



**Universidad de
Castilla-La Mancha**

**Prueba de acceso a la Universidad
Curso 2024/2025**

Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los ejercicios 3 y 4 deberá contestar solamente a UNO de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo están permitidas las calculadoras de tipo 1 y 2. Cada ejercicio completo puntuará 2.5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

Ejercicio 1.- Un centro de atención telefónica estima que el tiempo, en minutos, de atención a las llamadas que recibe se aproxima por una distribución normal con desviación típica $\sigma = 4$ minutos. Se toma una muestra de 36 llamadas y se observa que el tiempo medio de atención es de 15 minutos. Con un nivel de confianza del 97%,

- Calcula el intervalo de confianza para el tiempo de atención medio poblacional. **(1 punto)**
- Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**
- Una asociación de consumidores afirma que el tiempo medio de atención a las llamadas es de 17 minutos. Dado el intervalo del apartado a), ¿se puede aceptar tal afirmación con un nivel de confianza del 95%? Justificar la respuesta. **(0.75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Ejercicio 2.- Lucía, en un examen de Historia que constaba de tres preguntas, ha obtenido una calificación total de 7,2 puntos. La puntuación obtenida en la primera pregunta fue un 40 % más que la obtenida en la segunda, y la puntuación del tercer enunciado fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en la primera y segunda pregunta. ¿Cuál fue la puntuación obtenida por Lucía en cada pregunta? **(2.5 puntos)**

Ejercicio 3.- Elige y resuelve sólo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + 10 & \text{si } x \leq k \\ x^2 - 4x + 9 & \text{si } x > k \end{cases}$

- ¿Para qué valores de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$? **(1 punto)**
- Si $k = 1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0.75 puntos)**
- En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente. **(0.75 puntos)**

Apartado b) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, se sabe que tiene un mínimo relativo en el punto $(2, -3)$ y un punto de inflexión en $(1, -1)$.

- Encuentra el valor de los parámetros a , b y c . **(1.5 puntos)**

b.2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X

en la ecuación matricial $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

Ejercicio 4.- Elige y resuelve sólo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Una fábrica de quesos organiza paquetes para enviar: A y B. Para la elaboración del paquete tipo A se necesitan 30 minutos de trabajo manual y 45 minutos de trabajo en máquinas. Para la de tipo B, 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de máquinas. Tienen necesidad de enviarlo pronto, por lo que disponen de 85 horas de trabajo manual y 75 horas de trabajo con máquinas y deben enviar, al menos, 100 paquetes. El beneficio total es de 20 € por cada paquete tipo A y 17 € por cada paquete tipo B y se pretende maximizar el beneficio total.

- a.1) Expresa la función objetivo; escribe, mediante inecuaciones, las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. **(2 puntos)**
- a.2) Determina cuántos paquetes de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo. **(0.5 puntos)**

Apartado b) Se va a proceder a la selección de pilotos para una compañía de vuelos. Se realizan tres pruebas independientes: A (idiomas), B (conocimientos teórico-prácticos) y C (pruebas físicas). Para acceder al puesto hay que superar las tres pruebas y se sabe, por procesos realizados anteriormente, que el 10 % de los presentados superan la prueba A, la B, el 40 % y la C, el 20 %. Sabiendo que todos los candidatos realizan las tres pruebas, se pide, de forma razonada:

- b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato pase la selección? **(0.5 puntos)**
- b.2) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato no sea seleccionado por haber fallado en una sola prueba? **(0.5 puntos)**
- b.3) Sabiendo que un candidato no ha sido seleccionado por haber fallado en una sola prueba, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado en la prueba B? **(0.25 puntos)**
- b.4) Si la velocidad punta de la prueba física de carrera de 1000 m sigue una función de la forma: $V(t) = at^3 + bt^2 + t$, con t en minutos, y sabemos que alcanza el máximo en el instante $t = 1$ alcanzando, en ese instante, una velocidad de 150 m/min, encuentra los valores de los parámetros a y b . **(1.25 puntos)**

SOLUCIONES

Ejercicio 1.- Un centro de atención telefónica estima que el tiempo, en minutos, de atención a las llamadas que recibe se aproxima por una distribución normal con desviación típica $\sigma = 4$ minutos. Se toma una muestra de 36 llamadas y se observa que el tiempo medio de atención es de 15 minutos. Con un nivel de confianza del 97%,

- Calcula el intervalo de confianza para el tiempo de atención medio poblacional. **(1 punto)**
- Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**
- Una asociación de consumidores afirma que el tiempo medio de atención a las llamadas es de 17 minutos. Dado el intervalo del apartado a), ¿se puede aceptar tal afirmación con un nivel de confianza del 95%? Justificar la respuesta. **(0.75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

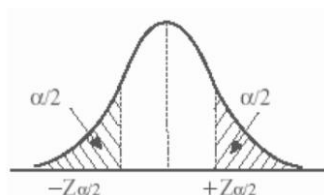
Sea X = el tiempo, en minutos, de atención a las llamadas que recibe un centro de atención telefónica. $X = N(\mu, 4)$.

Tamaño de la muestra $n = 36$. La media muestral es $\bar{x} = 15$ minutos.

- a) Con un nivel de confianza del 97 %

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{4}{\sqrt{36}} \approx 1.4467 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza para la media del tiempo de atención a las llamadas recibidas es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (15 - 1.4467, 15 + 1.4467) = (13.5533, 16.4467)$$

- El único valor que se podría modificar es el tamaño muestral, n . Para reducir la amplitud, debería aumentar el tamaño muestral.
- Un nivel de confianza del 95 % es menor que el nivel de confianza del apartado a) que era del 97%, por lo que tendremos un valor de $z_{\alpha/2}$ menor y la amplitud del intervalo será menor que el obtenido en el apartado a). Pero $17 \notin (13.5533, 16.4467)$ y por tanto no pertenece al

Intervalo de confianza que obtendríamos con un nivel de confianza del 95% que tendría menos amplitud.

La afirmación no es aceptable.

Ejercicio 2.- Lucía, en un examen de Historia que constaba de tres preguntas, ha obtenido una calificación total de 7,2 puntos. La puntuación obtenida en la primera pregunta fue un 40 % más que la obtenida en la segunda, y la puntuación del tercer enunciado fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en la primera y segunda pregunta. ¿Cuál fue la puntuación obtenida por Lucía en cada pregunta? **(2.5 puntos)**

Llamamos “x”, “y”, “z” a las puntuaciones obtenidas en la primera, segunda y tercera preguntas del examen de Historia, respectivamente. Obtenemos las ecuaciones asociadas a cada una de las informaciones proporcionadas.

“Ha obtenido una calificación total de 7,2 puntos” $\rightarrow x + y + z = 7.2$

“La puntuación obtenida en la primera pregunta fue un 40 % más que la obtenida en la segunda” $\rightarrow x = y + 0.40y$

“La puntuación del tercer enunciado fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en la primera y segunda pregunta” $\rightarrow z = 2(x + y)$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 7.2 \\ x = y + 0.40y \\ z = 2(x + y) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 7.2 \\ z = 2x + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1.4y + y + z = 7.2 \\ z = 2 \cdot 1.4y + 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2.4y + z = 7.2 \\ z = 4.8y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.4y + 4.8y = 7.2 \Rightarrow 7.2y = 7.2 \Rightarrow \boxed{y = 1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 1.4 \cdot 1 = 1.4} \\ \boxed{z = 4.8 \cdot 1 = 4.8} \end{array} \right.$$

En el examen de Historia Lucía ha obtenido 1.4 puntos en la primera pregunta, 1 punto en la segunda y 4.8 en la tercera.

Ejercicio 3.- Elige y resuelve sólo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + 10 & \text{si } x \leq k \\ x^2 - 4x + 9 & \text{si } x > k \end{cases}$

a.1) ¿Para qué valores de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$? **(1 punto)**

a.2) Si $k = 1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0.75 puntos)**

a.3) En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente. **(0.75 puntos)**

a.1) Buscamos cuando la función es continua en $x = k$.

$$\left. \begin{aligned} f(k) &= -k^2 - 3k + 10 \\ \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow k^-} -x^2 - 3x + 10 = -k^2 - 3k + 10 \\ \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow k^+} x^2 - 4x + 9 = k^2 - 4k + 9 \\ \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = f(k) \end{aligned} \right\} \Rightarrow k^2 - 4k + 9 = -k^2 - 3k + 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k^2 - k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1+3}{4} = \boxed{1=k} \\ \frac{1-3}{4} = \boxed{\frac{-1}{2}=k} \end{cases}$$

La función es continua en $x = k$ para $k = 1$ y $k = \frac{-1}{2}$.

a.2) Si $k = 1$ la función es continua y queda $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + 10 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 9 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 3 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 3 = 0 \rightarrow 2x = -3 \rightarrow x = \frac{-3}{2} = -1.5 \in (-\infty, 1) \\ 2x - 4 = 0 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2 \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -1.5$, $x = 1$ y $x = 2$.

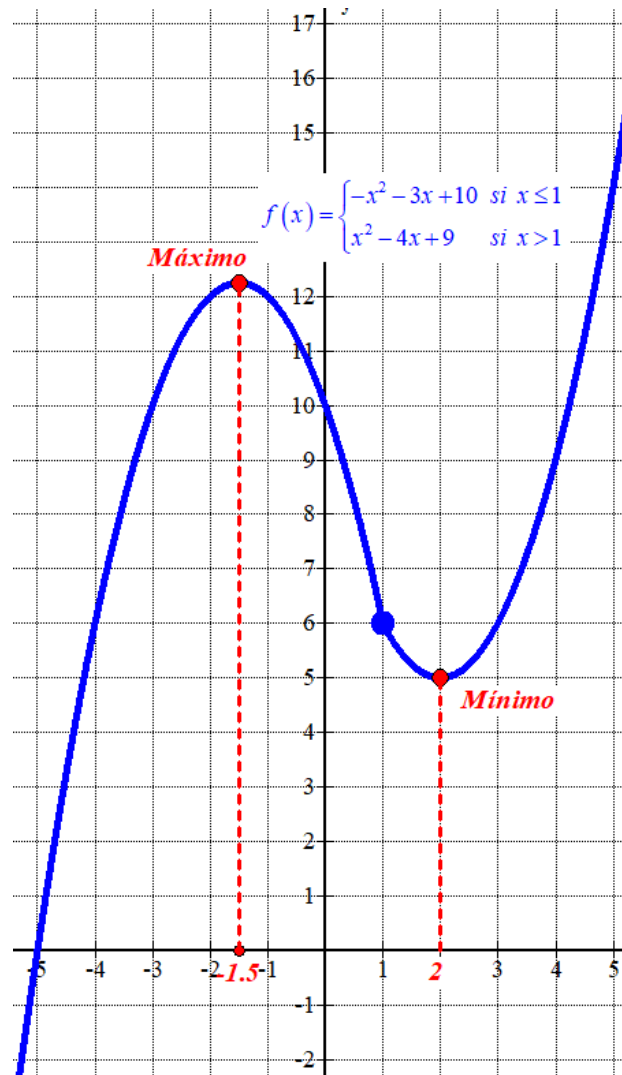
- En el intervalo $(-\infty, -1.5)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = -2(-2) - 3 = 1 > 0$. La función crece en $(-\infty, -1.5)$.
- En el intervalo $(-1.5, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = -2 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$. La función decrece en $(-1.5, 1)$.
- En el intervalo $(1, 2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale $f'(1.5) = 2 \cdot 1.5 - 4 = -1 < 0$. La función decrece en $(1, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2 > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, -1.5) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(-1.5, 2)$.

Como la función crece antes de -1.5 y decrece después, la función tiene un máximo relativo en $x = -1.5$. Tenemos que $f(-1.5) = -(-1.5)^2 - 3(-1.5) + 10 = 12.25$. El máximo relativo tiene coordenadas $(-1.5, 12.25)$.

Como la función decrece antes de 2 y crece después, la función tiene un mínimo relativo en $x = 2$. Tenemos que $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 9 = 5$. El mínimo relativo tiene coordenadas $(2, 5)$.

a.3) La función crece en $(-\infty, -1.5) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(-1.5, 2)$.



Apartado b) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, se sabe que tiene un mínimo relativo en el punto $(2, -3)$ y un punto de inflexión en $(1, -1)$.

b.1) Encuentra el valor de los parámetros a , b y c . **(1.5 puntos)**

b.2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X en la

ecuación matricial $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

b.1) Si la función tiene un punto de inflexión en $x = 1$ entonces la derivada segunda se anula para este valor $\rightarrow f''(1) = 0$.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(1) = 0 \Rightarrow 0 = 6a + 2b \Rightarrow b + 3a = 0 \Rightarrow \boxed{b = -3a}$$

La función queda $f(x) = ax^3 - 3ax^2 + c$. La función tiene un mínimo relativo en $x = 2$, por lo que la derivada primera se anula para este valor $\rightarrow f'(2) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 - 6ax \\ f'(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot 2^2 - 6a \cdot 2 \Rightarrow 12a - 12a = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

De esta condición no obtenemos ninguna información. Nos dan 4 datos para obtener el valor de a , b y c (3 variables) por lo que o alguna información es redundante o es imposible encontrar los valores pedidos. En nuestro caso hay una información redundante.

Sabemos que la función pasa por los puntos $(2, -3)$ y $(1, -1) \rightarrow f(2) = -3$ y $f(1) = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = -3 \\ f(1) = -1 \\ f(x) = ax^3 - 3ax^2 + c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3 = a \cdot 2^3 - 3a \cdot 2^2 + c \\ -1 = a \cdot 1^3 - 3a \cdot 1^2 + c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3 = 8a - 12a + c \\ -1 = a - 3a + c \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3 = -4a + c \\ -1 = -2a + c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4a - 3 = c \\ -1 = -2a + c \end{array} \right\} \Rightarrow -1 = -2a + 4a - 3 \Rightarrow 2 = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow \boxed{c = 4 - 3 = 1}$$

Para $a = 1$ tenemos que $b = -3 \cdot 1 = -3$.

Los valores buscados son $a = c = 1$ y $b = -3$.

b.2) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I \Rightarrow A \cdot B \cdot X - C \cdot X = I \Rightarrow (AB - C)X = I \Rightarrow X = (AB - C)^{-1}$$

Hallamos la expresión de la matriz $AB - C$, comprobamos que tiene inversa y la calculamos.

$$AB - C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-3 & -1+4 \\ 4 & 2+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|AB - C| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa.}$$

$$(AB - C)^{-1} = \frac{\text{Adj}((AB - C)^T)}{|AB - C|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$ es

$$X = (AB - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4.- Elige y resuelve sólo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Una fábrica de quesos organiza paquetes para enviar: A y B. Para la elaboración del paquete tipo A se necesitan 30 minutos de trabajo manual y 45 minutos de trabajo en máquinas. Para la de tipo B, 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de máquinas. Tienen necesidad de enviarlo pronto, por lo que disponen de 85 horas de trabajo manual y 75 horas de trabajo con máquinas y deben enviar, al menos, 100 paquetes. El beneficio total es de 20 € por cada paquete tipo A y 17 € por cada paquete tipo B y se pretende maximizar el beneficio total.

a.1) Expresa la función objetivo; escribe, mediante inecuaciones, las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. **(2 puntos)**

a.2) Determina cuántos paquetes de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo. **(0.5 puntos)**

a.1) Llamamos “x” al número de paquetes A, “y” al número de paquetes B.

Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Minutos de trabajo manual	Minutos de trabajo en máquinas	Beneficio
Nº paquetes A (x)	30x	45x	20x
Nº paquetes B (y)	60y	20y	17y
TOTALES	30x + 60y	45x + 20y	20x + 17y

La función objetivo es el beneficio que viene expresado como $B(x, y) = 20x + 17y$.

Deseamos maximizar dichos beneficios.

Obtenemos las inecuaciones asociadas al ejercicio.

“Disponen de 85 horas de trabajo manual y 75 horas de trabajo con máquinas” $\rightarrow$
 $30x + 60y \leq 85 \cdot 60$; $45x + 20y \leq 75 \cdot 60$.

“Deben enviar, al menos, 100 paquetes” $\rightarrow x + y \geq 100$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos estas restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 30x + 60y \leq 85 \cdot 60 \\ 45x + 20y \leq 75 \cdot 60 \\ x + y \geq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 170 \\ 9x + 4y \leq 900 \\ x + y \geq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple las restricciones (Región factible).

$$x + 2y = 170$$

x	$y = \frac{170 - x}{2}$
0	85
80	45
170	0

$$9x + 4y = 900$$

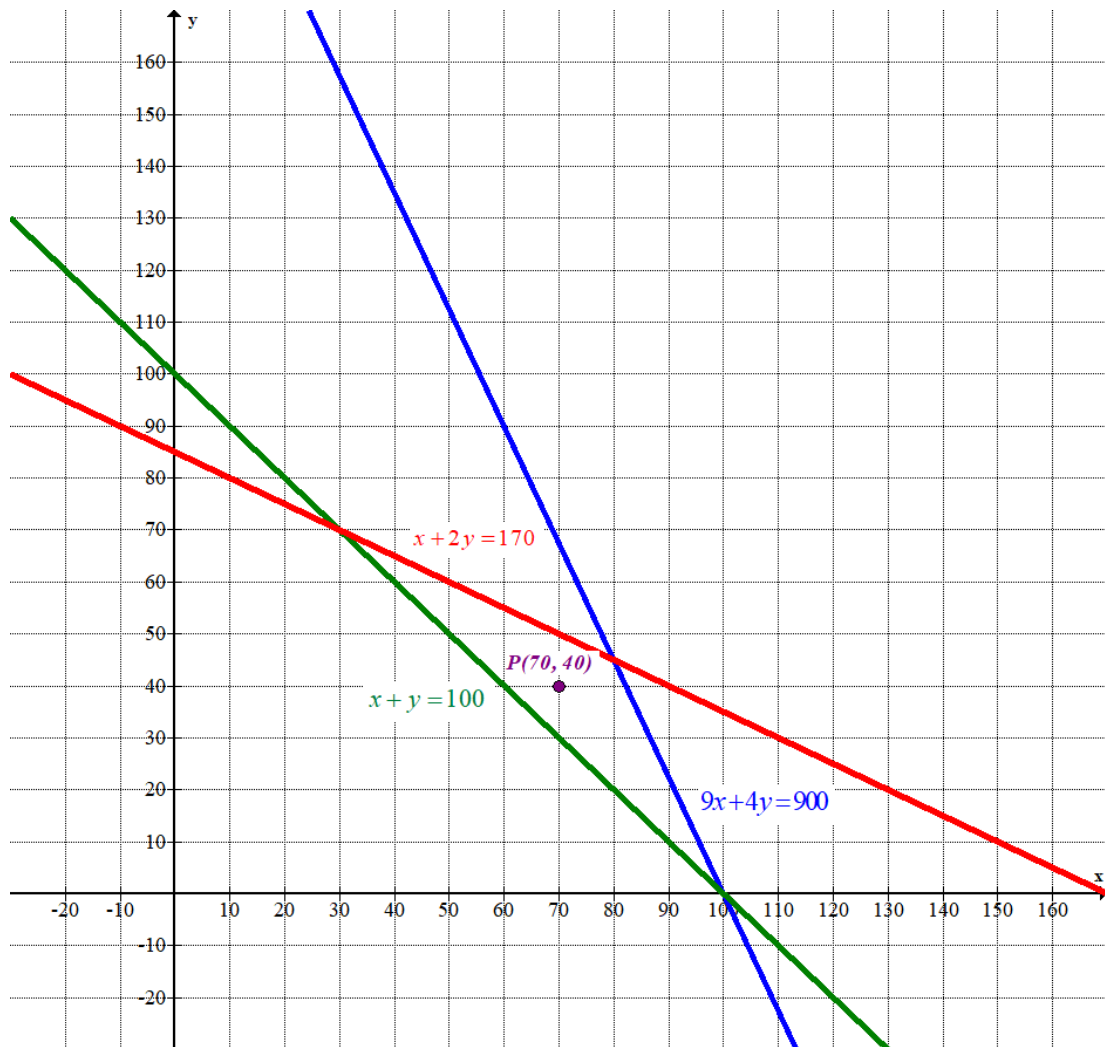
x	$y = \frac{900 - 9x}{4}$
0	225
80	45
100	0

$$x + y = 100$$

x	$y = 100 - x$
0	100
10	90
100	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer cuadrante



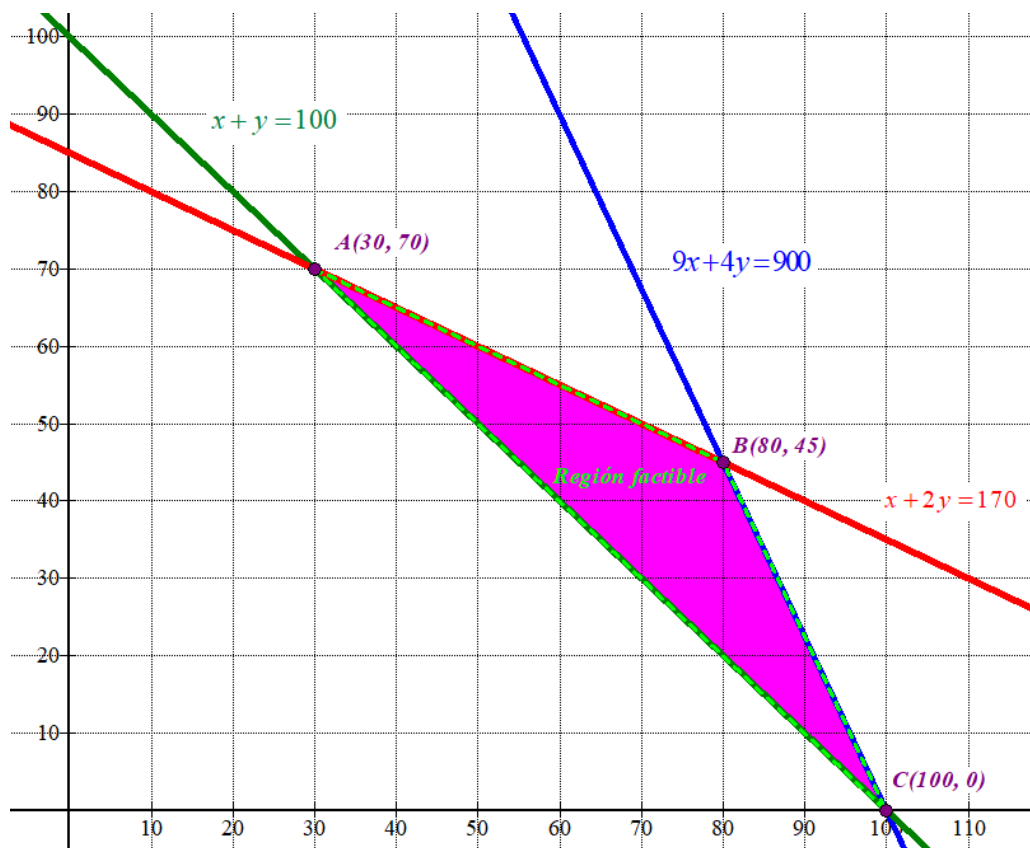
Como las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 170 \\ 9x + 4y \leq 900 \\ x + y \geq 100 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$
 la región factible es la zona del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul y roja, y por encima de la recta verde.

Comprobamos si el punto $P(70, 40)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 70 + 2 \cdot 40 \leq 170 \\ 9 \cdot 70 + 4 \cdot 40 \leq 900 \\ 70 + 40 \geq 100 \\ 70 \geq 0; 40 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 70 + 80 \leq 170 \\ 630 + 160 \leq 900 \\ 70 + 40 \geq 100 \\ 70 \geq 0; 40 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la zona de color rosa del dibujo inferior.



a.2) Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 20x + 17y$ en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(30, 70) \rightarrow B(30, 70) = 20 \cdot 30 + 17 \cdot 70 = 1790$$

$$B(80, 45) \rightarrow B(80, 45) = 20 \cdot 80 + 17 \cdot 45 = 2365 \text{ Máximo}$$

$$C(100, 0) \rightarrow B(100, 0) = 20 \cdot 100 + 17 \cdot 0 = 2000$$

El máximo se alcanza en el vértice $B(80, 45)$ con un valor de 2365.

Se deben elaborar 80 paquetes tipo A y 45 paquetes tipo B para obtener un beneficio máximo de 2365 €.

Apartado b) Se va a proceder a la selección de pilotos para una compañía de vuelos. Se realizan tres pruebas independientes: A (idiomas), B (conocimientos teórico-prácticos) y C (pruebas físicas). Para acceder al puesto hay que superar las tres pruebas y se sabe, por procesos realizados anteriormente, que el 10 % de los presentados superan la prueba A, la B, el 40 % y la C, el 20 %.

Sabiendo que todos los candidatos realizan las tres pruebas, se pide, de forma razonada:

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato pase la selección? **(0.5 puntos)**

b.2) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato no sea seleccionado por haber fallado en una sola prueba? **(0.5 puntos)**

b.3) Sabiendo que un candidato no ha sido seleccionado por haber fallado en una sola prueba, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado en la prueba B? **(0.25 puntos)**

b.4) Si la velocidad punta de la prueba física de carrera de 1000 m sigue una función de la forma: $V(t) = at^3 + bt^2 + t$, con t en minutos, y sabemos que alcanza el máximo en el instante $t = 1$ alcanzando, en ese instante, una velocidad de 150 m/min, encuentra los valores de los parámetros a y b . **(1.25 puntos)**

b.1) Para que un candidato pase la selección debe pasar las 3 pruebas, como cada una es independiente de las demás la probabilidad de pasar las 3 pruebas es el producto de las probabilidades de pasar cada una de ellas.

Llamamos S a “pasar la selección” y A , B y C a “pasar la prueba A, B y C, respectivamente”.

$$P(S) = P(A)P(B)P(C) = 0.10 \cdot 0.40 \cdot 0.20 = \boxed{0.008}$$

8 de cada 1000 candidatos pasan la selección.

b.2) Llamamos F al suceso “fallar solo una prueba”. Si el candidato ha fallado una sola prueba entonces puede haber pasado una de los tres sucesos siguientes:

$$\bar{A} \cap B \cap C \text{ o } A \cap \bar{B} \cap C \text{ o } A \cap B \cap \bar{C}.$$

$$\text{Tenemos que } F = (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}).$$

$$P(F) = P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C}) =$$

$$= (1 - 0.1) \cdot 0.4 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot (1 - 0.4) \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.4 \cdot (1 - 0.2) = \boxed{0.116}$$

b.3) Nos piden calcular $P((A \cap \bar{B} \cap C) / F)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P((A \cap \bar{B} \cap C) / F) = \frac{P((A \cap \bar{B} \cap C) \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A \cap \bar{B} \cap C)}{P(F)} =$$

$$= \frac{0.1 \cdot (1 - 0.4) \cdot 0.2}{0.116} = \boxed{\frac{3}{29} \approx 0.1034}$$

b.4) Por los datos proporcionados sabemos que $V(1) = 150$, $V'(1) = 0$, $V''(1) < 0$.

$$V(t) = at^3 + bt^2 + t \Rightarrow V'(t) = 3at^2 + 2bt + 1 \Rightarrow V''(t) = 6at + 2b$$

$$\left. \begin{array}{l} V(1) = 150 \\ V'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 150 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 1 \\ 0 = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 149 = a + b \\ -1 = 3a + 2b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 149 - b = a \\ -1 = 3a + 2b \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 = 3(149 - b) + 2b \Rightarrow -1 = 447 - 3b + 2b \Rightarrow \boxed{b = 448} \Rightarrow \boxed{a = 149 - 448 = -299}$$

Los valores buscados son $a = -299$ y $b = 448$.

Para estos valores también se cumple que $V''(1) < 0$. Lo comprobamos.

$$V''(t) = 6(-299)t + 2 \cdot 448 = -1794t + 896 \Rightarrow V''(1) = -1794 + 896 = -898 < 0$$