



**Universidad
Zaragoza**

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2025

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Las tres primeras preguntas son obligatorias. En la cuarta pregunta, se deberá elegir entre OPCIÓN I y OPCIÓN II, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirán los apartados de la opción que aparezca respondida en primer lugar.

Cada ejercicio del examen se califica sobre 10 puntos y las cuatro preguntas tienen el mismo peso en la nota final (2,5 puntos). La nota final se obtendrá sumando las puntuaciones de los ejercicios y dividiendo el total entre 4.

Se valorará la capacidad de argumentar y verificar las soluciones propuestas, así como el uso adecuado del lenguaje matemático y de explicaciones fundamentadas en los resultados teóricos aprendidos durante el curso.

La tabla de la distribución normal está disponible al final del examen, aunque es posible que no sea necesaria en ninguna pregunta.

1.- (10 puntos) Miguel quiere mejorar su rendimiento deportivo y ha decidido complementar su dieta con barras de proteínas y carbohidratos. Puede elegir entre dos tipos de barras: A y B. Cada barra A cuesta 1 euro y 50 céntimos y aporta 20 gramos de proteínas y 10 gramos de carbohidratos. Cada barra B cuesta 1 euro y 20 céntimos y aporta 10 gramos de proteínas y 15 gramos de carbohidratos. Para cumplir con su plan de entrenamiento, Miguel necesita consumir, al menos, 600 gramos de proteínas y, al menos, 620 gramos de carbohidratos. Además, no puede consumir más de 100 barras en total.

a.- (3 puntos) Plantee un problema de programación lineal que permita determinar cuántas barras de cada tipo debe comprar Miguel para que, cumpliendo las restricciones, el coste sea mínimo.

b.- (7 puntos) Resuelva el problema anterior y determine a cuánto asciende dicho coste mínimo.

2.- (10 puntos) Se ha lanzado al mercado la aplicación social *ViviChat* y el número de usuarios en la aplicación en el momento t está dado por la función $N(t) = 1400 \left(\frac{t}{49 + t^2} + 100 \right)$ donde t se mide en cientos de días desde el lanzamiento.

a.- (3 puntos) Gracias a la campaña previa al lanzamiento, la aplicación ha logrado captar usuarios desde el inicio. Se considera que la campaña ha tenido éxito si el número de usuarios en el momento del lanzamiento ($t=0$) es de, al menos, 100.000. Determine si la campaña ha sido exitosa. Además, calcule cuántos usuarios tendrá la aplicación en un horizonte infinito de tiempo.

b.- (7 puntos) Suponiendo que $t \in [1, 14]$, calcule el valor de t en el que la aplicación alcanzará el máximo número de usuarios. ¿Cuántos usuarios tendrá la aplicación en ese momento?, y ¿cuántos días habrán transcurrido desde su lanzamiento?

3.- (10 puntos) Una plataforma de streaming desea mejorar su catálogo de películas, para lo cual quiere conocer las preferencias de sus usuarios sobre las películas de *Ciencia Ficción* y de *Comedia*, dos de los géneros más populares entre sus suscriptores.

a.- (5 puntos) Con el fin de conocer las preferencias de sus usuarios, la plataforma ha realizado una encuesta entre una muestra aleatoria simple de 300 suscriptores. De estos, 210 han indicado que prefieren ver películas de *Ciencia Ficción*, mientras que el resto

prefieren Comedia. Calcule un intervalo de confianza al 96% para la proporción de suscriptores que prefieren ver Ciencia Ficción.

- b.- (5 puntos)** La plataforma de streaming investiga si la edad de sus usuarios influye en sus preferencias por el género de Ciencia Ficción. Han descubierto que el 60% de sus usuarios son menores de 30 años y, dentro de este grupo, el 80% prefiere el género de Ciencia Ficción. En cambio, entre los usuarios de 30 años o más, solo el 50% tiene esta preferencia. La plataforma ha decidido premiar a uno de sus usuarios al azar con una suscripción gratuita por un año. Sabemos que el ganador prefiere ver películas de Ciencia Ficción. ¿Cuál es la probabilidad de que este usuario tenga menos de 30 años?

4.- (10 puntos) Elija entre **Opción I** y **Opción II**, respondiendo **únicamente** a una de las dos.

Opción I

Q1.- (5 puntos) Un estudio revela que los estudiantes de bachillerato pasan, en promedio, 3,5 horas haciendo fila para entrar a conciertos, con una desviación típica de 1,8 horas. Se selecciona una muestra aleatoria de 64 estudiantes de bachillerato que asisten esta tarde a un concierto, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo promedio de espera para esa muestra sea inferior a 4 horas?

Q2.- (5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $AX + 2A = A^2$ despejando previamente X.

Opción II

Q1.- (5 puntos) Clasifique el sistema de ecuaciones (S) utilizando el teorema de Rouché-

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 2z = -4 \\ 3x - 5y + 8z = -14 \\ x + 3y - 4z = 2 \end{array} \right\} (S)$$

Q2.- (5 puntos) Dada $f(x) = \frac{x - \sqrt{6-x}}{x-2}$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. ¿La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$? Justifique la respuesta basándose en el cálculo del límite.

Tabla de la distribución normal (puede no ser necesaria para el examen):

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla,

SOLUCIONES

- 1.- (10 puntos)** Miguel quiere mejorar su rendimiento deportivo y ha decidido complementar su dieta con barras de proteínas y carbohidratos. Puede elegir entre dos tipos de barras: A y B. Cada barra A cuesta 1 euro y 50 céntimos y aporta 20 gramos de proteínas y 10 gramos de carbohidratos. Cada barra B cuesta 1 euro y 20 céntimos y aporta 10 gramos de proteínas y 15 gramos de carbohidratos. Para cumplir con su plan de entrenamiento, Miguel necesita consumir, al menos, 600 gramos de proteínas y, al menos, 620 gramos de carbohidratos. Además, no puede consumir más de 100 barras en total.
- a.- (3 puntos)** Plantee un problema de programación lineal que permita determinar cuántas barras de cada tipo debe comprar Miguel para que, cumpliendo las restricciones, el coste sea mínimo.
- b.- (7 puntos)** Resuelva el problema anterior y determine a cuánto asciende dicho coste mínimo.

- a.-** Llamamos x = número de barras A, y = número de barras B.
Completamos una tabla con los datos del problema.

	Proteínas	Carbohidratos	Coste
Nº barras A (x)	$20x$	$10x$	$1.5x$
Nº barras B (y)	$10y$	$15y$	$1.2y$
TOTALES	$20x + 10y$	$10x + 15y$	$1.5x + 1.2y$

Queremos minimizar los costes: $C(x, y) = 1.5x + 1.2y$

Las restricciones son:

“Miguel necesita consumir, al menos, 600 gramos de proteínas y, al menos, 620 gramos de carbohidratos” $\rightarrow 20x + 10y \geq 600; 10x + 15y \geq 620$.

“no puede consumir más de 100 barras en total” $\rightarrow x + y \leq 100$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 20x + 10y \geq 600 \\ 10x + 15y \geq 620 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 60 \\ 2x + 3y \geq 124 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b.-** Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$$2x + y = 60$$

$$2x + 3y = 124$$

$$x + y = 100$$

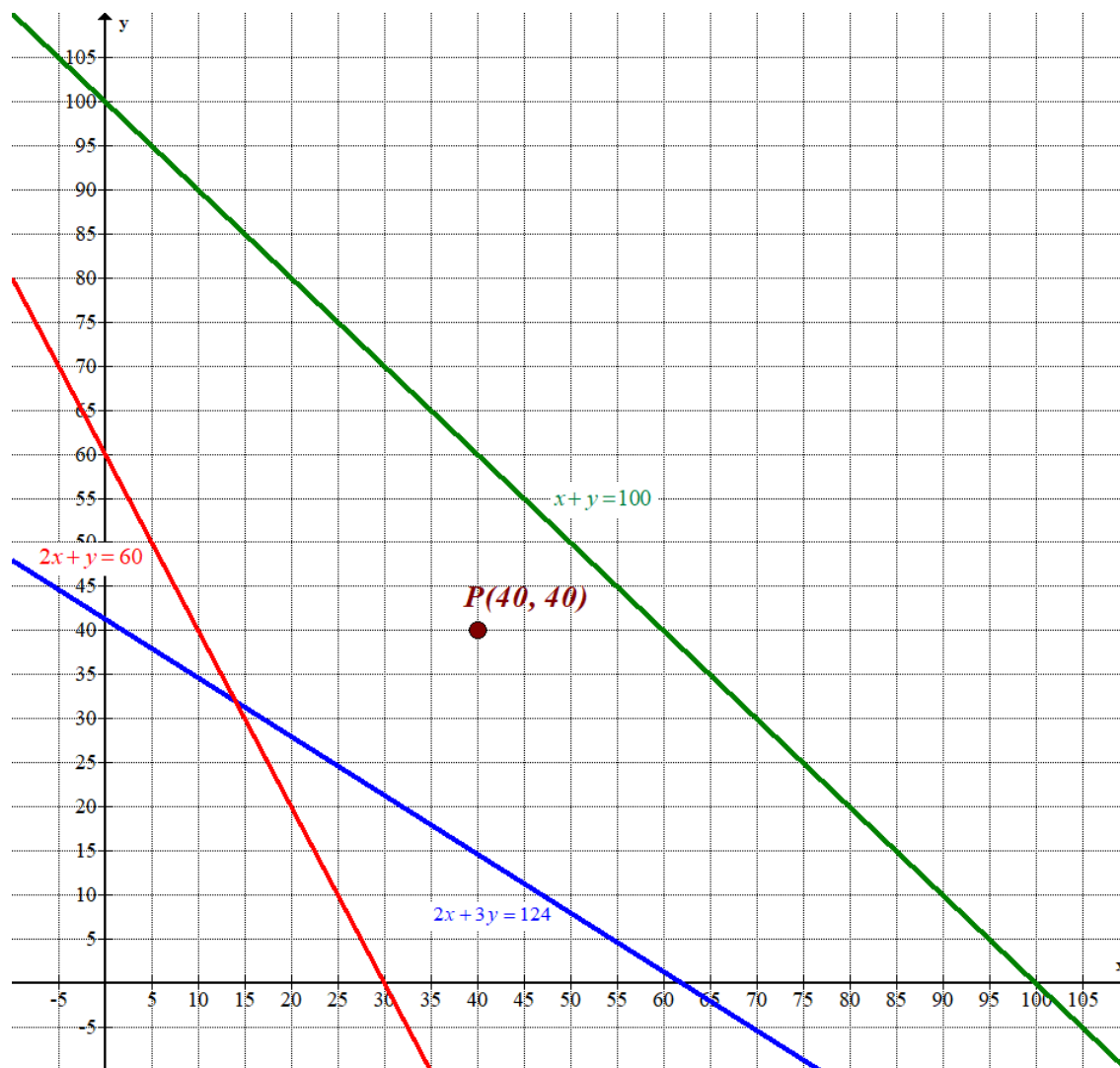
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = 60 - 2x$
0	60
10	40
30	0

x	$y = \frac{124 - 2x}{3}$
2	40
35	18
62	0

x	$y = 100 - x$
0	100
100	0

Primer
cuadrante



Como las restricciones son

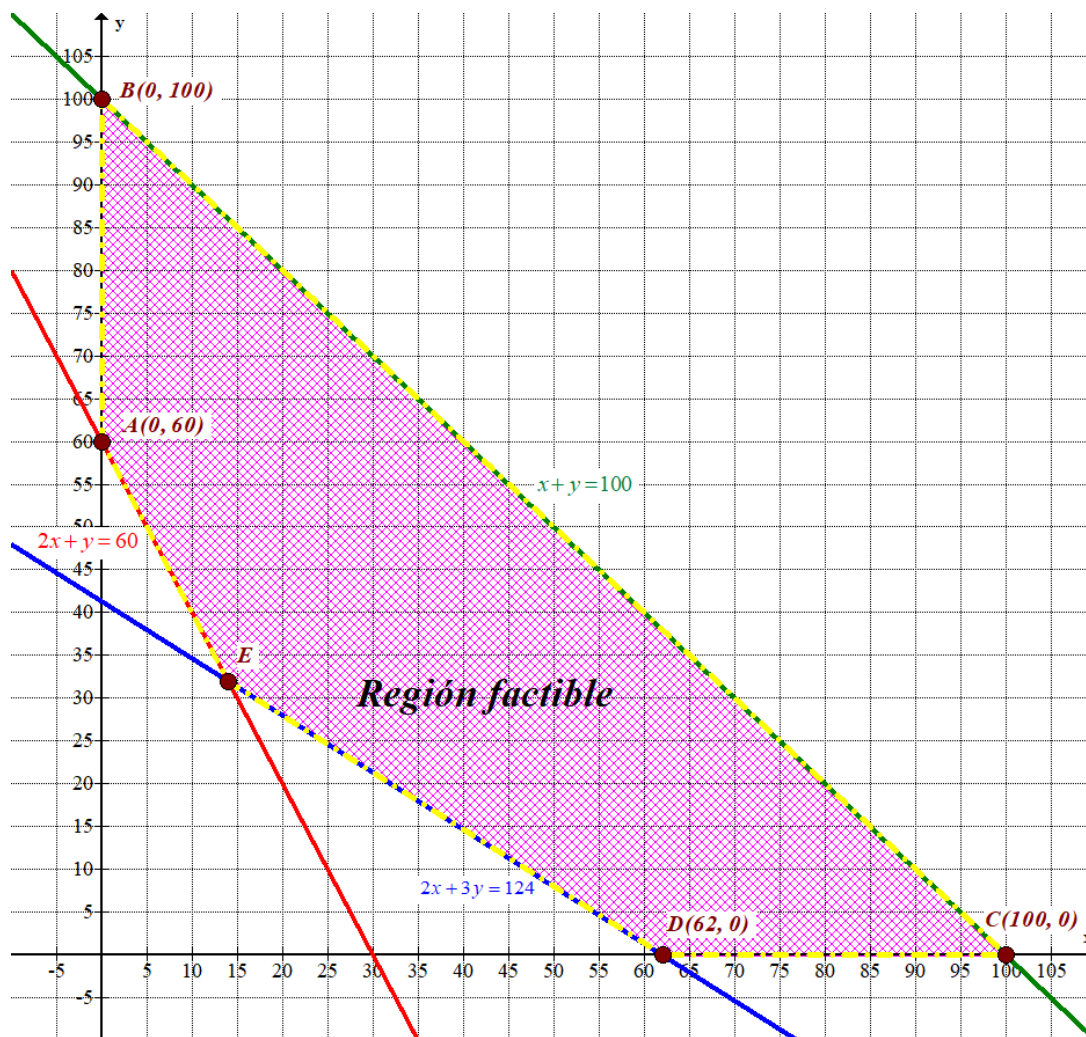
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 60 \\ 2x + 3y \geq 124 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

que está por encima de las rectas roja y azul, y por debajo de la recta verde.

Comprobamos que el punto $P(40, 40)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 40 + 40 \geq 60 \\ 2 \cdot 40 + 3 \cdot 40 \geq 124 \\ 40 + 40 \leq 100 \\ 40 \geq 0; 40 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 80 + 40 \geq 60 \\ 80 + 120 \geq 124 \\ 40 + 40 \leq 100 \\ 40 \geq 0; 40 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Determinamos las coordenadas del vértice E.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 60 \\ 2x + 3y = 124 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 60 - y \\ 2x + 3y = 124 \end{array} \right\} \Rightarrow 60 - y + 3y = 124 \Rightarrow 2y = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{64}{2} = 32} \Rightarrow 2x + 32 = 60 \Rightarrow 2x = 28 \Rightarrow \boxed{x = 14} \Rightarrow E(14, 32)$$

Valoramos la función coste $C(x, y) = 1.5x + 1.2y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor mínimo.

$$A(0, 60) \rightarrow C(0, 60) = 1.5 \cdot 0 + 1.2 \cdot 60 = 72$$

$$B(0, 100) \rightarrow C(0, 100) = 1.5 \cdot 0 + 1.2 \cdot 100 = 120$$

$$C(100, 0) \rightarrow C(100, 0) = 1.5 \cdot 100 + 1.2 \cdot 0 = 150$$

$$D(62, 0) \rightarrow C(62, 0) = 1.5 \cdot 62 + 1.2 \cdot 0 = 93$$

$$E(14, 32) \rightarrow C(14, 32) = 1.5 \cdot 14 + 1.2 \cdot 32 = 59.4 \text{ Mínimo}$$

El valor mínimo es 59.4 y se obtiene en E(14, 32).

Con 14 barritas A y 32 tipo B se cumplen las restricciones con un coste mínimo de 59.4 €.

2.- (10 puntos) Se ha lanzado al mercado la aplicación social *ViviChat* y el número de usuarios en la aplicación en el momento t está dado por la función $N(t) = 1400\left(\frac{t}{49+t^2} + 100\right)$ donde t se mide en cientos de días desde el lanzamiento.

a.- (3 puntos) Gracias a la campaña previa al lanzamiento, la aplicación ha logrado captar usuarios desde el inicio. Se considera que la campaña ha tenido éxito si el número de usuarios en el momento del lanzamiento ($t=0$) es de, al menos, 100.000. Determine si la campaña ha sido exitosa. Además, calcule cuántos usuarios tendrá la aplicación en un horizonte infinito de tiempo.

b.- (7 puntos) Suponiendo que $t \in [1, 14]$, calcule el valor de t en el que la aplicación alcanzará el máximo número de usuarios. ¿Cuántos usuarios tendrá la aplicación en ese momento?, y ¿cuántos días habrán transcurrido desde su lanzamiento?

a.- Como $N(0) = 1400\left(\frac{0}{49+0^2} + 100\right) = 140000$, en el momento inicial del lanzamiento el número de usuarios es de 140 000 que es mayor de 100 000. El lanzamiento ha sido exitoso. Calculamos el límite de la función cuando t se acerca a $+\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} N(t) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1400\left(\frac{t}{49+t^2} + 100\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1400t}{49+t^2} + 140000 = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1400t}{49+t^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 140000 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1400t}{t^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 140000 = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1400}{t} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 140000 = \frac{1400}{\infty} + 140000 = 0 + 140000 = \boxed{140000}\end{aligned}$$

La aplicación tendrá 140000 usuarios en un horizonte infinito de tiempo.

b.- Calculamos la derivada y averiguamos cuando se anula.

$$N(t) = 1400\left(\frac{t}{49+t^2} + 100\right) \Rightarrow N'(t) = 1400\left(\frac{49+t^2 - 2t \cdot t}{(49+t^2)^2}\right) = 1400\left(\frac{49-t^2}{(49+t^2)^2}\right)$$

$$N'(t) = 0 \Rightarrow 1400\left(\frac{49-t^2}{(49+t^2)^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{49-t^2}{(49+t^2)^2} = 0 \Rightarrow 49-t^2 \Rightarrow t^2 = 49 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{49} = 7}$$

Valoramos la función en el punto crítico y en los extremos del intervalo de definición.

$$\left. \begin{aligned}t = 1 &\rightarrow N(1) = 1400\left(\frac{1}{49+1^2} + 100\right) = 140028 \\ t = 7 &\rightarrow N(7) = 1400\left(\frac{7}{49+7^2} + 100\right) = 140100 \\ t = 14 &\rightarrow N(14) = 1400\left(\frac{14}{49+14^2} + 100\right) = 140080\end{aligned} \right\}$$

El mayor número de usuarios es de 140 100 que se obtienen para $t = 7$.

Transcurridos 700 días desde del lanzamiento de la aplicación el número de usuarios es máximo (140 100).

3.- (10 puntos) Una plataforma de streaming desea mejorar su catálogo de películas, para lo cual quiere conocer las preferencias de sus usuarios sobre las películas de *Ciencia Ficción* y de *Comedia*, dos de los géneros más populares entre sus suscriptores.

a.- (5 puntos) Con el fin de conocer las preferencias de sus usuarios, la plataforma ha realizado una encuesta entre una muestra aleatoria simple de 300 suscriptores. De estos, 210 han indicado que prefieren ver películas de Ciencia Ficción, mientras que el resto prefieren Comedia. Calcule un intervalo de confianza al 96% para la proporción de suscriptores que prefieren ver Ciencia Ficción.

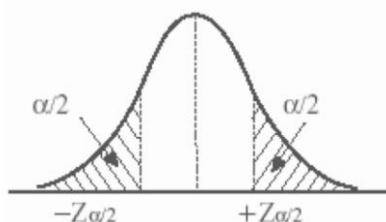
b.- (5 puntos) La plataforma de streaming investiga si la edad de sus usuarios influye en sus preferencias por el género de Ciencia Ficción. Han descubierto que el 60% de sus usuarios son menores de 30 años y, dentro de este grupo, el 80% prefiere el género de Ciencia Ficción. En cambio, entre los usuarios de 30 años o más, solo el 50% tiene esta preferencia. La plataforma ha decidido premiar a uno de sus usuarios al azar con una suscripción gratuita por un año. Sabemos que el ganador prefiere ver películas de Ciencia Ficción. ¿Cuál es la probabilidad de que este usuario tenga menos de 30 años?

a.- La proporción de suscriptores que prefieren ver Ciencia Ficción es $p = \frac{210}{300} = 0.7$ y de

aquí obtenemos $q = 1 - 0.7 = 0.3$.

Para un nivel de confianza del 96% obtenemos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.96 \rightarrow \alpha = 0.04 \rightarrow \alpha/2 = 0.02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.98 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.05 + 2.06}{2} = 2.055$$



k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846

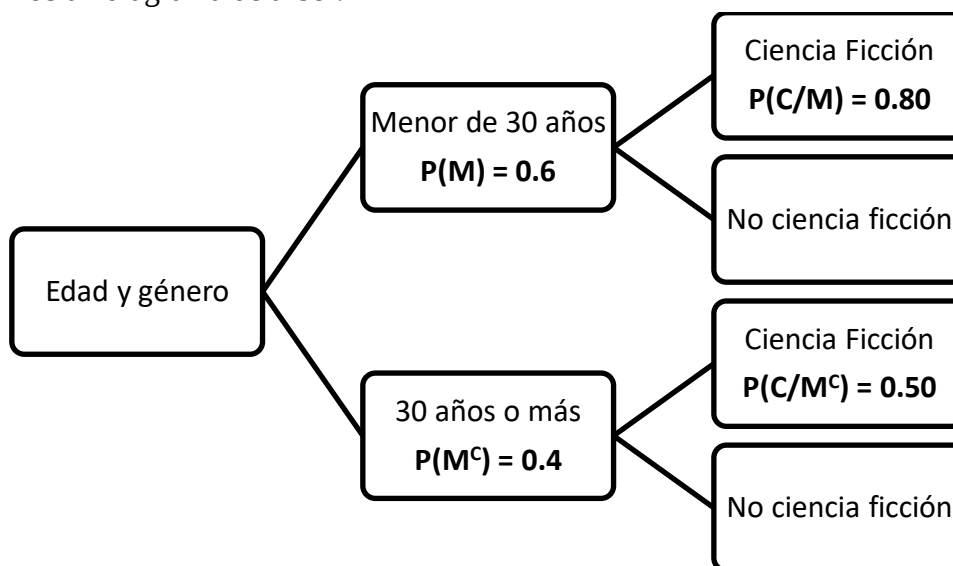
Utilizamos la fórmula del error y tenemos

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{300}} \approx 0.0544$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0.7 - 0.0544, 0.7 + 0.0544) = (0.6456, 0.7544)$$

b.- Realizamos un diagrama de árbol.



Nos piden calcular $P(M / C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M / C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{P(M)P(C / M)}{P(M)P(C / M) + P(M^c)P(C / M^c)} =$$

$$= \frac{0.6 \cdot 0.8}{0.6 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.5} = \boxed{\frac{12}{17} \approx 0.7059}$$

La probabilidad de que este usuario que prefiere ver películas de Ciencia Ficción tenga menos de 30 años es de 0.7059.

4.- (10 puntos) Elija entre **Opción I** y **Opción II**, respondiendo **únicamente** a una de las dos.

Opción I

Q1.- (5 puntos) Un estudio revela que los estudiantes de bachillerato pasan, en promedio, 3,5 horas haciendo fila para entrar a conciertos, con una desviación típica de 1,8 horas. Se selecciona una muestra aleatoria de 64 estudiantes de bachillerato que asisten esta tarde a un concierto, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo promedio de espera para esa muestra sea inferior a 4 horas?

Q2.- (5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $AX + 2A = A^2$ despejando previamente X.

Q1.- Sea X = Número de horas de promedio haciendo fila para entrar a conciertos.

$$X = N(3.5, 1.8)$$

Si consideramos la distribución de muestras de tamaño 64 sigue una ley normal con la misma media, pero con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.8}{\sqrt{64}} = 0.225$. $\overline{X}_{64} = N(3.5, 0.225)$.

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{64} < 4)$.

$$P(\overline{X}_{64} < 4) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{4 - 3.5}{0.225}\right) = P(Z < 2.22) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9868}$$

k	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324
0,7	0,7580	0,7611	0,7642
0,8	0,7881	0,7910	0,7939
0,9	0,8159	0,8186	0,8212
1,0	0,8413	0,8438	0,8461
1,1	0,8643	0,8665	0,8686
1,2	0,8849	0,8869	0,8888
1,3	0,9032	0,9049	0,9066
1,4	0,9192	0,9207	0,9222
1,5	0,9332	0,9345	0,9357
1,6	0,9452	0,9463	0,9474
1,7	0,9554	0,9564	0,9573
1,8	0,9641	0,9649	0,9656
1,9	0,9713	0,9719	0,9726
2,0	0,9772	0,9778	0,9783
2,1	0,9821	0,9826	0,9831
2,2	0,9868	0,9871	0,9875

Q2.- Despejamos X.

$$AX + 2A = A^2 \Rightarrow A^{-1}AX + 2A^{-1}A = A^{-1}A^2 \Rightarrow X + 2I = A^{-1}AA \Rightarrow X + 2I = A \Rightarrow \boxed{X = A - 2I}$$

Sustituimos y realizamos las operaciones indicadas y obtenemos la expresión de X.

$$X = A - 2I = A - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para obtener la solución hemos supuesto que la matriz A tiene inversa, aunque no ha sido necesario calcularla. Comprobamos que la matriz A tiene inversa viendo que su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Opción II**Q1.- (5 puntos)** Clasifique el sistema de ecuaciones (S) utilizando el teorema de Rouché-

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 2z = -4 \\ 3x - 5y + 8z = -14 \\ x + 3y - 4z = 2 \end{array} \right\} (S)$$

Q2.- (5 puntos) Dada $f(x) = \frac{x - \sqrt{6-x}}{x-2}$. Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. ¿La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$? Justifique la respuesta basándose en el cálculo del límite.

Q1.- El sistema tiene asociada la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & 8 & -14 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ Triangulamos el sistema utilizando el método de Gauss y así poder analizar con más comodidad los rangos de A y A/B.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & 8 & -14 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad -5 \quad 8 \quad -14 \\ -3 \quad 3 \quad -6 \quad 12 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 2 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 3 \quad -4 \quad 2 \\ -1 \quad 1 \quad -2 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 4 \quad -6 \quad 6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 4 \quad -6 \quad 6 \\ 0 \quad -4 \quad 4 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -2 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 3, al igual que el de A/B. Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius podemos afirmar que el sistema es compatible determinado. Hallamos su única solución partiendo del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = -4 \\ -2y + 2z = -2 \\ -2z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = -4 \\ -2y + 2z = -2 \\ \boxed{z = \frac{2}{-2} = -1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - 2 = -4 \\ -2y - 2 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y = -2 \\ -2y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y = -2 \\ \boxed{y = 0} \end{array} \right\} \Rightarrow x - 0 = -2 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

La solución del sistema es $x = -2, y = 0, z = -1$.

Q2.- Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{6-x}}{x-2} = \frac{2 - \sqrt{6-2}}{2-2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (Conjugado)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - \sqrt{6-x})(x + \sqrt{6-x})}{(x-2)(x + \sqrt{6-x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - (\sqrt{6-x})^2}{(x-2)(x + \sqrt{6-x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - (6-x)}{(x-2)(x + \sqrt{6-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{(x-2)(x + \sqrt{6-x})} = \dots$$

$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad -6 \\ 2 \overline{) \quad 2 \quad 6} \Rightarrow x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3) \\ \underline{1 \quad 3 \quad 0} \end{array}$

$$\dots = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}(x + \sqrt{6-x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x + \sqrt{6-x}} = \frac{2+3}{2 + \sqrt{6-2}} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

El límite de la función cuando x tiende a 2 vale $5/4$ (valor finito) por lo que no tiene asíntota en $x = 2$. Para que tuviese asíntota el límite debería ser $+\infty$ o $-\infty$.

La función presenta una discontinuidad en $x = 2$, pero no tiene asíntota.