



**PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA
DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos
 - b) Debe resolver 4 ejercicios, uno de cada bloque. Elija solo un ejercicio en los tres bloques donde tiene posibilidad de elección. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
 - c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
 - d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

En una empresa de diseño gráfico, tres personas empleadas, Ana, Bruno y Carla, trabajan en un proyecto conjunto.

- a) **(1.75 puntos)** Se sabe que Ana ha dedicado un tercio del total de horas que ha necesitado el proyecto. Además, la suma de las horas trabajadas por Ana y Bruno excede en 6 horas a las que ha dedicado Carla, quien a su vez ha trabajado 4 horas más que Bruno. ¿Cuántas horas ha trabajado cada persona involucrada en el proyecto?
- b) **(0.75 puntos)** Si la empresa paga 25 € por cada hora de trabajo en el proyecto y de seguros sociales el 23.60% del salario, ¿cuánto tiene que abonar la empresa para pagar los costes de este proyecto?

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una agricultora vende en su tienda online frutas y hortalizas envasándolas en cajas de dos tipos diferentes. La caja "El regalo de la tierra" la vende a 19.75 € y contiene 3 kg de frutas y 3.5 kg de hortalizas. La caja "El tesoro de la huerta" contiene 2 kg de frutas y 4 kg de hortalizas y la vende a 18.50 €. La agricultora dispone semanalmente de 210 kg de hortalizas y 150 kg de frutas. Debe vender al menos 12 cajas de "El regalo de la tierra" y no menos de 15 cajas de "El tesoro de la huerta". ¿Cuántas cajas de cada tipo debe vender a la semana para que el ingreso por la venta sea máximo? ¿A cuánto asciende este ingreso?

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Un grupo de emprendedores valora crear una empresa y, para ello, ha encargado un estudio de mercado en el que se estima que los beneficios para los próximos 10 años, en millones de euros, vendrán dados por la función:

$$B(t) = \frac{3t}{t+2} - 1, \quad 0 \leq t \leq 10$$

donde t representa los años transcurridos desde la apertura de la empresa.

- a) **(0.5 puntos)** ¿En qué intervalo de tiempo la empresa no tendrá beneficios?
- b) **(0.75 puntos)** ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio y a cuánto asciende su valor?
- c) **(0.75 puntos)** ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que la empresa obtenga un beneficio de 800 000 €?
- d) **(0.5 puntos)** Si la función de beneficios se mantuviera y transcurrieran los años de manera indefinida, ¿A que valor tendería el beneficio de la empresa?

EJERCICIO 4

Las ventas de un producto (en miles de euros), en los 6 primeros años desde que se lanzó una campaña de publicidad, evolucionan de acuerdo con la siguiente función:

$$V(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 100; \quad 0 \leq t \leq 6$$

Siendo t el tiempo transcurrido en años.

- (1.25 puntos)** Estudie el crecimiento y decrecimiento de las ventas a lo largo de los 6 años. Calcule los extremos.
- (0.5 puntos)** Represente gráficamente la función V .
- (0.75 puntos)** Calcule el área de la región limitada por la gráfica de V , la recta $t = 6$ y los ejes de coordenadas.

BLOQUE C**EJERCICIO 5**

En un estudio sobre la presencia de mujeres en las empresas tecnológicas se observa que el 20 % de los operarios, el 40 % de los ingenieros y el 30 % de los directivos son mujeres. Se sabe que en estas empresas el 20 % de las plantillas son directivos, el 35 % son ingenieros y el resto son operarios. Se elige un trabajador al azar de una de estas empresas.

- (1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que no sea un operario y sea mujer?
- (0.5 puntos)** Si el trabajador elegido no es un operario, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
- (1 punto)** Si el trabajador elegido es hombre, ¿a qué colectivo es más probable que pertenezca?

BLOQUE D**EJERCICIO 6**

Una industria conservera envasa latas de anchoas cuyo peso en gramos sigue una distribución Normal con media poblacional desconocida y desviación típica 1 g. Para estimar la media poblacional, se selecciona al azar una muestra de 30 latas que dan un peso total de 2404.5 g.

- (1 punto)** Determine un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99%, para estimar el peso medio de las latas envasadas por la conservera.
- (1 punto)** Calcule el tamaño mínimo de una nueva muestra para que, manteniendo el mismo nivel de confianza, el error máximo de estimación de la media poblacional sea menor que 0.3 g.
- (0.5 puntos)** Explique, razonadamente, el efecto que tendría sobre el error máximo de estimación un aumento del número de latas seleccionadas en la muestra, manteniendo el mismo nivel de confianza, y explique también qué ocurriría con dicho error si se aumentara el nivel de confianza manteniendo el mismo tamaño muestral.

EJERCICIO 7

- (1.25 puntos)** Dada la población $\{-4, -2, 1, 4, 6\}$, calcule la varianza de la distribución de las medias muestrales de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple.
- (1.25 puntos)** Una empresa multinacional con 10000 empleados desea realizar un estudio sobre la brecha salarial de género en su organización. La empresa está dividida en tres niveles jerárquicos, en los que se tiene 1000 empleados de nivel ejecutivo, siendo el 30% mujeres, 3000 empleados de nivel medio, de los cuales el 55% son hombres, y el resto empleados de nivel operativo, de los que el 55% son mujeres. Se quiere seleccionar una muestra estratificada de 2000 empleados, manteniendo la proporción de cada nivel jerárquico y la distribución de género dentro de cada nivel. ¿Cuántos empleados deben seleccionarse en cada nivel jerárquico? y dentro de cada uno, ¿cuántos hombres y cuántas mujeres deben seleccionarse?

SOLUCIONES**EJERCICIO 1**

En una empresa de diseño gráfico, tres personas empleadas, Ana, Bruno y Carla, trabajan en un proyecto conjunto.

a) **(1.75 puntos)** Se sabe que Ana ha dedicado un tercio del total de horas que ha necesitado el proyecto. Además, la suma de las horas trabajadas por Ana y Bruno excede en 6 horas a las que ha dedicado Carla, quien a su vez ha trabajado 4 horas más que Bruno. ¿Cuántas horas ha trabajado cada persona involucrada en el proyecto?

b) **(0.75 puntos)** Si la empresa paga 25 € por cada hora de trabajo en el proyecto y de seguros sociales el 23.60% del salario, ¿cuánto tiene que abonar la empresa para pagar los costes de este proyecto?

a) Llamamos “x”, “y”, “z” al número de horas que han dedicado el proyecto Ana, Bruno y Carla respectivamente.

Ana ha dedicado un tercio del total de horas que ha necesitado el proyecto $\rightarrow$

$$x = \frac{x + y + z}{3}.$$

La suma de las horas trabajadas por Ana y Bruno excede en 6 horas a las que ha dedicado Carla $\rightarrow x + y = z + 6$.

Carla ha trabajado 4 horas más que Bruno $\rightarrow z = y + 4$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{x + y + z}{3} \\ x + y = z + 6 \\ z = y + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x = x + y + z \\ x + y = z + 6 \\ z = y + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = y + z \\ x + y = z + 6 \\ z = y + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = y + y + 4 \\ x + y = y + 4 + 6 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 2y + 4 \\ x = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 20 = 2y + 4 \Rightarrow 2y = 16 \Rightarrow \boxed{y = 8} \Rightarrow \boxed{z = 8 + 4 = 12}$$

Ana ha dedicado 10 horas al proyecto, Bruno ha dedicado 8 horas y Carla 12 horas.

b) Al proyecto se han dedicado $10 + 8 + 12 = 30$ horas. Si la empresa paga 25 € por cada hora de trabajo en el proyecto debe pagar $30 \cdot 25 = 750$ euros. Debemos añadirle el 23.6 % de los seguros sociales: $750 \cdot 0.236 = 177$ euros.

La empresa debe pagar por el proyecto un total de $750 + 177 = 927$ euros.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una agricultora vende en su tienda online frutas y hortalizas envasándolas en cajas de dos tipos diferentes. La caja "El regalo de la tierra" la vende a 19.75 € y contiene 3 kg de frutas y 3.5 kg de hortalizas. La caja "El tesoro de la huerta" contiene 2 kg de frutas y 4 kg de hortalizas y la vende a 18.50 €. La agricultora dispone semanalmente de 210 kg de hortalizas y 150 kg de frutas. Debe vender al menos 12 cajas de "El regalo de la tierra" y no menos de 15 cajas de "El tesoro de la huerta". ¿Cuántas cajas de cada tipo debe vender a la semana para que el ingreso por la venta sea máximo? ¿A cuánto asciende este ingreso?

Llamamos x = "número de cajas "El regalo de la tierra" que vende a la semana" e y = "número de cajas "El tesoro de la tierra" que vende".

La caja "El regalo de la tierra" contiene 3 kg de frutas y la caja "El tesoro de la huerta" contiene 2 kg de frutas. Dispone semanalmente de 150 kg de frutas. $\rightarrow 3x + 2y \leq 150$.

La caja "El regalo de la tierra" contiene 3.5 kg de hortalizas y la caja "El tesoro de la huerta" contiene 4 kg de hortalizas. Dispone semanalmente de 210 kg de hortalizas. $\rightarrow 3.5x + 4y \leq 210$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Las restricciones del problema son:

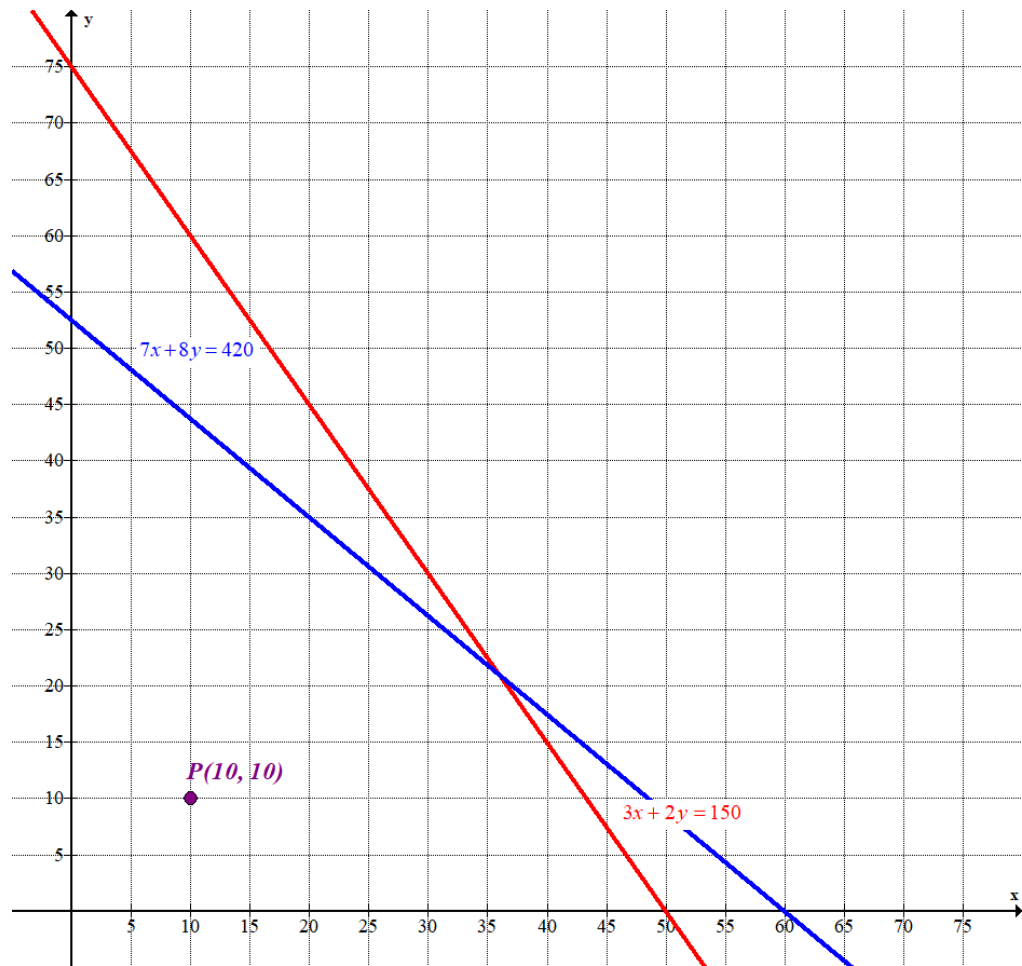
$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 150 \\ 3.5x + 4y \leq 210 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 150 \\ 7x + 8y \leq 420 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La caja "El regalo de la tierra" la vende a 19.75 € y la caja "El tesoro de la huerta" la vende a 18.50 €. Lo ingresos vienen expresados por la función $I(x, y) = 19.75x + 18.5y$. Deseamos maximizar los ingresos.

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$3x + 2y = 150$	$7x + 8y = 420$	$x \geq 0; y \geq 0$
$x \quad y = \frac{150 - 3x}{2}$	$x \quad y = \frac{420 - 7x}{8}$	
0	0	
20	20	
36	36	
50	60	
75	52.5	
45	35	
21	21	
0	0	

Primer cuadrante

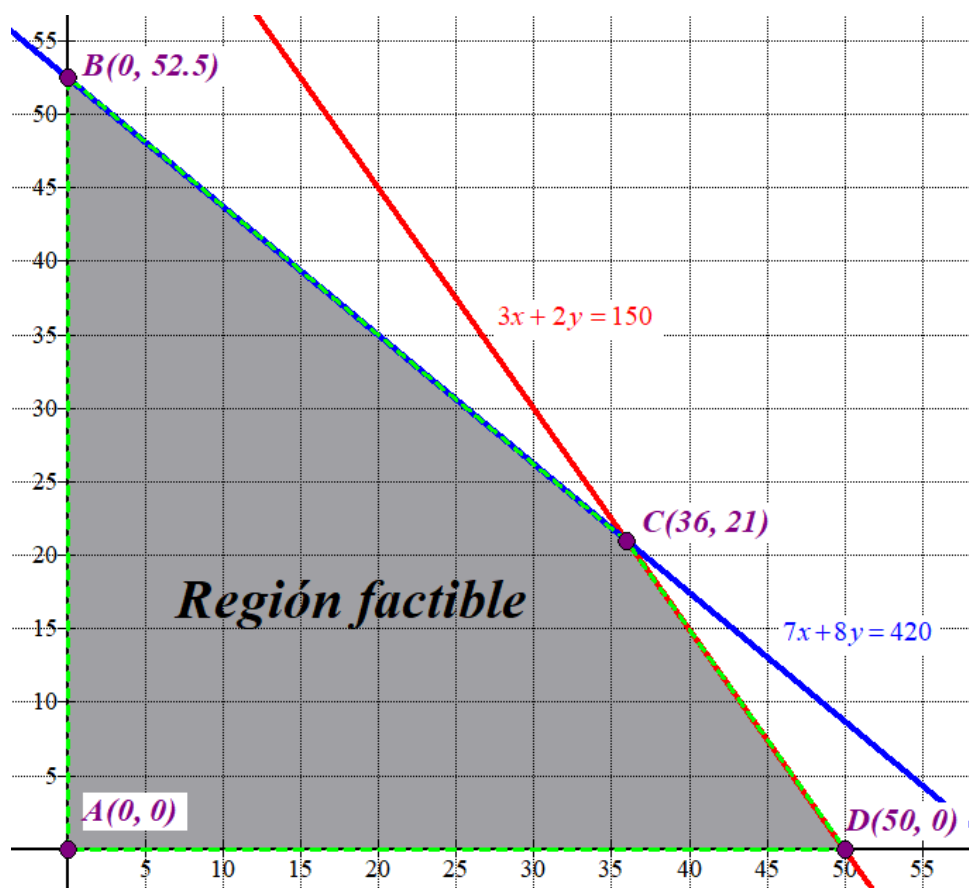


Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 150 \\ 7x + 8y \leq 420 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul y roja. Lo comprobamos viendo si el punto $P(10, 10)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 30 + 20 \leq 150 \\ 70 + 80 \leq 420 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Determinamos las coordenadas del vértice C.

$$C \rightarrow \begin{cases} 7x + 8y = 420 \\ 3x + 2y = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x + 8y = 420 \\ -12x - 8y = -600 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{-5x}{-5x} = \frac{-180}{-5} \Rightarrow x = \frac{180}{5} = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 36 + 2y = 150 \Rightarrow 2y = 42 \Rightarrow y = \frac{42}{2} = 21 \Rightarrow \boxed{C(36, 21)}$$

Valoramos los ingresos $I(x, y) = 19.75x + 18.5y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 52.5) \rightarrow I(0, 52.5) = 19.75 \cdot 0 + 18.5 \cdot 52.5 = 971.25$$

$$C(36, 21) \rightarrow I(36, 21) = 19.75 \cdot 36 + 18.5 \cdot 21 = 1099.5 \text{ Máximo}$$

$$D(50, 0) \rightarrow I(50, 0) = 19.75 \cdot 50 + 18.5 \cdot 0 = 987.5$$

Los ingresos máximos son de 1099.5 € y se consiguen en el vértice C(36, 21).

Los ingresos máximos de 1099.5 se consiguen con la preparación semanal de 36 cajas de "El regalo de la tierra" y 21 cajas de "El tesoro de la huerta".

EJERCICIO 3

Un grupo de emprendedores valora crear una empresa y, para ello, ha encargado un estudio de mercado en el que se estima que los beneficios para los próximos 10 años, en millones de euros, vendrán dados por la función:

$$B(t) = \frac{3t}{t+2} - 1, \quad 0 \leq t \leq 10$$

donde t representa los años transcurridos desde la apertura de la empresa.

- a) **(0.5 puntos)** ¿En qué intervalo de tiempo la empresa no tendrá beneficios?
 b) **(0.75 puntos)** ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio y a cuánto asciende su valor?
 c) **(0.75 puntos)** ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que la empresa obtenga un beneficio de 800 000 €?
 d) **(0.5 puntos)** Si la función de beneficios se mantuviera y transcurrieran los años de manera indefinida, ¿A qué valor tendería el beneficio de la empresa?

- a) Buscamos cuando $B(t) = 0$.

$$B(t) = 0 \Rightarrow \frac{3t}{t+2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{3t}{t+2} = 1 \Rightarrow 3t = t+2 \Rightarrow 2t = 2 \Rightarrow \boxed{t=1}$$

La función es continua pues el denominador se anula para $t = -2$ que no pertenece al intervalo de definición.

Como $B(0) = \frac{3 \cdot 0}{0+2} - 1 = -1 < 0$ podemos afirmar que la empresa empieza con pérdidas y no tiene beneficios hasta pasado el primer año. A partir de entonces si tiene beneficios.

- b) Calculamos la primera derivada.

$$B(t) = \frac{3t}{t+2} - 1 \Rightarrow B'(t) = \frac{3(t+2) - 1 \cdot 3t}{(t+2)^2} = \frac{3t+6-3t}{(t+2)^2} = \frac{6}{(t+2)^2}$$

Esta expresión de la derivada siempre es positiva, pues el numerador y el denominador siempre son positivos. La función crece en todo su dominio.

Al ser la función siempre creciente el máximo beneficio se alcanza en $t = 10$.

Como $B(10) = \frac{30}{10+2} - 1 = 1.5$ el beneficio máximo que se puede alcanzar en los 10 primeros años es de 1.5 millones de euros. Este beneficio máximo se consigue el décimo año.

- c) Buscamos cuando $B(t) = 0.8$.

$$B(t) = 0.8 \Rightarrow \frac{3t}{t+2} - 1 = 0.8 \Rightarrow \frac{3t}{t+2} = 1.8 \Rightarrow 3t = 1.8t + 3.6 \Rightarrow 1.2t = 3.6 \Rightarrow \boxed{t=3}$$

Al tercer año se consiguen unos beneficios de 800 000 €.

- d) Calculamos el límite de la función beneficios cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} B(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3t}{t+2} - 1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3t-t-2}{t+2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t-2}{t+2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t}{t} = \boxed{2}$$

Los beneficios de la empresa con el paso de los años tienden a ser de 2 millones de euros.

EJERCICIO 4

Las ventas de un producto (en miles de euros), en los 6 primeros años desde que se lanzó una campaña de publicidad, evolucionan de acuerdo con la siguiente función:

$$V(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 100; \quad 0 \leq t \leq 6$$

Siendo t el tiempo transcurrido en años.

- a) **(1.25 puntos)** Estudie el crecimiento y decrecimiento de las ventas a lo largo de los 6 años. Calcule los extremos.
- b) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente la función V .
- c) **(0.75 puntos)** Calcule el área de la región limitada por la gráfica de V , la recta $t = 6$ y los ejes de coordenadas.

a) Calculamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula (puntos críticos).

$$V(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 100 \Rightarrow V'(t) = 12t^2 - 48t + 36$$

$$V'(t) = 0 \Rightarrow 12t^2 - 48t + 36 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4-2}{2} = 1=t \\ \frac{4+2}{2} = 3=t \end{cases}$$

La función ventas presenta dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $[0,1)$ tomamos $t = 0.5$ y la derivada vale
 $V'(0.5) = 12 \cdot 0.5^2 - 48 \cdot 0.5 + 36 = 15 > 0$. La función crece en $[0,1)$.
- En el intervalo $(1,3)$ tomamos $t = 2$ y la derivada vale
 $V'(2) = 12 \cdot 2^2 - 48 \cdot 2 + 36 = -12 < 0$. La función decrece en $(1,3)$,
- En el intervalo $(3,6]$ tomamos $t = 4$ y la derivada vale
 $V'(4) = 12 \cdot 4^2 - 48 \cdot 4 + 36 = 36 > 0$. La función crece en $(3,6]$,

La función crece en $[0,1) \cup (3,6]$ y decrece en $(1,3)$.

Las ventas crecen hasta el primer año, decrecen entre el primer y tercer año y crecen a partir del tercer año.

Valoramos las ventas en los puntos críticos y en los extremos del intervalo de definición para averiguar en que momento se producen el máximo y mínimo absoluto de las ventas.

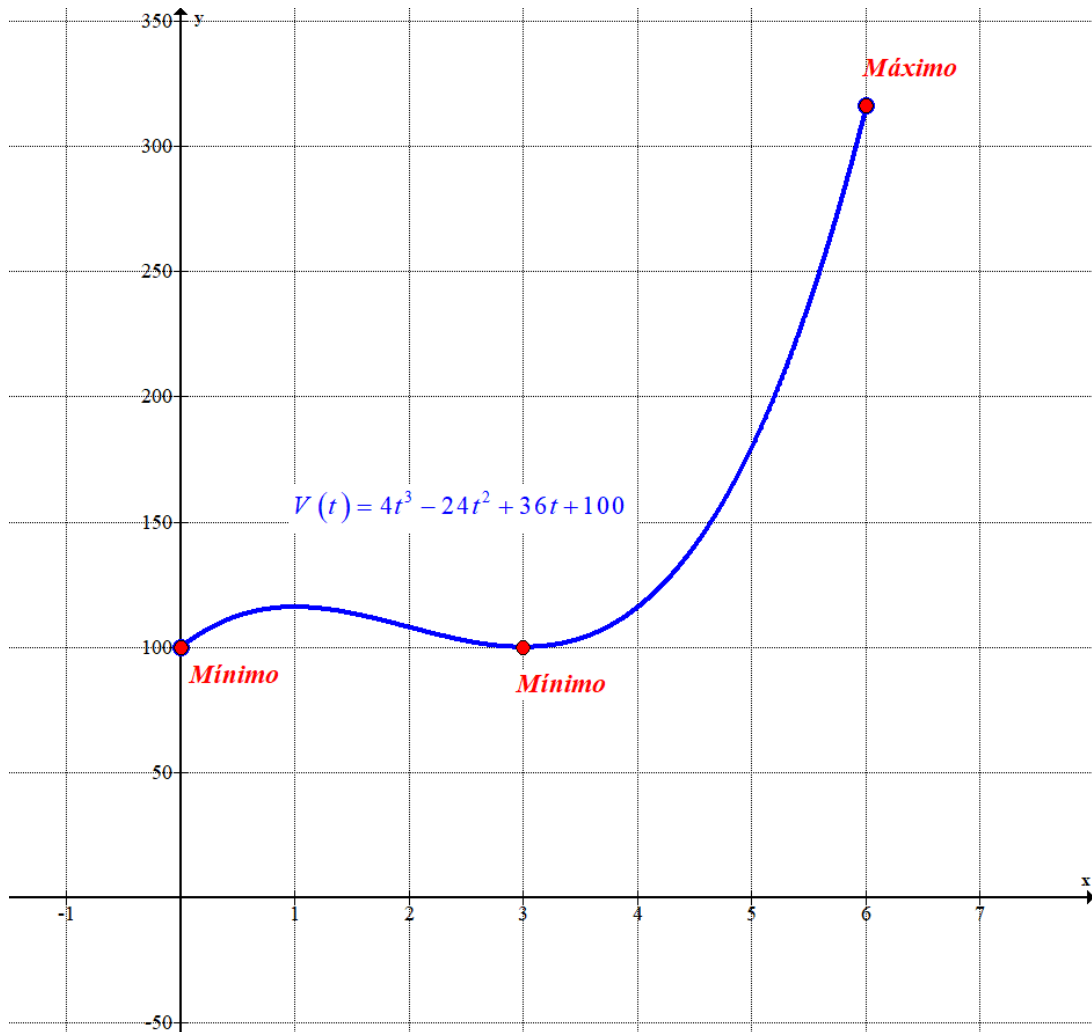
$$\left. \begin{aligned} V(0) &= 4 \cdot 0^3 - 24 \cdot 0^2 + 36 \cdot 0 + 100 = 100 \text{ Mínimo} \\ V(1) &= 4 \cdot 1^3 - 24 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 + 100 = 116 \\ V(3) &= 4 \cdot 3^3 - 24 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 + 100 = 100 \text{ Mínimo} \\ V(6) &= 4 \cdot 6^3 - 24 \cdot 6^2 + 36 \cdot 6 + 100 = 316 \text{ Máximo} \end{aligned} \right\}$$

Las máximas ventas se producen en el sexto año con un importe de 316 000 €.

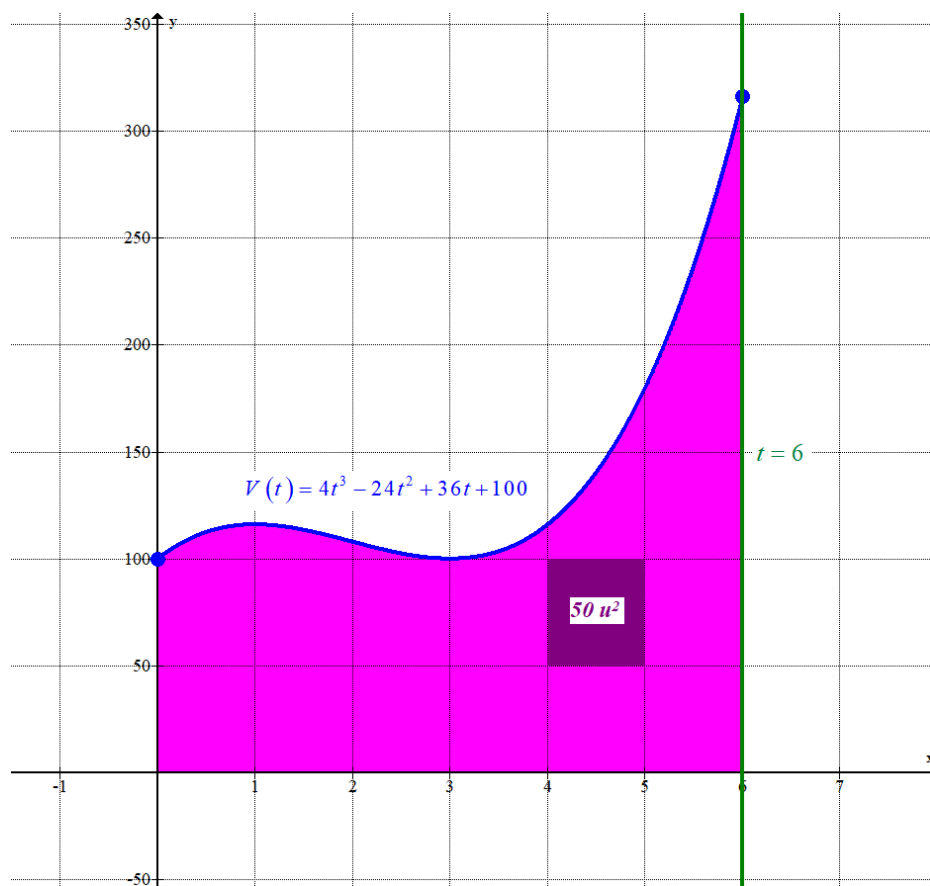
Las mínimas ventas se producen al comenzar y al tercer año con un importe de 100 000 €.

b) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función ventas.

t	$V(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 100$
0	100
1	116 Máximo relativo
3	100
6	316 Máximo absoluto



c) Nos piden calcular el área de la región del plano coloreada de rosa en el siguiente dibujo.



El área va a tener un valor muy grande. Hemos marcado el cuadrado que tiene 50 unidades cuadradas de área.

El área de la región indicada es el valor de la integral definida entre 0 y 6 de la función de ventas.

$$\begin{aligned}\int_0^6 V(t) dt &= \int_0^6 (4t^3 - 24t^2 + 36t + 100) dt = \left[t^4 - 8t^3 + 18t^2 + 100t \right]_0^6 = \\ &= \left[6^4 - 8 \cdot 6^3 + 18 \cdot 6^2 + 100 \cdot 6 \right] - \left[0^4 - 8 \cdot 0^3 + 18 \cdot 0^2 + 100 \cdot 0 \right] = \boxed{816}\end{aligned}$$

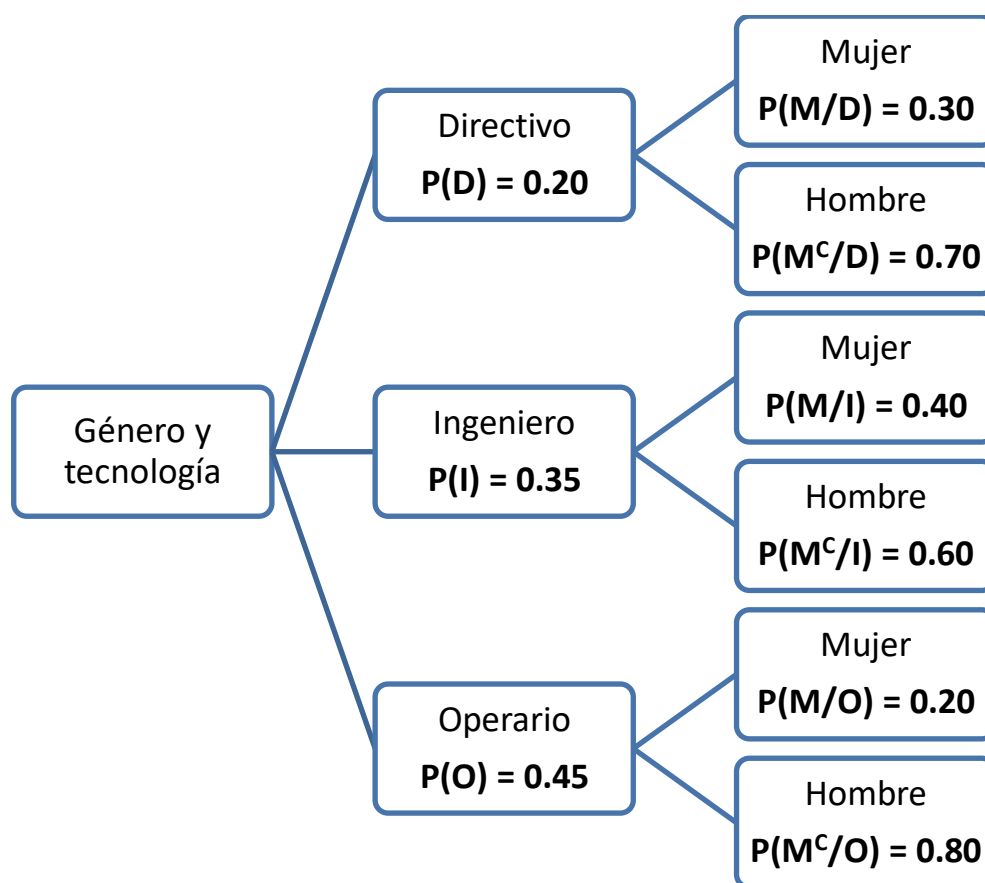
El área de la región limitada por la gráfica de V , la recta $t = 6$ y los ejes de coordenadas tiene un valor de 816 unidades cuadradas.

EJERCICIO 5

En un estudio sobre la presencia de mujeres en las empresas tecnológicas se observa que el 20 % de los operarios, el 40 % de los ingenieros y el 30 % de los directivos son mujeres. Se sabe que en estas empresas el 20 % de las plantillas son directivos, el 35 % son ingenieros y el resto son operarios. Se elige un trabajador al azar de una de estas empresas.

- a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que no sea un operario y sea mujer?
 b) **(0.5 puntos)** Si el trabajador elegido no es un operario, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
 c) **(1 punto)** Si el trabajador elegido es hombre, ¿a qué colectivo es más probable que pertenezca?

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(O^c \cap M)$.

$$\begin{aligned}
 P(O^c \cap M) &= P(I \cap M) + P(D \cap M) = P(I)P(M/I) + P(D)P(M/D) = \\
 &= 0.35 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.3 = \boxed{0.2}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que al elegir al azar un trabajador no sea un operario y sea mujer vale 0.2.

- b) Nos piden calcular $P(M/O^c)$.

$$P(M/O^c) = \frac{P(M \cap O^c)}{P(O^c)} = \frac{P(M \cap D) + P(M \cap I)}{1 - P(O)} =$$

$$= \frac{P(D)P(M/D) + P(I)P(M/I)}{1 - P(O)} = \frac{0.2 \cdot 0.3 + 0.35 \cdot 0.4}{1 - 0.45} = \boxed{\frac{4}{11} \approx 0.3636}$$

La probabilidad de que al elegir un trabajador que no es operario este sea mujer vale $\frac{4}{11} \approx 0.3636$.

c) Calculamos $P(D/M^c)$, $P(I/M^c)$ y $P(O/M^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(D/M^c) = \frac{P(D \cap M^c)}{P(M^c)} = \frac{P(D)P(M^c/D)}{P(D)P(M^c/D) + P(I)P(M^c/I) + P(O)P(M^c/O)} =$$

$$= \frac{0.2 \cdot 0.7}{0.2 \cdot 0.7 + 0.35 \cdot 0.6 + 0.45 \cdot 0.8} = \frac{0.14}{0.71} = \boxed{\frac{14}{71} \approx 0.1972}$$

$$P(I/M^c) = \frac{P(I \cap M^c)}{P(M^c)} = \frac{P(I)P(M^c/I)}{P(M^c)} = \frac{0.35 \cdot 0.6}{0.71} = \boxed{\frac{21}{71} \approx 0.2958}$$

$$P(O/M^c) = \frac{P(O \cap M^c)}{P(M^c)} = \frac{P(O)P(M^c/O)}{P(M^c)} = \frac{0.45 \cdot 0.8}{0.71} = \boxed{\frac{36}{71} \approx 0.507}$$

La probabilidad más alta es la del grupo de operarios. Es más probable que el hombre elegido pertenezca al grupo de operarios.

EJERCICIO 6

Una industria conservera envasa latas de anchoas cuyo peso en gramos sigue una distribución Normal con media poblacional desconocida y desviación típica 1 g. Para estimar la media poblacional, se selecciona al azar una muestra de 30 latas que dan un peso total de 2404.5 g.

- (1 punto)** Determine un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99%, para estimar el peso medio de las latas envasadas por la conservera.
- (1 punto)** Calcule el tamaño mínimo de una nueva muestra para que, manteniendo el mismo nivel de confianza, el error máximo de estimación de la media poblacional sea menor que 0.3 g.
- (0.5 puntos)** Explique, razonadamente, el efecto que tendría sobre el error máximo de estimación un aumento del número de latas seleccionadas en la muestra, manteniendo el mismo nivel de confianza, y explique también qué ocurriría con dicho error si se aumentara el nivel de confianza manteniendo el mismo tamaño muestral.

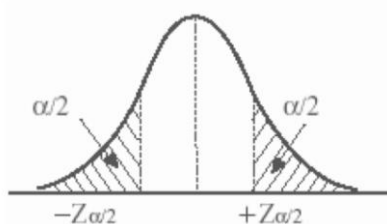
- a) Sea X = El peso en gramos de una lata de anchoas de una industria conservera.

$$X = N(\mu, 1)$$

Tamaño de la muestra es $n = 30$ latas. La media muestral es $\bar{x} = \frac{2404.5}{30} = 80.15$ g.

- a) Con un nivel de confianza del 99 % tenemos

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934
2.5	0.9939	0.9940	0.9941	0.9942	0.9943	0.9944	0.9945	0.9949	0.9951

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \approx 0.47$$

El intervalo de confianza para la media de peso de una lata es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (80.15 - 0.47, 80.15 + 0.47) = (79.68, 80.62)$$

b) Con un nivel de confianza del 99 % tenemos $z_{\alpha/2} = 2.575$.

Hallamos el tamaño de la muestra mínimo para que el error máximo sea 0.3.

$$Error < 0.03 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0.3 \Rightarrow 2.575 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} < 0.3 \Rightarrow 2.575 < 0.3\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2.575}{0.3} < \sqrt{n} \Rightarrow n > \left(\frac{2.575}{0.3} \right)^2 \approx 73.67$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 74 latas de anchoas.

c) El error máximo viene dado por la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si mantenemos el nivel de

confianza no cambia el valor de $z_{\alpha/2}$ y si aumentamos el valor de n = número de latas seleccionadas disminuirá el error.

Si mantenemos el valor de n = tamaño de la muestra y aumentamos el nivel de confianza entonces aumenta el valor de $z_{\alpha/2}$ y aumentará el error.

EJERCICIO 7

- a) **(1.25 puntos)** Dada la población $\{-4, -2, 1, 4, 6\}$, calcule la varianza de la distribución de las medias muestrales de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple.
- b) **(1.25 puntos)** Una empresa multinacional con 10000 empleados desea realizar un estudio sobre la brecha salarial de género en su organización. La empresa está dividida en tres niveles jerárquicos, en los que se tiene 1000 empleados de nivel ejecutivo, siendo el 30% mujeres, 3000 empleados de nivel medio, de los cuales el 55% son hombres, y el resto empleados de nivel operativo, de los que el 55% son mujeres. Se quiere seleccionar una muestra estratificada de 2000 empleados, manteniendo la proporción de cada nivel jerárquico y la distribución de género dentro de cada nivel. ¿Cuántos empleados deben seleccionarse en cada nivel jerárquico? y dentro de cada uno, ¿cuántos hombres y cuántas mujeres deben seleccionarse?

- a) La media de la distribución de las medias muestrales coincide con la media poblacional.

$$\bar{x} = \frac{-4 - 2 + 1 + 4 + 6}{5} = 1$$

Calculamos la varianza poblacional.

$$\text{Varianza}(X) = \frac{\sum (x_i)^2}{5} - (\bar{x})^2 = \frac{16 + 4 + 1 + 16 + 36}{5} - 1^2 = 13.6$$

La varianza de la distribución de las medias muestrales es la varianza poblacional dividida entre el tamaño de las muestras (2) $\rightarrow \frac{13.6}{2} = 6.8$.

- b) El tamaño total de la muestra es de 2000 empleados. Llamamos n_1 al tamaño de la muestra en el estrato de 1000 personas, n_2 al tamaño de la muestra en el estrato de 3000 personas y n_3 al tamaño de la muestra en el estrato de $10000 - 1000 - 3000 = 6000$ personas.

$$\frac{2000}{10000} = \frac{n_1}{1000} = \frac{n_2}{3000} = \frac{n_3}{6000}$$

De esta expresión vamos separando por parejas y determinando el tamaño correspondiente a cada estrato.

$$\frac{2000}{10000} = \frac{n_1}{1000} \Rightarrow n_1 = \frac{1000 \cdot 2000}{10000} = 200$$

$$\frac{2000}{10000} = \frac{n_2}{3000} \Rightarrow n_2 = \frac{3000 \cdot 2000}{10000} = 600$$

$$\frac{2000}{10000} = \frac{n_3}{6000} \Rightarrow n_3 = \frac{6000 \cdot 2000}{10000} = 1200$$

Del nivel ejecutivo se eligen 200, del nivel medio se eligen 600 y del nivel operativo se eligen 1200 empleados.

Para mantener la proporción de mujeres y hombres en la selección se debe elegir en el nivel ejecutivo el 30% de $200 = 0.3 \cdot 200 = 60$ mujeres y 140 hombres. En el nivel medio se deben elegir un 55% de hombres $= 600 \cdot 0.55 = 330$ hombres y 270 mujeres. En el nivel operativo se deben elegir el 55% de mujeres $= 1200 \cdot 0.55 = 660$ mujeres y 540 hombres.