



Universidad
Zaragoza

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

MODELO ORIENTATIVO EXAMEN 2026

EJERCICIO DE **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Las tres primeras preguntas son obligatorias. En la cuarta pregunta deberán elegirse únicamente DOS de las TRES cuestiones. En caso de responder a las tres, solo se corregirán las dos que aparezcan contestadas en primer lugar.

Cada ejercicio del examen se califica sobre 10 puntos y las cuatro preguntas tienen el mismo peso en la nota final (2,5 puntos cada una). La nota final se obtendrá sumando las puntuaciones de los ejercicios y dividiendo el total entre 4.

Las respuestas deben expresarse de forma razonada, mostrando con rigor y precisión el proceso seguido en la resolución. Se deberá emplear el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados, así como argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. La mera descripción del planteamiento, sin llevar a cabo de manera efectiva la resolución, no será suficiente para obtener una valoración completa de la pregunta o tarea.

La tabla de la distribución normal está disponible al final del examen, aunque es posible que no sea necesaria en ninguna pregunta.

1.- (10 puntos) Una empresa de marketing está llevando a cabo una campaña para promover tres tipos de servicios: asesoría de imagen, diseño gráfico y gestión de redes sociales. Se sabe que durante el primer mes de la campaña se vendieron en total 240 servicios, y que la empresa recaudó 4.320 euros. La asesoría de imagen tiene un precio de 16 euros por servicio, el diseño gráfico cuesta 24 euros por servicio y la gestión de redes sociales tiene un precio de 12 euros por servicio. Además, se sabe que la empresa vendió el doble de servicios de asesoría de imagen que de diseño gráfico.

a.- (5 puntos) Plantee el sistema de ecuaciones lineales asociado al problema y expréselo en la forma $AX = B$, donde A es la matriz de coeficientes, X es la matriz de incógnitas y B la matriz de términos independientes. Determine, utilizando técnicas matriciales, cuántos servicios de cada tipo fueron vendidos durante ese mes.

b.- (5 puntos) Suponga ahora que el precio de un servicio de diseño gráfico es m euros en lugar de 24 euros y el resto de valores se mantienen igual. Razone si se podría calcular la solución matemática del sistema utilizando la fórmula matricial $X = A^{-1}B$ para los casos $m = 4$ y $m = 28$. **Nota:** no se pide calcular la solución, solo se pide que se justifique la respuesta teniendo en cuenta si la matriz es regular (invertible) o no.

2.- (10 puntos) Una empresa de videojuegos está produciendo una consola de edición limitada. El coste total de producir x unidades de esta consola viene dado por la función $C(x) = 1.500x + 1.000.000$. Cada consola se vende a un precio unitario que depende de la cantidad de consolas vendidas, x , dado por la función $P(x) = 4.000 - x$. El coste total y el precio unitario se miden en euros.

a.- (6 puntos) Plantee la función que expresa el beneficio obtenido al vender x consolas.

Determine los intervalos en los que el beneficio crece y decrece. ¿Cuántas consolas debe vender para obtener el máximo beneficio posible? Indique cuál es dicho beneficio.

Nota: Beneficio = Ingresos – Costes.

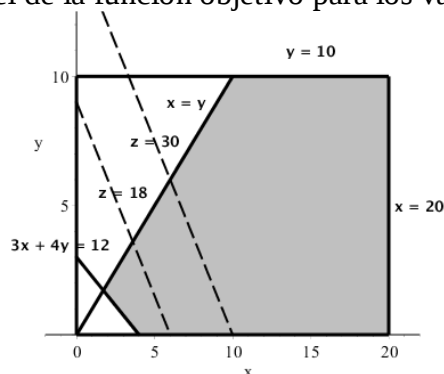
b.- (4 puntos) ¿Cuántas consolas tiene que vender la empresa para no tener pérdidas

3.- (10 puntos) Diego es un joven guitarrista que ha sido invitado a abrir el concierto de Ed Sheeran, una oportunidad única para mostrarse ante una gran audiencia. Durante el evento, Diego interpretará cuatro canciones. Diego ha practicado mucho y, para cada canción, tiene una probabilidad de 0,9 de tocarla sin errores. Las interpretaciones de cada canción son independientes entre sí.

- a.- (5 puntos) Diego estará orgulloso con su actuación si toca al menos tres canciones sin errores. ¿Cuál es la probabilidad de que al finalizar su actuación Diego se sienta orgulloso?
- b.- (5 puntos) Diego decide evaluar su desempeño durante los ensayos previos al concierto. En 50 interpretaciones de sus canciones en los ensayos, estima que toca sin errores el 90% de las veces. Calcula un intervalo de confianza del 95% para la proporción de canciones tocadas sin errores durante los ensayos.

4.- (10 puntos) Elija DOS de las TRES cuestiones siguientes.

Q1.- (5 puntos) Dada la región factible S (parte sombreada de la figura) y expresada como $S = \{3x + 4y \geq 12, x \geq y, 0 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 10\}$. Calcule el valor mínimo de la función objetivo, $z = f(x, y) = 3x + 2y$, el punto donde se alcanza y explique el procedimiento seguido para obtenerlo. **Nota:** como ayuda para la resolución, en la gráfica también se representan, en trazo discontinuo, las líneas de nivel de la función objetivo para los valores $z = 18$ y $z = 30$.



Q2.- (5 puntos) Calcule $\int_6^{16} \left(\frac{1}{\sqrt{2x+4}} + \frac{1}{x} \right) dx$.

Q3.- (5 puntos) De los sucesos A y B, se sabe que: $P(A) = 1/2$, $P(B) = 2/3$ y $P(A \cup B) = 5/6$. Calcule $P(A \cap B)$ y $P(\bar{A} \cap B)$ siendo $\bar{A}$ el suceso contrario de A. ¿Son A y B dos sucesos independientes? Justifique la respuesta.

Tabla de la distribución normal (puede no ser necesaria para el examen):

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9915	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9935	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

Álgebra 37,5%	Análisis 37.5%	Probabilidad y Estadística 25%
0		
Álgebra 37,5%	Análisis 25%	Probabilidad y Estadística 37.5%
0		
Álgebra 25%	Análisis 37.5%	Probabilidad y Estadística 37.5%

Problema 1. (Obligatorio – 2.5 puntos) Álgebra.

Problema 2. (Obligatorio – 2.5 puntos) Análisis.

Problema 3. (Obligatorio – 2.5 puntos) Probabilidad y Estadística.

Problema 4. (Con optatividad – 2.5 puntos) Álgebra, Análisis o Probabilidad y Estadística.

1.- (10 puntos) Una empresa de marketing está llevando a cabo una campaña para promover tres tipos de servicios: asesoría de imagen, diseño gráfico y gestión de redes sociales. Se sabe que durante el primer mes de la campaña se vendieron en total 240 servicios, y que la empresa recaudó 4.320 euros. La asesoría de imagen tiene un precio de 16 euros por servicio, el diseño gráfico cuesta 24 euros por servicio y la gestión de redes sociales tiene un precio de 12 euros por servicio. Además, se sabe que la empresa vendió el doble de servicios de asesoría de imagen que de diseño gráfico.

a.- (5 puntos) Plantee el sistema de ecuaciones lineales asociado al problema y expréselo en la forma $AX = B$, donde A es la matriz de coeficientes, X es la matriz de incógnitas y B la matriz de términos independientes. Determine, utilizando técnicas matriciales, cuántos servicios de cada tipo fueron vendidos durante ese mes.

b.- (5 puntos) Suponga ahora que el precio de un servicio de diseño gráfico es m euros en lugar de 24 euros y el resto de valores se mantienen igual. Razone si se podría calcular la solución matemática del sistema utilizando la fórmula matricial $X = A^{-1}B$ para los casos $m = 4$ y $m = 28$. **Nota:** no se pide calcular la solución, solo se pide que se justifique la respuesta teniendo en cuenta si la matriz es regular (invertible) o no.

a.- Llamamos x = número de servicios de asesoría de imagen vendidos, y = número de servicios de diseño gráfico vendidos, z = número de servicios de gestión de redes sociales vendidos.

“Se vendieron en total 240 servicios” $\rightarrow x + y + z = 240$.

“La empresa recaudó 4.320 euros. La asesoría de imagen tiene un precio de 16 euros por servicio, el diseño gráfico cuesta 24 euros por servicio y la gestión de redes sociales tiene un precio de 12 euros por servicio” $\rightarrow 16x + 24y + 12z = 4320$.

“La empresa vendió el doble de servicios de asesoría de imagen que de diseño gráfico” $\rightarrow x = 2y$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 240 \\ 16x + 24y + 12z = 4320 \\ x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 240 \\ 4x + 6y + 3z = 1080 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 1080 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema hallando la inversa de la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 3 - 8 - (6 + 0 - 6) = -5 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}}{-5} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -14 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema la obtenemos despejando X de la ecuación matricial $AX = B$.

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -14 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 240 \\ 1080 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 1440 - 2160 \\ 720 - 1080 \\ -3360 + 3240 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -720 \\ -360 \\ -120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 \\ 72 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Se vendieron 144 servicios de asesoría de imagen, 72 de diseño gráfico y 24 de gestión de redes sociales.

b.- Si el precio de un servicio de diseño gráfico es m euros en lugar de 24 euros y el resto de valores se mantienen igual el sistema que planteamos es:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 240 \\ 16x + my + 12z = 4320 \\ x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 16 & m & 12 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 4320 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $m = 4$ el sistema queda $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 12 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 4320 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comprobamos si el determinante de la matriz de coeficientes se anula o no.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 12 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 12 - 32 - (4 + 0 - 24) = -20 + 20 = 0$$

El determinante es nulo y la matriz A no es invertible y no podemos utilizar la fórmula matricial $X = A^{-1}B$ para resolver el sistema.

Para $m = 28$ el sistema queda
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 16 & 28 & 12 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 4320 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos si el determinante de la matriz de coeficientes se anula o no.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 16 & 28 & 12 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 12 - 32 - (28 + 0 - 24) = -20 - 4 = -24 \neq 0$$

El determinante es distinto de cero y la matriz A es invertible. Si podemos hallar A^{-1} y utilizar la fórmula matricial $X = A^{-1}B$ para resolver el sistema.

2.- (10 puntos) Una empresa de videojuegos está produciendo una consola de edición limitada. El coste total de producir x unidades de esta consola viene dado por la función $C(x) = 1.500x + 1.000.000$. Cada consola se vende a un precio unitario que depende de la cantidad de consolas vendidas, x , dado por la función $P(x) = 4.000 - x$. El coste total y el precio unitario se miden en euros.

a.- (6 puntos) Plantee la función que expresa el beneficio obtenido al vender x consolas. Determine los intervalos en los que el beneficio crece y decrece. ¿Cuántas consolas debe vender para obtener el máximo beneficio posible? Indique cuál es dicho beneficio.

Nota: Beneficio = Ingresos – Costes.

b.- (4 puntos) ¿Cuántas consolas tiene que vender la empresa para no tener pérdidas

a.- Los ingresos por la venta de las consolas es el producto del número de unidades por su precio unitario: $I(x) = x \cdot P(x) = x(4000 - x) = 4000x - x^2$. Obtenemos la expresión del beneficio $B(x)$ en función de las unidades vendidas (x).

$$\begin{aligned} B(x) &= I(x) - C(x) = 4000x - x^2 - (1500x + 100000) = \\ &= 4000x - x^2 - 1500x - 100000 = -x^2 + 2500x - 100000 \end{aligned}$$

El beneficio tiene la expresión $B(x) = -x^2 + 2500x - 100000$.

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos).

$$\left. \begin{array}{l} B'(x) = -2x + 2500 \\ B'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 2500 = 0 \Rightarrow 2x = 2500 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2500}{2} = 1250}$$

Comprobamos el signo de la derivada antes y después de $x = 1250$.

- En el intervalo $[0, 1250)$ tomamos $x = 1000$ y la derivada vale $B'(1000) = -2 \cdot 1000 + 2500 = 500 > 0$. La función crece en el intervalo $[0, 1250)$.
- En el intervalo $(1250, +\infty)$ tomamos $x = 2000$ y la derivada vale $B'(2000) = -2 \cdot 2000 + 2500 = -1500 < 0$. La función decrece en el intervalo $(1250, +\infty)$.

El beneficio crece con una producción de 0 a 1250 consolas y decrece produciendo más de 1250 consolas.

Como el beneficio crece antes y decrece después de $x = 1250$ la función tiene un máximo en $x = 1250$. Para obtener un máximo beneficio debe producir y vender 1250 consolas.

Como $B(1250) = -1250^2 + 2500 \cdot 1250 - 1000000 = 562500$, el beneficio máximo que se puede obtener es de 562.500 euros.

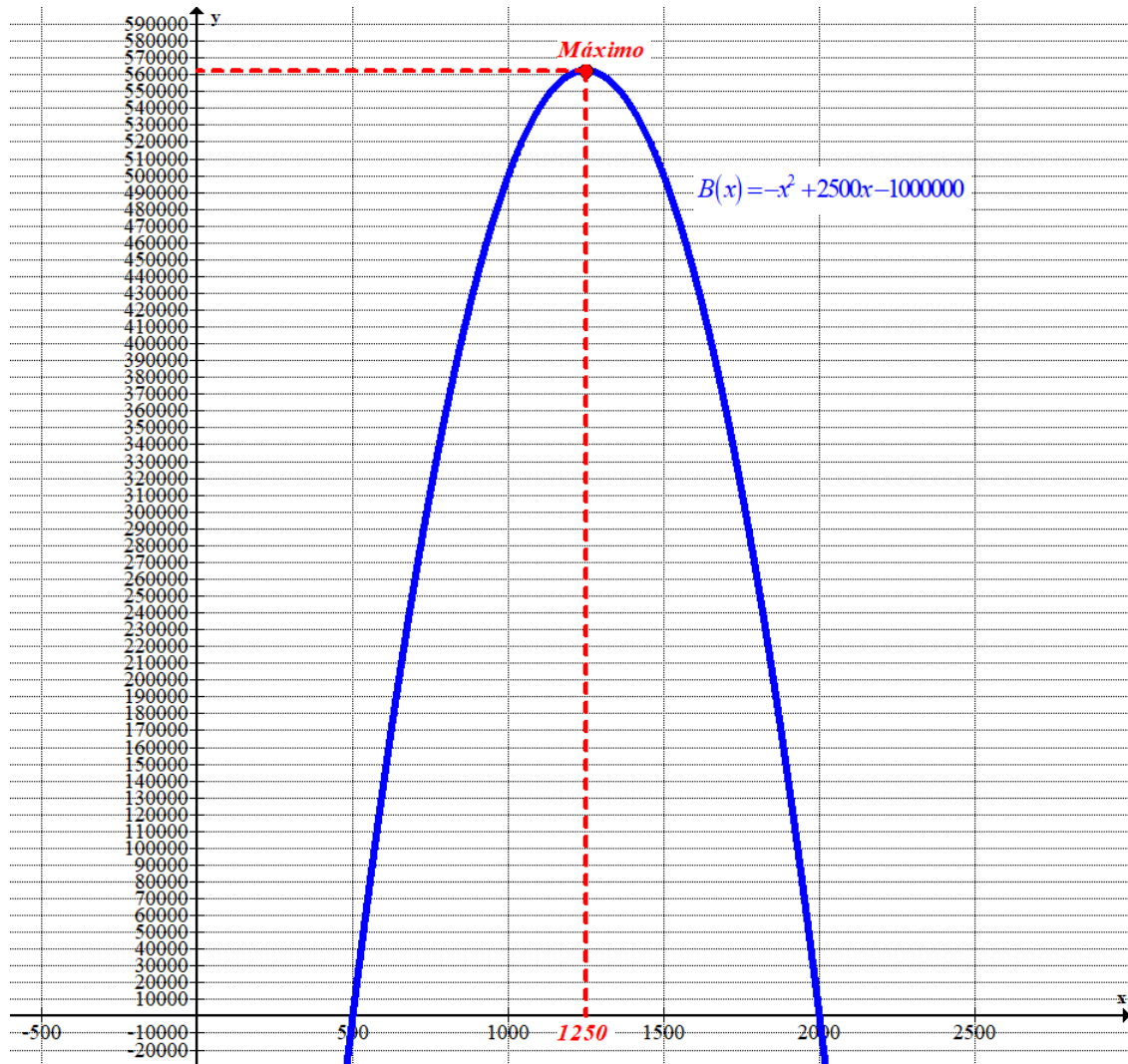
b.- Averiguamos cuando se anula el beneficio.

$$\begin{aligned} B(x) &= 0 \Rightarrow -x^2 + 2500x - 1000000 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \frac{-2500 \pm \sqrt{2500^2 - 4(-1)(-1000000)}}{2(-1)} = \frac{-2500 \pm 1500}{-2} = \begin{cases} \frac{-2500 + 1500}{-2} = \boxed{500 = x} \\ \frac{-2500 - 1500}{-2} = \boxed{2000 = x} \end{cases} \end{aligned}$$

La función beneficio $B(x) = -x^2 + 2500x - 1000000$ es una función continua (una parábola) que tiene su valor máximo en $x = 1250 \in (500, 2000)$, siendo este valor máximo positivo.

El beneficio es negativo por debajo de 500 y por encima de 2000 consolas.

La empresa debe producir entre 500 y 2000 consolas para no tener pérdidas.



3.- (10 puntos) Diego es un joven guitarrista que ha sido invitado a abrir el concierto de Ed Sheeran, una oportunidad única para mostrarse ante una gran audiencia. Durante el evento, Diego interpretará cuatro canciones. Diego ha practicado mucho y, para cada canción, tiene una probabilidad de 0,9 de tocarla sin errores. Las interpretaciones de cada canción son independientes entre sí.

a.- (5 puntos) Diego estará orgulloso con su actuación si toca al menos tres canciones sin errores. ¿Cuál es la probabilidad de que al finalizar su actuación Diego se sienta orgulloso?

b.- (5 puntos) Diego decide evaluar su desempeño durante los ensayos previos al concierto. En 50 interpretaciones de sus canciones en los ensayos, estima que toca sin errores el 90% de las veces. Calcula un intervalo de confianza del 95% para la proporción de canciones tocadas sin errores durante los ensayos.

a.- Nos piden calcular la probabilidad de que en el concierto Diego toque 3 o 4 canciones sin errores. Consideramos la variable aleatoria X = Número de canciones que Diego toca sin errores de un grupo de 4.

Esta variable es binomial con parámetros $n = 4$ y $p = 0.9$. $X = B(4, 0.9)$.

Hallamos la probabilidad pedida.

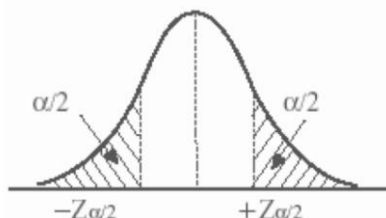
$$P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} 0.9^3 \cdot 0.1^1 + \binom{4}{4} 0.9^4 \cdot 0.1^0 = 4 \cdot 0.9^3 \cdot 0.1 + 0.9^4 = \boxed{0.9477}$$

La probabilidad de que al finalizar su actuación Diego se sienta orgulloso es de 0.9477.

b.- Tenemos que la proporción muestral de canciones que toca sin errores es $p = 0.90$ y el tamaño de la muestra es $n = 50$.

Para un nivel de confianza del 95% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$



k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9685	0.9
1.9	0.9713	0.9719	0.9725	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9

Para un nivel de confianza del 95% tenemos que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

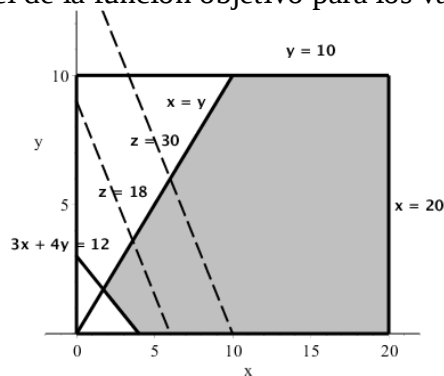
Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.96 \sqrt{\frac{0.9 \cdot 0.1}{50}} \approx 0.0832$$

El intervalo de confianza del 95% para la proporción de canciones tocadas sin errores durante los ensayos es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.9 - 0.0832, 0.9 + 0.0832) = (0.8168, 0.9832)$$

Q1.- (5 puntos) Dada la región factible S (parte sombreada de la figura) y expresada como $S = \{3x + 4y \geq 12, x \geq y, 0 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 10\}$. Calcule el valor mínimo de la función objetivo, $z = f(x, y) = 3x + 2y$, el punto donde se alcanza y explique el procedimiento seguido para obtenerlo. **Nota:** como ayuda para la resolución, en la gráfica también se representan, en trazo discontinuo, las líneas de nivel de la función objetivo para los valores $z = 18$ y $z = 30$.



Las rectas que delimitan la región S son

$$\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ y = x \\ x = 20 \\ y = 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \rightarrow \text{Primer cuadrante} \end{cases}$$

Determinamos las coordenadas de los cinco vértices de la región S .

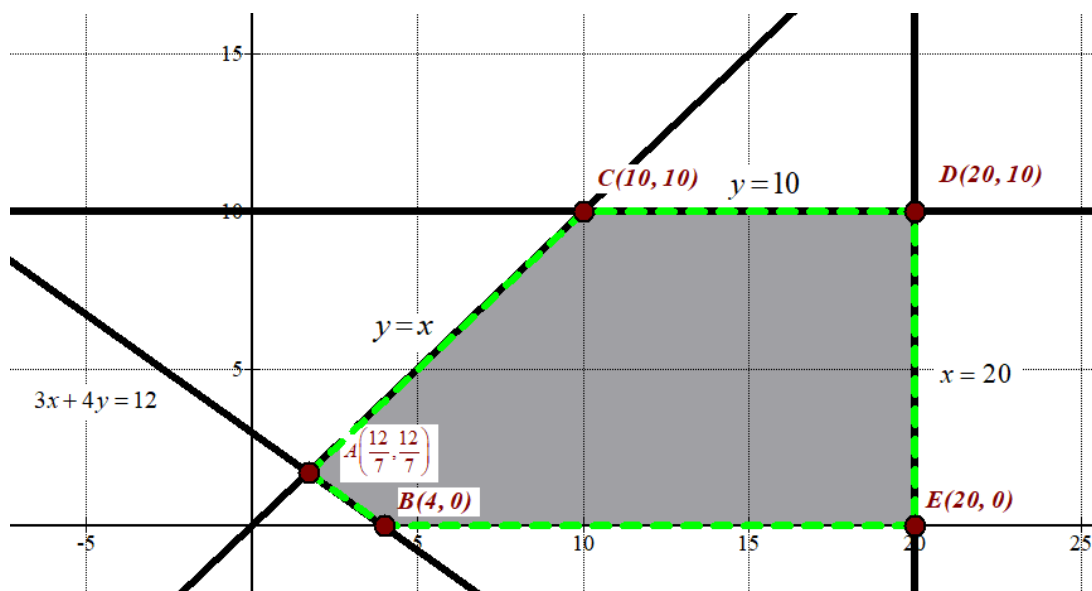
$$\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 3x + 4x = 12 \Rightarrow 7x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{7} \Rightarrow y = \frac{12}{7} \Rightarrow A\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases} \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow B(4, 0)$$

$$\begin{cases} y = 10 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = 10 \Rightarrow C(10, 10)$$

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow D(20, 10)$$

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E(20, 0)$$



Valoramos la función objetivo $z = f(x, y) = 3x + 2y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor mínimo.

$$A\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right) \rightarrow f\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right) = 3\frac{12}{7} + 2\frac{12}{7} = \frac{60}{7} \approx 8.57 \text{ Mínimo}$$

$$B(4, 0) \rightarrow f(4, 0) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 12$$

$$C(10, 10) \rightarrow f(10, 10) = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 50$$

$$D(20, 10) \rightarrow f(20, 10) = 3 \cdot 20 + 2 \cdot 10 = 80$$

$$E(20, 0) \rightarrow f(20, 0) = 3 \cdot 20 + 2 \cdot 0 = 60$$

El valor mínimo de la función objetivo es $\frac{60}{7}$ y se obtiene en $A\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right)$.

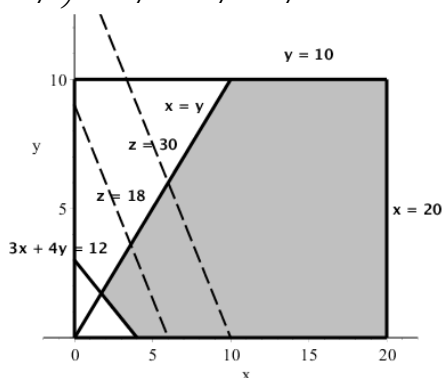
OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Observamos que disminuyendo el valor de z nos acercamos al vértice donde se cortan las rectas $y = x$ e $3x + 4y = 12$ que será el punto donde la función alcanza su mínimo. Hallamos las coordenadas de este vértice.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 3x + 4x = 12 \Rightarrow 7x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{7} \Rightarrow y = \frac{12}{7} \Rightarrow A\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right)$$

Sustituimos en la función las coordenadas de este vértice para obtener su valor mínimo.

$$f\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right) = 3\frac{12}{7} + 2\frac{12}{7} = \frac{60}{7} \approx 8.57 \text{ Mínimo}$$



Q2.- (5 puntos) Calcule $\int_6^{16} \left(\frac{1}{\sqrt{2x+4}} + \frac{1}{x} \right) dx$.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{\sqrt{2x+4}} + \frac{1}{x} \right) dx &= \int \frac{1}{\sqrt{2x+4}} dx + \int \frac{1}{x} dx = \int (2x+4)^{-1/2} dx + \int \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{(2x+4)^{-1/2+1}}{-1/2+1} \cdot \frac{1}{2} + \ln x = \frac{(2x+4)^{1/2}}{1/2} \cdot \frac{1}{2} + \ln x = \boxed{\sqrt{2x+4} + \ln x + C} \end{aligned}$$

Usamos el resultado obtenido para hallar el valor de la integral definida $\int_6^{16} \left(\frac{1}{\sqrt{2x+4}} + \frac{1}{x} \right) dx$.

$$\begin{aligned} \int_6^{16} \left(\frac{1}{\sqrt{2x+4}} + \frac{1}{x} \right) dx &= \left[\sqrt{2x+4} + \ln x \right]_6^{16} = \left[\sqrt{2 \cdot 16 + 4} + \ln 16 \right] - \left[\sqrt{2 \cdot 6 + 4} + \ln 6 \right] = \\ &= \sqrt{36} + \ln 16 - \sqrt{16} - \ln 6 = 6 - 4 + \ln \frac{16}{6} = \boxed{2 + \ln \frac{8}{3}} \end{aligned}$$

Q3.- (5 puntos) De los sucesos A y B, se sabe que: $P(A) = 1/2$, $P(B) = 2/3$ y $P(A \cup B) = 5/6$. Calcule $P(A \cap B)$ y $P(\bar{A} \cap B)$ siendo $\bar{A}$ el suceso contrario de A. ¿Son A y B dos sucesos independientes? Justifique la respuesta.

Calculamos la probabilidad de la intersección de los dos sucesos A y B utilizando la fórmula de la probabilidad de la unión de estos dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cup B) = 5/6 \\ P(A) = 1/2 \\ P(B) = 2/3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6} = \frac{3+4-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$$

Hemos obtenido que $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$.

Para hallar $P(\bar{A} \cap B)$ utilizamos que $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ P(B) = \frac{2}{3} \\ P(A \cap B) = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + P(\bar{A} \cap B) \Rightarrow \boxed{P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{3}}$$

Hemos obtenido que $P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{3}$.