



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA
DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos
 - b) Debe resolver 4 ejercicios, uno de cada bloque. Elija solo un ejercicio en los tres bloques donde tiene posibilidad de elección. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
 - c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
 - d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

a) **(1.5 puntos)** La suma de tres números naturales es 113; al dividir el mayor entre el menor se obtiene de cociente 6 y resto 4 y al dividir el mayor entre el intermedio se obtiene de cociente 2 y resto 6. Halle dichos números.

b) **(1 punto)** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, compruebe si la inversa de la suma de dichas matrices coincide con la suma de las inversas de cada una.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un fabricante produce mensualmente dos tipos de abonos ecológicos, A y B, que vende en su totalidad, obteniendo unos beneficios de 15 y 10 euros por kilogramo (kg), respectivamente. La producción de abono del tipo A no puede superar los 200 kg; el doble de la producción de B menos el triple de la producción de A es a lo sumo 100 kg. Además, la producción de A más el doble de la producción de B es como mucho de 500 kg. Obtenga las cantidades que este fabricante debe producir de sendos abonos para obtener el máximo beneficio e indique el valor de este beneficio.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

El Cesio 137 es un elemento radioactivo que se usa, entre otros, para tratamientos de radioterapia. La cantidad (en mg) de Cesio 137 que queda en el lugar de almacenamiento, transcurrido un número de años t , viene dada por la función:

$$f(t) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}; \quad t \geq 0$$

- a) **(0.5 puntos)** Calcule los años que deben pasar para que la cantidad de Cesio 137 que quede en el almacén sea la mitad de la que había al inicio.
- b) **(1.25 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f , en el punto de abscisa $t = 10$.
- c) **(0.75 puntos)** Indique si la función tiene asíntotas horizontales y verticales. En caso afirmativo, calcúlelas.

BLOQUE C**EJERCICIO 4**

Una empresa de tecnología fabrica tres modelos de teléfonos móviles: *Básico*, *Intermedio* y *Premium*. Cada modelo puede estar fabricado con uno de los siguientes tipos de pantalla: A o B. El 35% de los móviles fabricados por esta empresa son del modelo *Básico*, el 45% son del *Intermedio* y el resto son *Premium*. Se sabe que el 80% de los móviles fabricados del modelo *Básico* tienen una pantalla del tipo A, mientras que en el modelo *Premium* solo un 5% dispone de esta pantalla. Finalmente, el 53% de los teléfonos producidos tienen pantalla del tipo A. Se selecciona un teléfono al azar de la línea de producción. Determine la probabilidad de que:

- a) **(1.5 puntos)** Tenga una pantalla del tipo A sabiendo que es del modelo *Intermedio*.
- b) **(1 punto)** Sea del modelo *Intermedio* sabiendo que tiene pantalla del tipo A.

EJERCICIO 5

El 20% de los estudiantes de danza de una localidad andaluza están matriculados en la escuela A y el resto en la B. En estas escuelas se practica danza clásica y moderna y cada estudiante solo se puede matricular en una de estas dos especialidades. De los matriculados en A, el 70% practica danza clásica y el resto danza moderna. Se sabe también que el 32% de los estudiantes de danza son de la escuela B y practican danza clásica. Elegido al azar un estudiante de danza de la localidad, calcule la probabilidad de que:

- a) **(1 punto)** Practique danza clásica.
- b) **(0.5 puntos)** Practique danza moderna si es de la escuela B.
- c) **(0.5 puntos)** Estudie en la escuela B si resulta ser un estudiante de danza moderna.
- d) **(0.5 puntos)** Sea de la escuela A, practique danza clásica y realice un Máster, sabiendo que el 80% de los estudiantes de danza clásica de la escuela A realiza un Máster.

BLOQUE D**EJERCICIO 6**

Se selecciona una muestra aleatoria de 600 familias a las que se les pregunta si tienen mascota, resultando que 240 de esas familias contestaron afirmativamente. Con un nivel de confianza del 95%,

- a) **(1.25 puntos)** Obtenga el correspondiente intervalo de confianza para estimar la proporción poblacional de familias que tienen mascota. ¿Puede suponerse que la mitad de las familias de esta población tiene mascota?
- b) **(0.75 puntos)** ¿Qué tamaño muestral mínimo se debe tomar para que el error máximo al estimar esta proporción sea 0.025?
- c) **(0.5 puntos)** Explique razonadamente el efecto que tendría sobre la amplitud del intervalo de confianza de la proporción poblacional el aumento del tamaño de la muestra elegida.

EJERCICIO 7

Se ha realizado un estudio para analizar el peso, en kilogramos, de las mochilas de los estudiantes de ESO de los institutos de una localidad. Para ello, se seleccionó una muestra aleatoria de 13 mochilas, obteniéndose los siguientes datos:

4.5, 5.3, 4.9, 5.2, 5.5, 5.5, 5.7, 4.8, 5.6, 4.7, 4.2, 5.8, 4.6

El peso de las mochilas se distribuye según una ley Normal de desviación típica 0.9 kg y media desconocida.

- a) **(1.25 puntos)** Halle un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 98.5%, para estimar el peso medio de las mochilas escolares.
- b) **(0.75 puntos)** Para el mismo nivel de confianza, ¿qué tamaño muestral mínimo se debería tomar para que el error cometido al estimar el peso medio de estas mochilas sea inferior al 10%?
- c) **(0.5 puntos)** El peso medio de las mochilas de los estudiantes de ESO de esa localidad es de 4.9 kg y tomando una muestra aleatoria de 36 mochilas, ¿qué distribución sigue la variable que

mide el peso medio de estas 36 mochilas? ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio no supere los 5.2 kg?

SOLUCIONES**EJERCICIO 1**

a) **(1.5 puntos)** La suma de tres números naturales es 113; al dividir el mayor entre el menor se obtiene de cociente 6 y resto 4 y al dividir el mayor entre el intermedio se obtiene de cociente 2 y resto 6. Halle dichos números.

b) **(1 punto)** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, compruebe si la inversa de la suma de dichas matrices coincide con la suma de las inversas de cada una.

a) Llamamos “x”, “y”, “z” a los tres números naturales ordenados de menor a mayor.

La suma de tres números naturales es 113 $\rightarrow x + y + z = 113$.

Al dividir el mayor entre el menor se obtiene de cociente 6 y resto 4 $\rightarrow \frac{z}{x} = 6 + \frac{4}{x}$.

Al dividir el mayor entre el intermedio se obtiene de cociente 2 y resto 6 $\rightarrow \frac{z}{y} = 2 + \frac{6}{y}$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 113 \\ \frac{z}{x} = 6 + \frac{4}{x} \\ \frac{z}{y} = 2 + \frac{6}{y} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 113 \\ z = 6x + 4 \\ z = 2y + 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 2y + 6 = 113 \\ 2y + 6 = 6x + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y = 107 \\ 2y - 6x = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 107 - 3y \\ y - 3x = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 3(107 - 3y) = -1 \Rightarrow y - 321 + 9y = -1 \Rightarrow 10y = 320 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{320}{10} = 32} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 107 - 3 \cdot 32 = 11} \\ \boxed{z = 2 \cdot 32 + 6 = 70} \end{array} \right.$$

Los números naturales que cumplen lo pedido son 11, 32 y 70.

b) Hallamos las inversas de las dos matrices.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}{5} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos también la inversa de la matriz $A + B$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A + B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4 \neq 0$$

$$(A + B)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A + B)^T)}{|A + B|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si se cumple que $A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1}$.

$$\left. \begin{aligned} A^{-1} + B^{-1} &= \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 & 7/10 \\ 3/5 & 1/5 \end{pmatrix} \\ (A + B)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1/4 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A^{-1} + B^{-1} \neq (A + B)^{-1}$$

No se cumple que la inversa de la suma de dichas matrices coincida con la suma de las inversas de cada una.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un fabricante produce mensualmente dos tipos de abonos ecológicos, A y B, que vende en su totalidad, obteniendo unos beneficios de 15 y 10 euros por kilogramo (kg), respectivamente. La producción de abono del tipo A no puede superar los 200 kg; el doble de la producción de B menos el triple de la producción de A es a lo sumo 100 kg. Además, la producción de A más el doble de la producción de B es como mucho de 500 kg. Obtenga las cantidades que este fabricante debe producir de sendos abonos para obtener el máximo beneficio e indique el valor de este beneficio.

Llamamos x = “Kilos de abono A que produce mensualmente un fabricante” e y = “Kilos de abono B que produce mensualmente un fabricante”.

La producción de abono del tipo A no puede superar los 200 kg $\rightarrow x \leq 200$.

El doble de la producción de B menos el triple de la producción de A es a lo sumo 100 kg $\rightarrow 2y - 3x \leq 100$.

La producción de A más el doble de la producción de B es como mucho de 500 kg $\rightarrow x + 2y \leq 500$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Las restricciones del problema son:

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 200 \\ 2y - 3x \leq 100 \\ x + 2y \leq 500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Vende en su totalidad el abono producido, obteniendo unos beneficios de 15 y 10 euros por kilogramo de abono A y B, respectivamente. Los beneficios vienen expresados por la función $B(x, y) = 15x + 10y$. Deseamos maximizar los beneficios.

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$$x = 200$$

$$2y - 3x = 100$$

$$x + 2y = 500$$

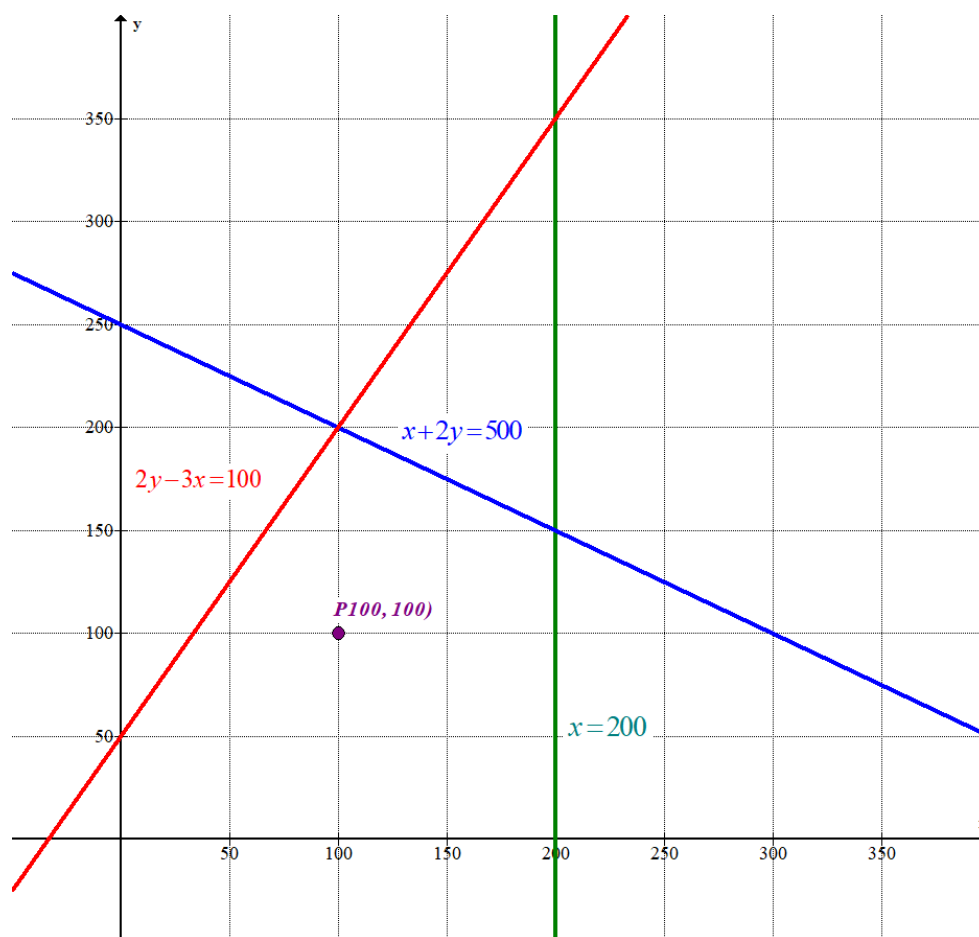
$$x \geq 0; y \geq 0$$

$x = 200$	y
200	150
200	350

x	$y = \frac{100 + 3x}{2}$
0	50
100	200
200	350

x	$y = \frac{500 - x}{2}$
0	250
100	200
200	150
500	0

Primer
cuadrante



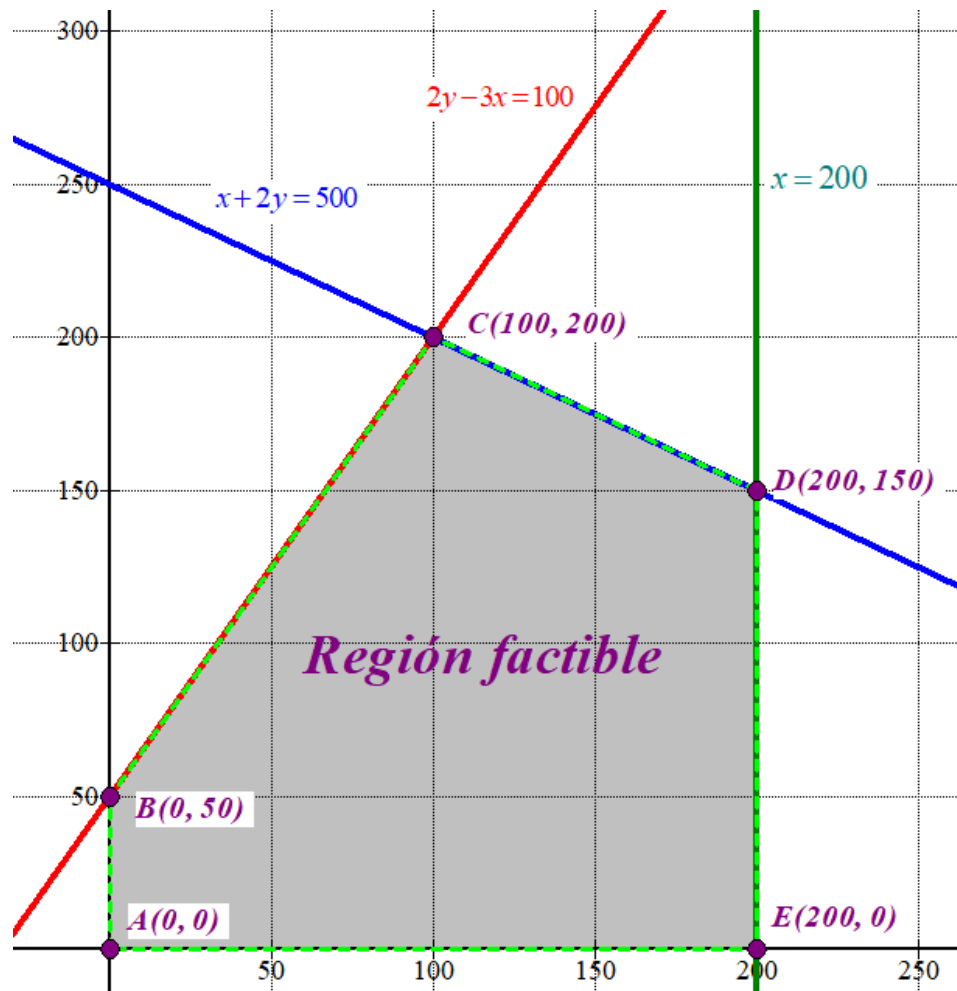
Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 200 \\ 2y - 3x \leq 100 \\ x + 2y \leq 500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la zona del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las rectas azul y roja, y a la izquierda de la recta vertical verde. Lo comprobamos viendo si el punto $P(100, 100)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 100 \leq 200 \\ 200 - 300 \leq 100 \\ 100 + 200 \leq 500 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos los beneficios $B(x, y) = 15x + 10y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 50) \rightarrow B(0, 50) = 15 \cdot 0 + 10 \cdot 50 = 500$$

$$C(100, 200) \rightarrow B(100, 200) = 15 \cdot 100 + 10 \cdot 200 = 3500$$

$$D(200, 150) \rightarrow B(200, 150) = 15 \cdot 200 + 10 \cdot 150 = 4500 \text{ Máximo}$$

$$E(200, 0) \rightarrow B(200, 0) = 15 \cdot 200 + 10 \cdot 0 = 3000$$

El beneficio máximo tiene un valor de 4500 € y se consiguen en el vértice $D(200, 150)$.

El beneficio máximo de 4500 € se consigue con la preparación mensual de 200 kg de abono A y 150 kg de abono B.

EJERCICIO 3

El Cesio 137 es un elemento radioactivo que se usa, entre otros, para tratamientos de radioterapia. La cantidad (en mg) de Cesio 137 que queda en el lugar de almacenamiento, transcurrido un número de años t , viene dada por la función:

$$f(t) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}; \quad t \geq 0$$

- a) **(0.5 puntos)** Calcule los años que deben pasar para que la cantidad de Cesio 137 que quede en el almacén sea la mitad de la que había al inicio.
 b) **(1.25 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f , en el punto de abscisa $t = 10$.
 c) **(0.75 puntos)** Indique si la función tiene asíntotas horizontales y verticales. En caso afirmativo, calcúlelas.

a) Calculamos la cantidad inicial de Cesio 137: $f(0) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{0}{30}} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 10$.

Debemos buscar el valor de t para el que $f(t) = 5$.

$$f(t) = 5 \Rightarrow 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}} = 5 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \Rightarrow \frac{t}{30} = 1 \Rightarrow \boxed{t = 30}$$

Deben pasar 30 años para que la cantidad de Cesio 137 que quede en el almacén sea la mitad de la que había al inicio.

b) La recta tangente a la gráfica de la función f , en el punto de abscisa $t = 10$ tiene ecuación $y - f(10) = f'(10)(t - 10)$.

$$f(t) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}} \Rightarrow f'(t) = 10 \cdot \frac{1}{30} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln(2^{-1})}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}} = \frac{-\ln 2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$$

$$\left. \begin{aligned} f(10) &= 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{30}} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{10}{\sqrt[3]{2}} \\ f'(10) &= \frac{-\ln 2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{30}} = \frac{-\ln 2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-\ln 2}{3\sqrt[3]{2}} \\ y - f(10) &= f'(10)(t - 10) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{10}{\sqrt[3]{2}} = \frac{-\ln 2}{3\sqrt[3]{2}}(t - 10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-\ln 2}{3\sqrt[3]{2}}t + \frac{10 \cdot \ln 2}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{10}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-\ln 2}{3\sqrt[3]{2}}t + \frac{10 \cdot \ln 2 + 30}{3\sqrt[3]{2}}}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f , en el punto de abscisa $t = 10$

es $y = \frac{-\ln 2}{3\sqrt[3]{2}}t + \frac{10 \cdot \ln 2 + 30}{3\sqrt[3]{2}}$.

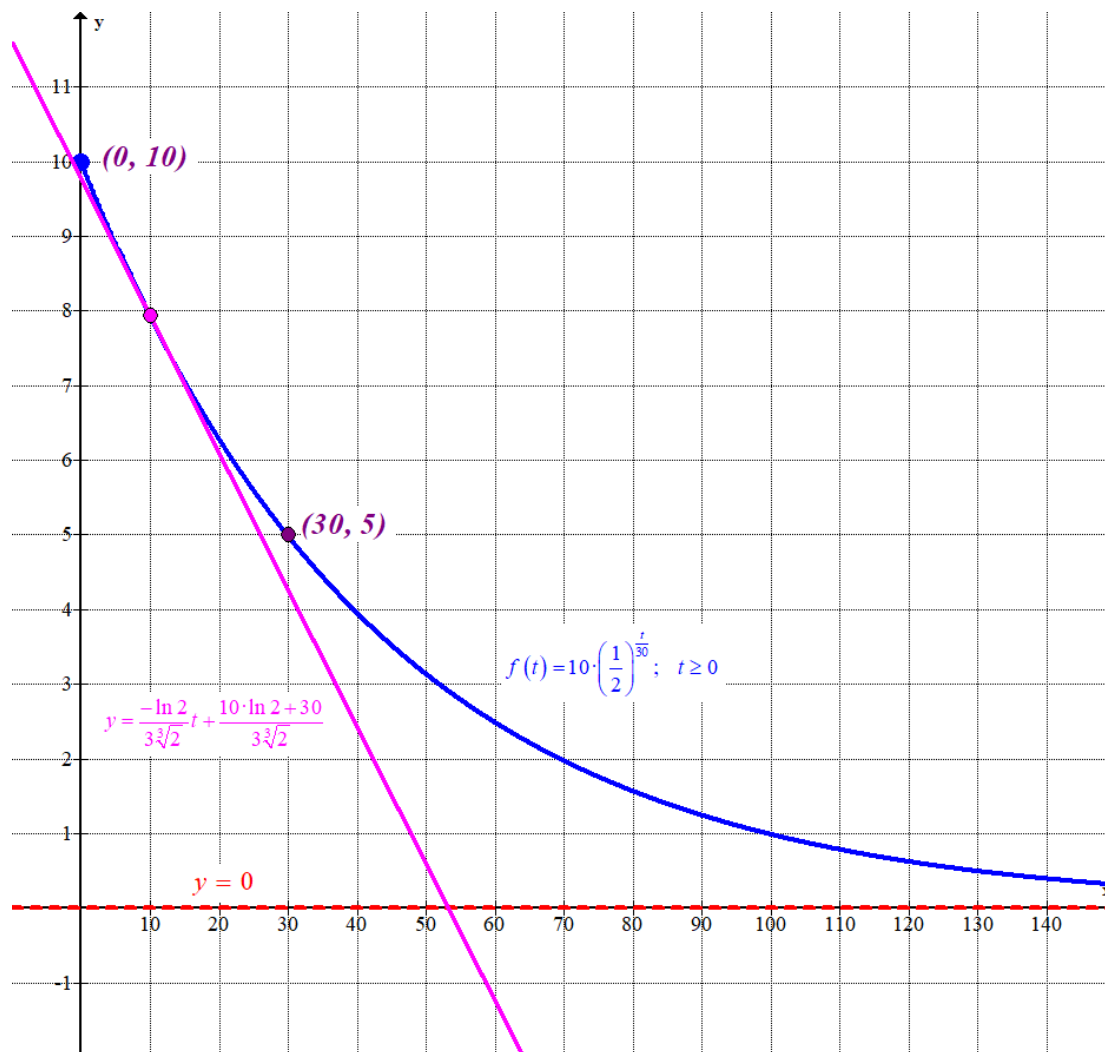
c) **Asíntota vertical.** $x = a$

El dominio de la función $f(t) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$ son todos los números reales. La función no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 10 \cdot 0 = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.



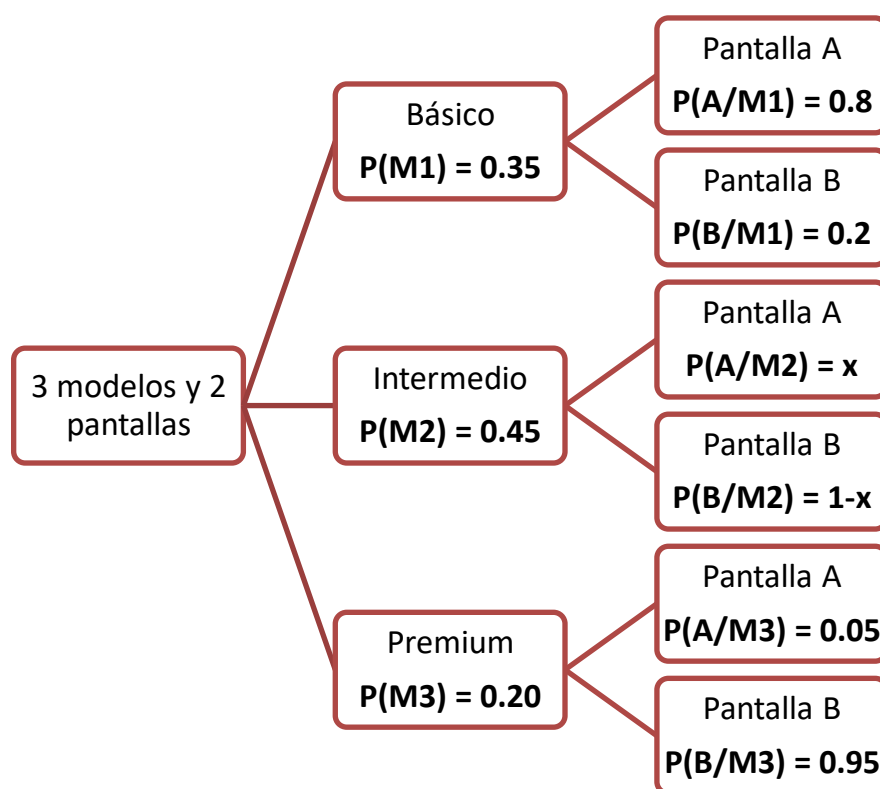
EJERCICIO 4

Una empresa de tecnología fabrica tres modelos de teléfonos móviles: *Básico*, *Intermedio* y *Premium*. Cada modelo puede estar fabricado con uno de los siguientes tipos de pantalla: A o B. El 35% de los móviles fabricados por esta empresa son del modelo *Básico*, el 45% son del *Intermedio* y el resto son *Premium*. Se sabe que el 80% de los móviles fabricados del modelo *Básico* tienen una pantalla del tipo A, mientras que en el modelo *Premium* solo un 5% dispone de esta pantalla. Finalmente, el 53% de los teléfonos producidos tienen pantalla del tipo A. Se selecciona un teléfono al azar de la línea de producción. Determine la probabilidad de que:

a) **(1.5 puntos)** Tenga una pantalla del tipo A sabiendo que es del modelo *Intermedio*.

b) **(1 punto)** Sea del modelo *Intermedio* sabiendo que tiene pantalla del tipo A.

Si el 35% de los móviles fabricados por esta empresa son del modelo *Básico*, el 45% son del *Intermedio* y el resto son *Premium* tenemos que $100 - 45 - 35 = 20\%$ son *Premium*. Colocamos toda la información proporcionada en el ejercicio en un diagrama de árbol.



a) Debemos calcular $P(A/M2)$. Nos dicen que el 53% de los teléfonos producidos tienen pantalla del tipo A, es decir, $P(A) = 0.53$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total para determinar el valor de $P(A/M2)$.

$$P(A) = P(M1)P(A/M1) + P(M2)P(A/M2) + P(M3)P(A/M3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.53 = 0.35 \cdot 0.8 + 0.45x + 0.2 \cdot 0.05 \Rightarrow 0.45x = 0.53 - 0.35 \cdot 0.8 - 0.2 \cdot 0.05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.45x = 0.24 \Rightarrow x = \frac{0.24}{0.45} = \frac{8}{15} \approx 0.5333$$

Hemos visto que $P(A/M2) = \frac{8}{15}$.

b) Nos piden calcular $P(M2/A)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M2/A) = \frac{P(M2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(M2)P(A/M2)}{P(A)} = \frac{0.45 \cdot \frac{8}{15}}{0.53} = \boxed{\frac{24}{53} \approx 0.4528}$$

La probabilidad de que sea del modelo *Intermedio* sabiendo que tiene pantalla del tipo A vale $\frac{24}{53} \approx 0.4528$.

EJERCICIO 5

El 20% de los estudiantes de danza de una localidad andaluza están matriculados en la escuela A y el resto en la B. En estas escuelas se practica danza clásica y moderna y cada estudiante solo se puede matricular en una de estas dos especialidades. De los matriculados en A, el 70% practica danza clásica y el resto danza moderna. Se sabe también que el 32% de los estudiantes de danza son de la escuela B y practican danza clásica. Elegido al azar un estudiante de danza de la localidad, calcule la probabilidad de que:

- (1 punto)** Practique danza clásica.
- (0.5 puntos)** Practique danza moderna si es de la escuela B.
- (0.5 puntos)** Estudie en la escuela B si resulta ser un estudiante de danza moderna.
- (0.5 puntos)** Sea de la escuela A, practique danza clásica y realice un Máster, sabiendo que el 80% de los estudiantes de danza clásica de la escuela A realiza un Máster.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Danza clásica	Danza moderna	
Escuela A	$0.70 \cdot 20 = 14$		20
Escuela B	32		
			100

Completamos la tabla.

	Danza clásica	Danza moderna	
Escuela A	14	6	20
Escuela B	32	48	80
	46	54	100

- Un 46% de los alumnos practican danza clásica. La probabilidad de que el alumno elegido al azar practique danza clásica vale 0.46.
- Un 80% de los estudiantes son de la escuela B y un 48% son de la escuela B y practican danza moderna. La probabilidad de que un alumno elegido en la escuela B practique danza moderna vale $\frac{48}{80} = 0.6$.
- Un 54% de los alumnos practican danza moderna y un 48% del alumnado son de la escuela B y practican danza moderna.
La probabilidad de que al elegir un alumno que practica danza moderna este sea de la escuela B vale $\frac{48}{54} = \frac{8}{9} \approx 0.8889$.
- Un 14 % del alumnado es de la escuela A y practica danza clásica. Un 80 % de estos alumnos realiza un master, es decir, $0.80 \cdot 14 = 11.2\%$ del alumnado es de la escuela A, practica danza clásica y realiza un master. La probabilidad pedida es 0.112.

EJERCICIO 6

Se selecciona una muestra aleatoria de 600 familias a las que se les pregunta si tienen mascota, resultando que 240 de esas familias contestaron afirmativamente. Con un nivel de confianza del 95%,

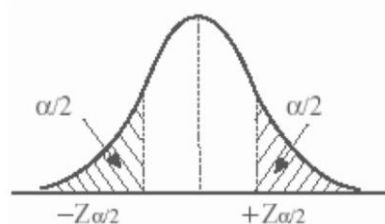
- a) **(1.25 puntos)** Obtenga el correspondiente intervalo de confianza para estimar la proporción poblacional de familias que tienen mascota. ¿Puede suponerse que la mitad de las familias de esta población tiene mascota?
- b) **(0.75 puntos)** ¿Qué tamaño muestral mínimo se debe tomar para que el error máximo al estimar esta proporción sea 0.025?
- c) **(0.5 puntos)** Explique razonadamente el efecto que tendría sobre la amplitud del intervalo de confianza de la proporción poblacional el aumento del tamaño de la muestra elegida.

- a) Tamaño de la muestra es $n = 600$ familias. La proporción muestral de familias que tienen mascota es $p = \frac{240}{600} = 0.4$.

Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750



Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{600}} = 0.0392$$

El intervalo de confianza para la proporción de familias que tienen mascota es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.4 - 0.0392, 0.4 + 0.0392) = (0.3608, 0.4392)$$

La proporción 0.5 no pertenece al intervalo de confianza obtenido. Con un nivel de confianza del 95% no puede suponerse que la mitad de las familias tienen mascota.

- b) Utilizamos la fórmula del error.

$$\begin{aligned}
 \text{Error} < 0.025 &\Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} < 0.025 \Rightarrow 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{n}} < 0.025 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{n}} < \frac{0.025}{1.96} \Rightarrow \frac{0.24}{n} < \left(\frac{0.025}{1.96} \right)^2 \Rightarrow \frac{0.24}{\left(\frac{0.025}{1.96} \right)^2} < n \Rightarrow \boxed{n > 1475.17}
 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 1476 familias.

- c) La amplitud del intervalo de confianza de la proporción poblacional nos lo da el error. El error máximo viene dado por la fórmula $\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$. Si mantenemos el nivel de confianza no cambia el valor de $z_{\alpha/2}$ y si aumentamos el valor de n = número de familias seleccionadas disminuirá el error y por tanto, la amplitud del intervalo de confianza será menor.

EJERCICIO 7

Se ha realizado un estudio para analizar el peso, en kilogramos, de las mochilas de los estudiantes de ESO de los institutos de una localidad. Para ello, se seleccionó una muestra aleatoria de 13 mochilas, obteniéndose los siguientes datos:

4.5, 5.3, 4.9, 5.2, 5.5, 5.5, 5.7, 4.8, 5.6, 4.7, 4.2, 5.8, 4.6

El peso de las mochilas se distribuye según una ley Normal de desviación típica 0.9 kg y media desconocida.

- a) **(1.25 puntos)** Halle un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 98.5%, para estimar el peso medio de las mochilas escolares.
- b) **(0.75 puntos)** Para el mismo nivel de confianza, ¿qué tamaño muestral mínimo se debería tomar para que el error cometido al estimar el peso medio de estas mochilas sea inferior al 10%?
- c) **(0.5 puntos)** El peso medio de las mochilas de los estudiantes de ESO de esa localidad es de 4.9 kg y tomando una muestra aleatoria de 36 mochilas, ¿qué distribución sigue la variable que mide el peso medio de estas 36 mochilas? ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio no supere los 5.2 kg?

- a) X = El peso, en kilogramos, de las mochilas de los estudiantes de ESO de los institutos de una localidad. $X = N(\mu, 0.9)$.

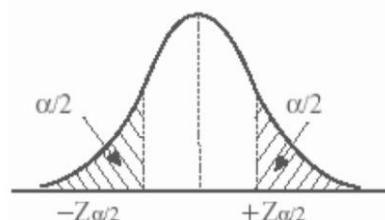
Calculamos la media muestral.

$$\bar{x} = \frac{4.5 + 5.3 + 4.9 + 5.2 + 5.5 + 5.5 + 5.7 + 4.8 + 5.6 + 4.7 + 4.2 + 5.8 + 4.6}{13} = 5.1 \text{ kg}$$

Con un nivel de confianza del 98.5 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,985 \rightarrow \alpha = 0,015 \rightarrow \alpha/2 = 0,0075 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,9925 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,43$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901
2.4	0.9916	0.9918	0.9920	0.9925



Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.43 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{13}} \approx 0.6066 \text{ kg}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (5.1 - 0.6066, 5.1 + 0.6066) = (4.4934, 5.7066)$$

b) El 10% de la media muestral es $0.10 \cdot 5.1 = 0.51$

Utilizamos la fórmula del error para 0.51 y despejamos n .

$$\text{Error} < 0.51 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0.51 \Rightarrow 2.43 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{n}} < 0.51 \Rightarrow 2.43 \cdot 0.9 < 0.51 \sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} > \frac{2.43 \cdot 0.9}{0.51} \Rightarrow n > \left(\frac{2.43 \cdot 0.9}{0.51} \right)^2 \approx 18.38$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 19 familias.

c) X = El peso, en kilogramos, de las mochilas de los estudiantes de ESO de los institutos de una localidad. $X = N(4.9, 0.9)$.

La distribución de las medias muestrales de tamaño 36 sigue una ley normal con la misma media (4.9 kg) y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.9}{\sqrt{36}} = 0.15$. $\overline{X}_{36} = N(4.9, 0.15)$.

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{36} \leq 5.2)$.

$$P(\overline{X}_{36} \leq 5.2) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{5.2 - 4.9}{0.15}\right) =$$

$$= P(Z \leq 2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9772}$$

z	0.00
0.0	0.0000
0.1	0.3980
0.2	0.7930
0.3	0.1790
0.4	0.5540
0.5	0.9150
0.6	0.2570
0.7	0.5800
0.8	0.8810
0.9	0.1590
1.0	0.4413
1.1	0.6443
1.2	0.8449
1.3	0.9032
1.4	0.9192
1.5	0.9332
1.6	0.9452
1.7	0.9554
1.8	0.9641
1.9	0.9713
2.0	0.9772