(0, +\infty)$ .

La función tiene un máximo relativo en  $x=0$ . Como  $f(0) = \frac{0+1}{e^0} = 1$  el máximo relativo tiene coordenadas  $(0, 1)$ .



b) Si  $g'(x) = f(x)$  entonces:

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int g'(x) dx = \int f(x) dx = \int \frac{x+1}{e^x} dx = \int (x+1)e^{-x} dx = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x+1 \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} dx \rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{array} \right\} = -e^{-x}(x+1) - \int -e^{-x} dx = \\
 &= -e^{-x}(x+1) + \int e^{-x} dx = -e^{-x}(x+1) - e^{-x} = \boxed{-(x+2)e^{-x} + C}
 \end{aligned}$$

La función tiene la expresión  $g(x) = -(x+2)e^{-x} + C$ . Para obtener el valor de C aplicamos que  $g(0) = 1$ .

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = 1 \\ g(x) = -(x+2)e^{-x} + C \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = -(0+2)e^{-0} + C \Rightarrow 1 = -2 + C \Rightarrow \boxed{C = 3}$$

La función buscada es  $g(x) = -(x+2)e^{-x} + 3$ ,

**EJERCICIO 2.B. (2,5 puntos)**

Sean las funciones:  $f(x) = -3x - 5$  y  $g(x) = (x+1)^2 - 2$

a) Calcula el polinomio de grado 3 que tiene un máximo relativo en el punto (0,2) y su recta tangente en el punto de inflexión de abscisa  $x=1$  es paralela a la recta  $f(x)$

b) Calcula el área del recinto limitado por  $f(x)$  y  $g(x)$

a) Un polinomio de grado 3 tiene la expresión  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Determinamos los valores de los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ ,

El polinomio tiene un máximo relativo en el punto (0,2), por lo que  $P'(0) = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} P'(0) = 0 \\ P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

El polinomio queda  $P(x) = ax^3 + bx^2 + d$ . Si el polinomio tiene un máximo relativo en el punto (0,2) se debe cumplir que  $P(0) = 2$ .

$$\left. \begin{array}{l} P(x) = ax^3 + bx^2 + d \\ P(0) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + d \Rightarrow \boxed{d = 2}$$

El polinomio queda  $P(x) = ax^3 + bx^2 + 2$ . El polinomio tiene un punto de inflexión de abscisa  $x=1$ , por lo que  $P''(1) = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} P''(1) = 0 \\ P(x) = ax^3 + bx^2 + 2 \rightarrow P'(x) = 3ax^2 + 2bx \rightarrow P''(x) = 6ax + 2b \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 6a \cdot 1 + 2b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6a + 2b = 0 \Rightarrow 2b = -6a \Rightarrow \boxed{b = -3a}$$

El polinomio queda  $P(x) = ax^3 - 3ax^2 + 2$ . Si la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa  $x=1$  es paralela a la recta  $f(x) = -3x - 5$  entonces la recta tangente debe tener la misma pendiente que  $f(x) = -3x - 5$ , es decir, la pendiente de la tangente en  $x=1$  debe ser  $-3 \rightarrow P'(1) = -3$ .

$$\left. \begin{array}{l} P'(1) = -3 \\ P(x) = ax^3 - 3ax^2 + 2 \rightarrow P'(x) = 3ax^2 - 6ax \end{array} \right\} \Rightarrow -3 = 3a \cdot 1^2 - 6a \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 = 3a - 6a \Rightarrow -3 = -3a \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

El polinomio buscado tiene la expresión  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ .

b) Hallamos los posibles puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -3x - 5 = (x+1)^2 - 2 \Rightarrow -3x - 5 = x^2 + 1 + 2x - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = x^2 + 5x + 4 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-5+3}{2} = \boxed{-1=x} \\ \frac{-5-3}{2} = \boxed{-4=x} \end{cases}$$

Las dos funciones se cortan en  $x = -4$  y en  $x = -1$ . El área del recinto encerrado entre las gráficas de las dos funciones es el valor absoluto de la integral definida entre  $-4$  y  $-1$  de la diferencia de las dos funciones.

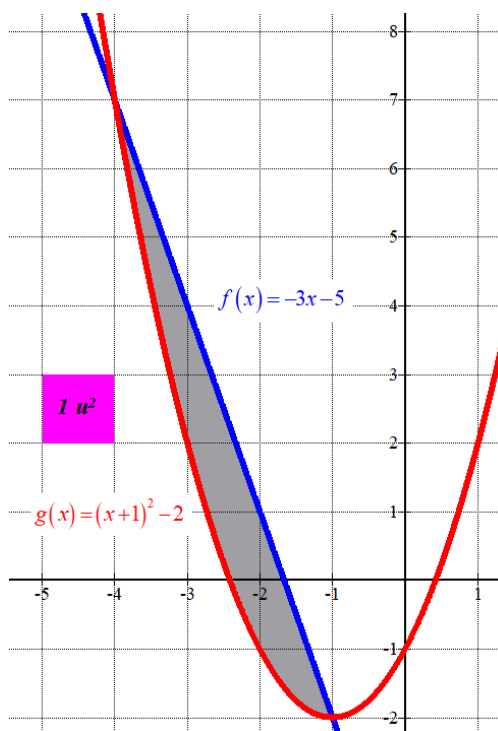
$$\int_{-4}^{-1} g(x) - f(x) dx = \int_{-4}^{-1} (x+1)^2 - 2 - (-3x-5) dx = \int_{-4}^{-1} x^2 + 1 + 2x - 2 + 3x + 5 dx =$$

$$= \int_{-4}^{-1} x^2 + 5x + 4 dx = \left[ \frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + 4x \right]_{-4}^{-1} =$$

$$= \left[ \frac{(-1)^3}{3} + 5\frac{(-1)^2}{2} + 4(-1) \right] - \left[ \frac{(-4)^3}{3} + 5\frac{(-4)^2}{2} + 4(-4) \right] =$$

$$= \frac{-1}{3} + \frac{5}{2} - 4 + \frac{64}{3} - 40 + 16 = \frac{63}{3} + \frac{5}{2} - 28 = \boxed{-4.5}$$

El área del recinto encerrado entre las gráficas de las dos funciones tiene un valor de 4.5 unidades cuadradas.



**EJERCICIO 3.A. (2,5 puntos)**

Sean el plano  $\pi: 2x + y - z - 5 = 0$  y los puntos  $A(1, 2, -1)$ ,  $B(2, 1, 0)$ . Obtén de forma razonada:

a) La ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a  $\pi$ .

b) La ecuación de la recta  $r$  que es perpendicular a  $\pi$  y pasa por A.

c) La distancia entre el punto B y la recta  $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$

a) Un plano  $\pi'$  perpendicular a  $\pi$  tiene como vector director el vector normal del plano  $\pi$ . Como debe contener los puntos A y B otro de sus vectores directores es  $\overrightarrow{AB}$ . Hallamos la ecuación del plano  $\pi'$ .

$$\pi: 2x + y - z - 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, 1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, -1) \\ B(2, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2, 1, 0) - (1, 2, -1) = (1, -1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n} = (2, 1, -1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1, -1, 1) \\ B(2, 1, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - y + 1 - 2z - z - 2y + 2 - x + y = 0 \Rightarrow -3y - 3z + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': y + z - 1 = 0}$$

La ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a  $\pi$  es  $\pi': y + z - 1 = 0$ .

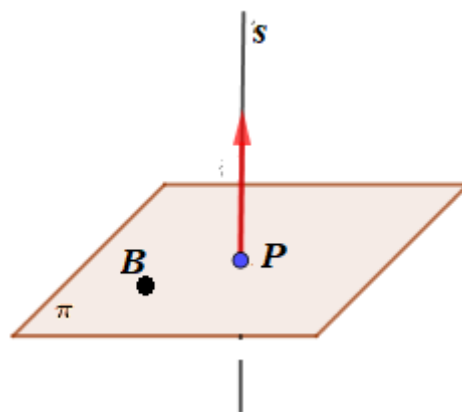
b) La recta  $r$  que es perpendicular a  $\pi$  tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: 2x + y - z - 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, 1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 2, -1) \in r \\ \vec{u}_r = \vec{n} = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - t \end{cases}, \text{ siendo } t \in \mathbb{R}$$

La ecuación de la recta  $r$  que es perpendicular a  $\pi$  y pasa por A es  $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - t \end{cases}, \text{ siendo } t \in \mathbb{R}$ .

c) Para hallar la distancia de B a la recta  $s$  hallamos el plano  $\pi$  perpendicular a la recta que pasa por B. Después determinamos el punto P de corte del plano y la recta. La distancia del punto B a la recta  $s$  es el módulo del vector  $\overrightarrow{BP}$ .



El plano  $\pi$  perpendicular a la recta que pasa por B tiene como vector normal el vector director de la recta s.

$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow \vec{v}_s = (2, 1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_s = (2, 1, -1) \\ B(2, 1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: 2x + y - z + D = 0 \\ B(2, 1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2 + 1 - 0 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x + y - z - 5 = 0}$$

Hallamos el punto P de corte de la recta s y el plano  $\pi: 2x + y - z - 5 = 0$ .

$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_s(1, 2, -1) \\ \vec{v}_s = (2, 1, -1) \end{array} \right. \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + y - z - 5 = 0 \\ s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - t \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2t) + 2 + t - (-1 - t) - 5 = 0 \Rightarrow$$

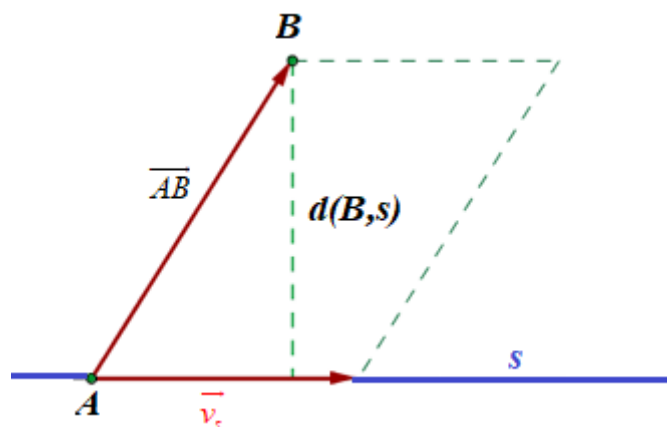
$$\Rightarrow 2 + 4t + 2 + t + 1 + t - 5 = 0 \Rightarrow 6t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \\ y = 2 + 0 = 2 \\ z = -1 - 0 = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(1, 2, -1)}$$

Hallamos el módulo del vector  $\overrightarrow{BP}$ .

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 2, -1) \\ B(2, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{BP} = (1, 2, -1) - (2, 1, 0) = (-1, 1, -1) \Rightarrow |\overrightarrow{BP}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

La distancia del punto B a la recta s vale  $\sqrt{3} \approx 1.73$  unidades.

## OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO c)



Hallamos el área del paralelogramo que definen los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{v_s}$ . Luego dividimos el valor del área entre el módulo del vector  $\overrightarrow{v_s}$  (base del paralelogramo) obteniendo su altura que es el valor de la distancia del punto B a la recta s.

Hallamos el área del paralelogramo como el módulo del producto vectorial de los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{v_s}$ .

$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1} \rightarrow A(1, 2, -1) \left. \begin{array}{l} B(2, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2, 1, 0) - (1, 2, -1) = (1, -1, 1)$$

$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (2, 1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{v_s} = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = i + 2j + k + 2k + j - i = 3j + 3k = (0, 3, 3)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{v_s}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Hallamos la distancia del punto B a la recta s como } d(B, s) = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{v_s}|}{|\overrightarrow{v_s}|}.$$

$$d(B, s) = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{v_s}|}{|\overrightarrow{v_s}|} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{12}}{6} = \sqrt{3} \approx 1.73 \text{ unidades}$$

**EJERCICIO 3.B. (2,5 puntos)**

Dada la recta  $r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -t \end{cases}$  y dado el plano  $\pi : mx + 3y - 4z + 6 = 0$ .

- Estudia la posición relativa de la recta y el plano según los valores del parámetro  $m$ .
- Para  $m = 2$ , calcula la ecuación general del plano que contiene a la recta  $r$  y es perpendicular al plano  $\pi$ .
- Para  $m = 0$ , halla el ángulo que determinan la recta y el plano.

a) Hallamos un vector director de la recta y un vector normal del plano.

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -2, -1) \\ P_r(2, 1, 0) \end{cases}$$

$$\pi : mx + 3y - 4z + 6 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (m, 3, -4)$$

Si son perpendiculares los dos vectores obtenidos entonces la recta es paralela al plano o la recta está contenida en el plano. Averiguamos cuando su producto escalar es nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, -2, -1) \\ \vec{n} = (m, 3, -4) \\ \vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (m, 3, -4)(1, -2, -1) = 0 \Rightarrow m - 6 + 4 = 0 \Rightarrow m - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 2}$$

Comprobamos si para  $m = 2$  la recta es paralela o está contenida en el plano. Para ello comprobamos si el punto  $P_r(2, 1, 0)$  pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} m = 2 \rightarrow \pi : 2x + 3y - 4z + 6 = 0 \\ \text{¿} P_r(2, 1, 0) \in \pi ? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 6 = 0 ? \Rightarrow \text{¿} 4 + 3 - 0 + 6 = 0 ?$$

La igualdad no es cierta, la recta  $r$  no está contenida en el plano y podemos decir que para  $m = 2$  la recta  $r$  es paralela al plano  $\pi$ .

Para  $m \neq 2$  los vectores no son perpendiculares y la recta corta al plano en un punto.

**Resumiendo:** Si  $m = 2$  la recta es paralela al plano y si  $m \neq 2$  la recta corta al plano en un punto.

- Para  $m = 2$  el plano tiene ecuación  $\pi : 2x + 3y - 4z + 6 = 0$ . El plano  $\pi'$  que contiene a la recta  $r$  y es perpendicular al plano  $\pi$  tiene como vectores directores el vector director de la recta  $\vec{v}_r = (1, -2, -1)$  y el vector normal del plano  $\vec{n} = (2, 3, -4)$ .



$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n} = (2, 3, -4) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, -2, -1) \\ P_r(2, 1, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x + 6 - 4y + 4 - 4z - 3z + 2y - 2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': -11x - 2y - 7z + 24 = 0}$$

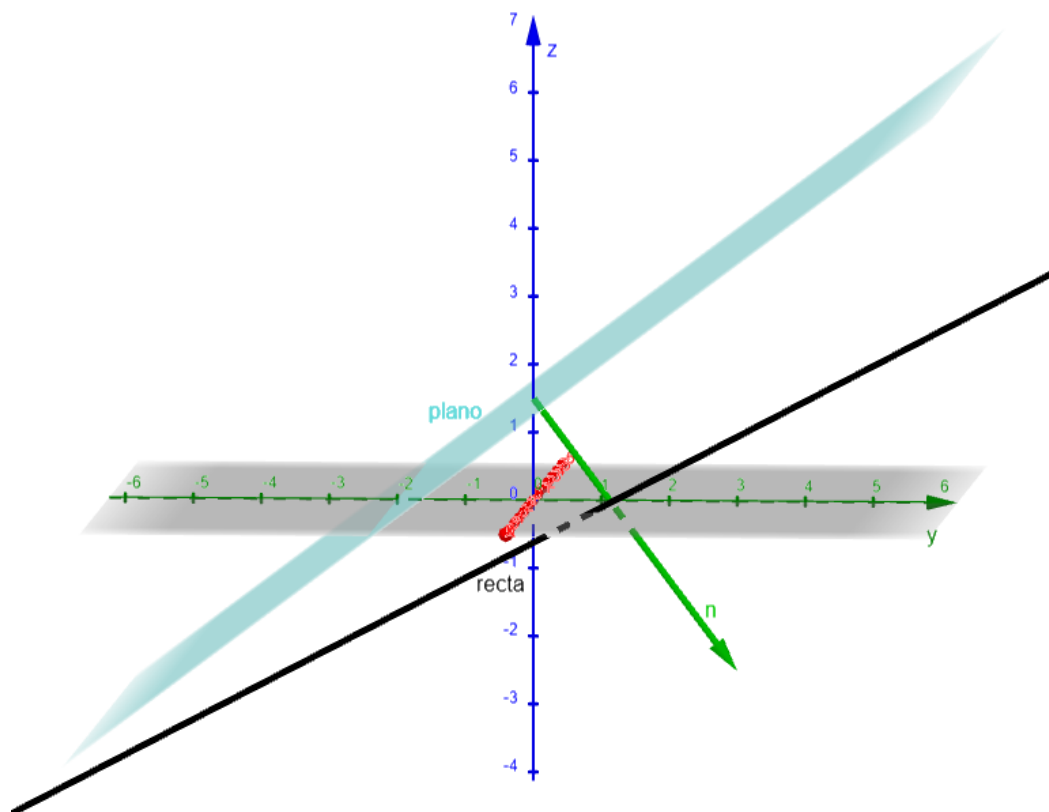
Para  $m=2$  la ecuación general del plano  $\pi'$  que contiene a la recta  $r$  y es perpendicular al plano  $\pi$  tiene la expresión  $\pi': -11x - 2y - 7z + 24 = 0$ .

- c) Para  $m=0$  el plano tiene ecuación  $\pi: 3y - 4z + 6 = 0$  y por lo estudiado en el apartado a) sabemos que la recta  $r$  es secante con el plano.  
Hallamos el ángulo formado por el vector normal del plano y el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, -2, -1) \\ \vec{n} = (0, 3, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{v}_r, \vec{n}) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{n}}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(1, -2, -1)(0, 3, -4)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2}} =$$

$$= \frac{0 - 6 + 4}{\sqrt{6} \sqrt{25}} = \frac{-2}{5\sqrt{6}} \Rightarrow \boxed{(\vec{v}_r, \vec{n}) = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{5\sqrt{6}}\right) \approx 99.4^\circ}$$

Para  $m=0$  el ángulo que determinan la recta y el plano tiene un valor aproximado de  $99.4^\circ - 90^\circ = 9.4^\circ$ .



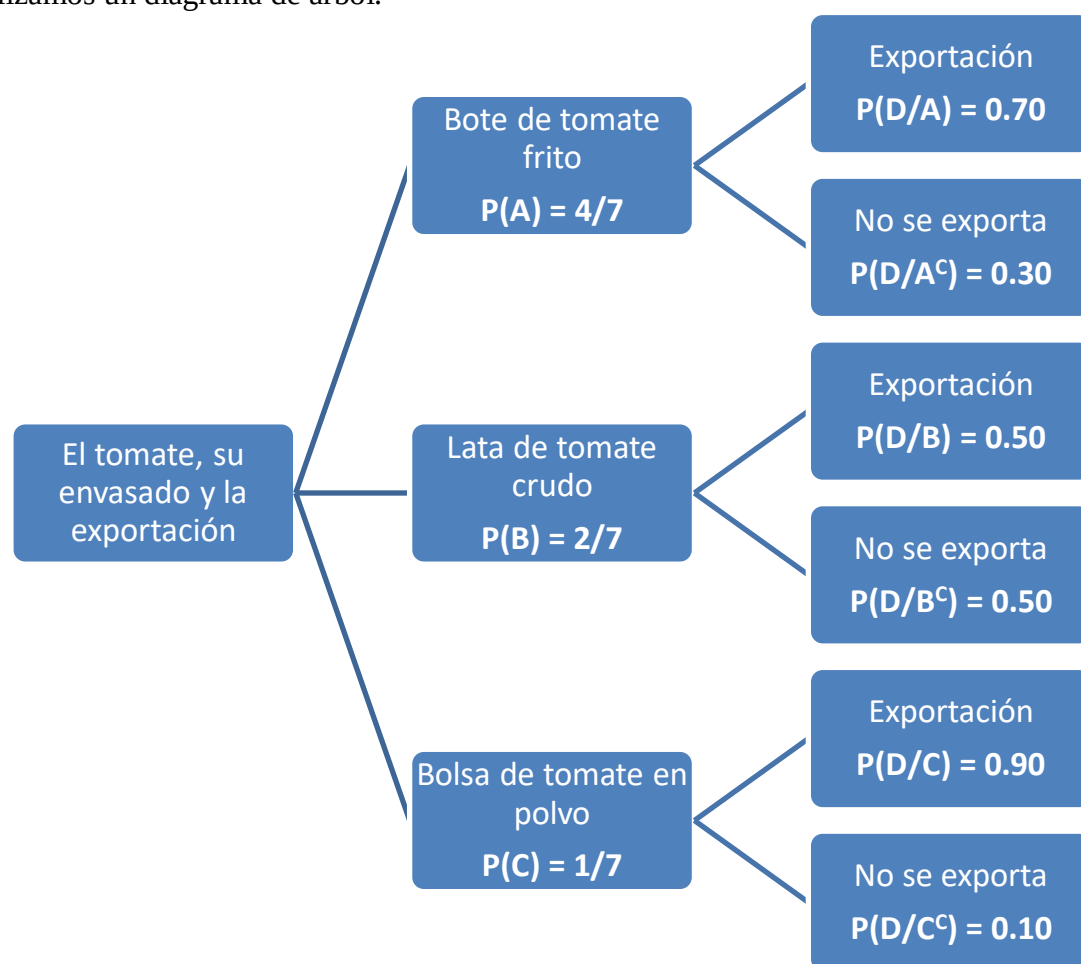
**EJERCICIO 4. (2,5 puntos)**

Una fábrica dedicada a la elaboración de tomate localizada en el centro de Extremadura tiene tres tipos de productos para su venta: cuatro de cada siete producciones son botes de tomate frito, dos de cada siete son latas de tomate crudo y el resto, bolsas de concentrado de tomate en polvo. Sabemos, además, que exporta el 70% del tomate frito, el 50% del tomate crudo y el 90% del concentrado de tomate en polvo. Elegido un producto al azar, se pide:

- Calcular la probabilidad de que el producto elegido sea destinado a la exportación.
- Calcular la probabilidad de que el producto elegido sea un bote de tomate crudo sabiendo que no se ha destinado a la exportación.
- Calcular la probabilidad de que el producto elegido al azar sea tomate frito y que se exporte.
- Calcular la probabilidad de que el producto elegido al azar sea tomate frito o que se exporte.

Llamamos A al suceso “el producto es un bote de tomate frito”, B a “el producto es una lata de tomate crudo”, C a “el producto es una bolsa de tomate en polvo” y D a “el producto se dedica a la exportación”

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular  $P(D)$ . Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= \frac{4}{7} \cdot 0.7 + \frac{2}{7} \cdot 0.5 + \frac{1}{7} \cdot 0.9 = \boxed{\frac{47}{70} \approx 0.6714}$$

b) Nos piden calcular  $P(B/D^c)$ . Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/D^c) = \frac{P(B \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(B)P(D^c/B)}{1 - P(D)} = \frac{\frac{2}{7} \cdot 0.5}{1 - \frac{47}{70}} = \boxed{\frac{10}{23} \approx 0.4348}$$

c) Nos piden calcular  $P(A \cap D)$ .

$$P(A \cap D) = P(A)P(D/A) = \frac{4}{7} \cdot 0.7 = \boxed{\frac{2}{5} = 0.40}$$

d) Debemos calcular  $P(A \cup D)$ . Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) = \frac{4}{7} + \frac{47}{70} - \frac{2}{5} = \boxed{\frac{59}{70} \approx 0.8429}$$

#### OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos porcentuales a valores absolutos.

Suponemos que hay 700 productos. Cuatro de cada siete producciones son botes de tomate frito., por lo que  $\frac{4}{7} \cdot 700 = 400$  productos son botes de tomate frito, dos de cada siete son latas

de tomate crudo, por lo que  $\frac{2}{7} \cdot 700 = 200$  productos son latas de tomate crudo y el resto, bolsas

de concentrado de tomate en polvo, es decir  $700 - 400 - 200 = 100$  bolsas de tomate en polvo. Sabemos, además, que exporta el 70% del tomate frito ( $0.70 \cdot 400 = 280$  botes de tomate frito se exportan), el 50% del tomate crudo ( $0.50 \cdot 200 = 100$  latas de tomate crudo se exportan) y el 90% del concentrado de tomate en polvo ( $0.90 \cdot 100 = 90$  bolsas de tomate en polvo se exportan).

Colocamos todos estos datos en una tabla para tenerlos más organizados.

|                | Tomate frito | Tomate crudo | Tomate polvo | TOTALES |
|----------------|--------------|--------------|--------------|---------|
| Se exportan    | 280          | 100          | 90           |         |
| No se exportan |              |              |              |         |
| TOTALES        | 400          | 200          | 100          | 700     |

Completamos la tabla.

|                | Tomate frito | Tomate crudo | Tomate polvo | TOTALES    |
|----------------|--------------|--------------|--------------|------------|
| Se exportan    | 280          | 100          | 90           | <b>470</b> |
| No se exportan | <b>120</b>   | <b>100</b>   | <b>10</b>    | <b>230</b> |
| TOTALES        | 400          | 200          | 100          | 700        |

Aplicamos la regla de Laplace para responder a las preguntas planteadas.

- a) De los 700 productos se exportan un total de 470, por lo que la probabilidad de que al elegir un producto al azar este sea destinado a la exportación vale  $\frac{470}{700} = \frac{47}{70}$ .
- b) De los 230 productos que no se exportan 100 son latas de tomate crudo, por lo que la probabilidad de que el producto elegido sea un bote de tomate crudo sabiendo que no se ha destinado a la exportación vale  $\frac{100}{230} = \frac{10}{23}$ .
- c) De los 700 productos solo 280 son botes de tomate frito destinado a la exportación, por lo que la probabilidad de que el producto elegido al azar sea tomate frito y que se exporte vale  $\frac{280}{700} = \frac{2}{5}$ .
- d) De los 700 productos hay 400 que son tomate frito, 100 son latas de tomate crudo destinadas a la exportación y 90 son bolsas de tomate en polvo destinado a la exportación, por lo que la probabilidad de que el producto elegido al azar sea tomate frito o que se exporte vale  $\frac{400+100+90}{700} = \frac{590}{700} = \frac{59}{70}$ .