



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 1

No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde).

Parte A. Conteste el problema A1, y conteste también un problema a escoger entre el problema A2 y el problema A3 (total 4 pt).

Problema A1 (obligatorio). — Dados dos sucesos, A y B , de un experimento aleatorio, sabemos que $P(A) = 0.5$, que $P(B) = 0.1$, y que $P(A/B) = x$, donde $x \in [0,1]$. Se pide:

- a) ¿Existe algún valor de x para el cual los sucesos sean independientes? **(1 pt)**
- b) ¿Para qué valor de x se tiene que la probabilidad de $A \cap B$ es máxima? **(1 pt)**

Problema A2. — El Instituto Nacional de Estadística (INE) dispone de estos datos, para 2023, sobre la cantidad de habitantes en España por nacionalidad y sexo:

	Espanoles	Extranjeros
Hombres	20.6 millones	3.0 millones
Mujeres	21.2 millones	3.3 millones

- a) Escogiendo a un hombre al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea extranjero? **(1 pt)**
- b) Escogiendo dos habitantes al azar de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno sea extranjero? **(1 pt)**

Problema A3. — Supongamos que, cuando un cliente entra en una tienda de electrodomésticos, el tiempo que pasa dentro viene dado por una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media poblacional $\mu = 15$ minutos y desviación típica $\sigma = 10$ minutos: $X \sim N(15, 10)$.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente esté dentro de la tienda 25 minutos o menos? **(1 pt)**
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente esté dentro de la tienda entre 5 y 25 minutos? **(1 pt)**

Parte B. Escoja sólo un problema de esta parte (total 3 pt).**Problema B1.** — En una fábrica textil fabricamos vestidos, camisetas y faldas.– Cada vestido requiere 5 m² de tejido y 5 botones.– Cada camiseta requiere 4 m² de tejido y 3 botones.– Cada falda requiere 4 m² de tejido y ningún botón.a) Si queremos fabricar 10 vestidos, 15 camisetas y 20 faldas, ¿cuántos m² de tejido y cuántos botones necesitamos? **(0.5 pt)**

b) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix}$$

(1.5 pt)c) Si disponemos de 100 m² de tejido y 120 botones, ¿podemos utilizar completamente los recursos fabricando productos? **(1 pt)****Problema B2.** — Considera las matrices cuadradas A, B, M y N de tamaño 3×3.a) Calcula todos los valores de x tales que A² = A, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(1 pt)b) Encuentre una matriz B invertible, tal que B² = B. **(1 pt)**c) Dadas dos matrices M y N invertibles tales que M² = M y N² = N, construimos la matriz siguiente: C = N · M · N⁻¹. ¿Es cierto que C² = C? **(1 pt)****Parte C.** Escoja sólo un problema de esta parte (total 3 pt).**Problema C1.** — Restringidos al dominio [0, 20], considera las tres funciones siguientes:

$$f(x) = x(10 - x), \quad g(x) = 125 - 20x, \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 15 \\ g(x) & \text{si } 15 < x \leq 20 \end{cases}$$

a) ¿Para qué x se tiene que f(x) = g(x)? ¿Para qué x se tiene que f'(x) = g'(x)? **(1 pt)**b) Estudia la continuidad de la función f(x). **(1 pt)**c) ¿Es la función h(x) derivable? ¿En qué intervalos es creciente? **(1 pt)****Problema C2.** — Considera la función f(x) = 10^x + x¹⁰, para x ∈ (0, +∞).a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. **(1 pt)**b) Calcula f'(x). **(1 pt)**c) Calcula justificadamente $\int_0^1 f'(x) dx$ **(1 pt)**



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla de la distribución normal $N(0, 1)$

SOLUCIONES

Problema A1 (obligatorio). — Dados dos sucesos, A y B , de un experimento aleatorio, sabemos que $P(A) = 0.5$, que $P(B) = 0.1$, y que $P(A/B) = x$, donde $x \in [0,1]$. Se pide:

- a) ¿Existe algún valor de x para el cual los sucesos sean independientes? **(1 pt)**
b) ¿Para qué valor de x se tiene que la probabilidad de $A \cap B$ es máxima? **(1 pt)**

a) Para que sean independientes debe cumplirse la igualdad $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Hallamos la probabilidad de la intersección.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow x = \frac{P(A \cap B)}{0.1} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.1x$$

Obtenemos cuando es posible la igualdad.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow 0.1x = 0.5 \cdot 0.1 \Rightarrow \boxed{x = 0.5}$$

Para $x = 0.5$ los sucesos A y B son independientes.

b) Hemos visto que $P(A \cap B) = \frac{x}{10}$. Esta probabilidad es mayor cuanto mayor sea $x \in [0,1]$,

por lo que para $x = 1$ la probabilidad toma el mayor valor posible: $P(A \cap B) = \frac{1}{10} = 0.1$.

Esta probabilidad es la misma que $P(B)$ y menor que $P(A)$. El suceso B está contenido en el suceso A . La intersección de los sucesos es la máxima posible.

Problema A2. —El Instituto Nacional de Estadística (INE) dispone de estos datos, para 2023, sobre la cantidad de habitantes en España por nacionalidad y sexo:

	Espanoles	Extranjeros
Hombres	20.6 millones	3.0 millones
Mujeres	21.2 millones	3.3 millones

- a) Escogiendo un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea extranjero? **(1 pt)**
 b) Escogiendo dos habitantes al azar de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno sea extranjero? **(1 pt)**

- a) Hay $3 + 3.3 + 20.6 + 21.2 = 48.1$ millones de habitantes en España y son $3 + 3.3 = 6.3$ millones los habitantes que son extranjeros.

Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al escoger un habitante al azar este sea extranjero vale $\frac{6.3}{48.1} = \frac{63}{481} \approx 0.131$.

- b) Es más fácil el cálculo de la probabilidad si consideramos el suceso contrario. Calculamos la probabilidad de que ninguno de los dos habitantes elegidos sea extranjero. Como las elecciones son independientes tenemos que la probabilidad pedida es el producto de la probabilidad de que el primero no sea extranjero por la probabilidad de que el segundo no sea extranjero.

$$(1 - 0.131)(1 - 0.131) = 1 + 0.131^2 - 2 \cdot 0.131$$

La probabilidad de que al menos uno sea extranjero vale:

$$1 - (1 + 0.131^2 - 2 \cdot 0.131) = 2 \cdot 0.131 - 0.131^2 = \boxed{0.244839}.$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Con el cálculo directo si al menos uno debe ser extranjero esto puede ocurrir siendo el 1º extranjero y el 2º español, siendo el 1º español y el 2º extranjero o bien siendo los dos extranjeros. La probabilidad de este suceso es la suma de las probabilidades de cada uno de los sucesos descritos.

$$\begin{aligned} &P(E_{x1} \cap E_{s2}) + P(E_{s1} \cap E_{x2}) + P(E_{x1} \cap E_{x2}) = \\ &= P(E_{x1}) \cdot P(E_{s2}) + P(E_{s1}) \cdot P(E_{x2}) + P(E_{x1}) \cdot P(E_{x2}) = \\ &= 0.131 \cdot (1 - 0.131) + (1 - 0.131) \cdot 0.131 + 0.131 \cdot 0.131 = \\ &= 0.131 - 0.131^2 + 0.131 - 0.131^2 + 0.131^2 = 2 \cdot 0.131 - 0.131^2 = \boxed{0.244839} \end{aligned}$$

Problema A3. — Supongamos que, cuando un cliente entra en una tienda de electrodomésticos, el tiempo que pasa dentro viene dado por una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media poblacional $\mu = 15$ minutos y desviación típica $\sigma = 10$ minutos: $X \sim N(15, 10)$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente esté dentro de la tienda 25 minutos o menos? (1 pt)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente esté dentro de la tienda entre 5 y 25 minutos? (1 pt)

a) Debemos calcular $P(X \leq 25)$.

$$P(X \leq 25) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \leq \frac{25-15}{10}\right) = P(Z \leq 1) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.8413}$$

		0	
0.0	0.5000	0.	
0.1	0.5398	0.	
0.2	0.5793	0.	
0.3	0.6179	0.	
0.4	0.6554	0.	
0.5	0.6915	0.	
0.6	0.7257	0.	
0.7	0.7580	0.	
0.8	0.7881	0.	
0.9	0.8159	0.	
1.0	0.8413	0.	

b) Debemos calcular $P(5 \leq X \leq 25)$.

$$\begin{aligned} P(5 \leq X \leq 25) &= \{Tipificamos\} = P\left(\frac{5-15}{10} \leq Z \leq \frac{25-15}{10}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = \\ &= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 1) = P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.8413 - 1 + 0.8413 = \boxed{0.6826} \end{aligned}$$

Problema B1. — En una fábrica textil fabricamos vestidos, camisetas y faldas.

- Cada vestido requiere 5 m² de tejido y 5 botones.
- Cada camiseta requiere 4 m² de tejido y 3 botones.
- Cada falda requiere 4 m² de tejido y ningún botón.

a) Si queremos fabricar 10 vestidos, 15 camisetas y 20 faldas, ¿cuántos m² de tejido y cuántos botones necesitamos? **(0.5 pt)**

b) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix}$$

(1.5 pt)

c) Si disponemos de 100 m² de tejido y 120 botones, ¿podemos utilizar completamente los recursos fabricando productos? **(1 pt)**

a) Lo calculamos usando el producto matricial.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 + 60 + 80 \\ 50 + 45 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 190 \\ 95 \end{pmatrix}$$

Hacen falta 190 m² de tejido y 95 botones.

b) Resolvemos el sistema.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 4y + 4z = 100 \\ 5x + 3y = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 4y + 4z = 100 \\ 5x = 120 - 3y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 120 - 3y + 4y + 4z = 100 \Rightarrow y = -20 - 4z \Rightarrow 5x = 120 - 3(-20 - 4z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x = 120 + 60 + 12z = 180 + 12z \Rightarrow x = \frac{180}{5} + \frac{12}{5}z \Rightarrow \begin{cases} x = 12 + \frac{12}{5}z \\ y = -20 - 4z, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = 12 + \frac{12}{5}\lambda \\ y = -20 - 4\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$.

c) La pregunta hace referencia a las soluciones del sistema anterior.

No es posible gastar lo indicado, pues el valor de λ debe ser un número natural ($z = \lambda =$ número de faldas) y al ser positivo tenemos que la incógnita “y” tiene un valor negativo y esto no es posible pues “y” es el número de camisetas que debe ser un número natural.

Problema B2. — Considera las matrices cuadradas A, B, M y N de tamaño 3×3 .

a) Calcula todos los valores de x tales que $A^2 = A$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(1 pt)

b) Encuentre una matriz B invertible, tal que $B^2 = B$.

(1 pt)

c) Dadas dos matrices M y N invertibles tales que $M^2 = M$ y $N^2 = N$, construimos la matriz siguiente: $C = N \cdot M \cdot N^{-1}$. ¿Es cierto que $C^2 = C$?

(1 pt)

a) Hallamos la expresión de la matriz A^2 .

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49+9x-24 & 7x+x^2+8 & 28+6x-12 \\ 63+9x-36 & 9x+x^2+12 & 36+6x-18 \\ -42+18+18 & -6x+2x-6 & -24+12+9 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 25+9x & 7x+x^2+8 & 16+6x \\ 27+9x & 9x+x^2+12 & 18+6x \\ -6 & -4x-6 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Averiguamos cuando se cumple $A^2 = A$.

$$A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 25+9x & 7x+x^2+8 & 16+6x \\ 27+9x & 9x+x^2+12 & 18+6x \\ -6 & -4x-6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 25+9x=7 \\ x^2+7x+8=x \\ 16+6x=4 \\ 27+9x=9 \\ x^2+9x+12=x \\ 6x+18=6 \\ -4x-6=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x=-18 \\ x^2+6x+8=0 \\ 6x=-12 \\ 9x=-18 \\ x^2+8x+12=0 \\ 6x=-12 \\ -4x=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=-2} \\ x^2+6x+8=0 \\ x=-2 \\ x=-2 \\ x^2+8x+12=0 \\ x=-2 \\ x=-2 \end{cases}$$

Comprobamos que $x = -2$ es solución de las dos ecuaciones de segundo grado.

$$(-2)^2 + 6(-2) + 8 = 4 - 12 + 8 = 0$$

$$(-2)^2 + 8(-2) + 12 = 4 - 16 + 12 = 0$$

Las dos igualdades se cumplen. Para $x = -2$ se cumple la igualdad $A^2 = A$,

b) Para $x = -2$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 9 & -2 & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Esta matriz cumple la igualdad $A^2 = A$.

Comprobamos si esta matriz es invertible. Para ello vemos si su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 9 & -2 & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 42 + 72 + 72 - 48 - 54 - 84 = 0$$

Esta matriz A no es invertible.

Consideramos la matriz identidad de orden 3: $B = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz I_3 es invertible, su inversa es la misma matriz y además $B^2 = I_3 \cdot I_3 = I_3 = B$.

c) Hallamos la expresión de C^2 en función de M y N.

$$\begin{aligned} C^2 &= (N \cdot M \cdot N^{-1})(N \cdot M \cdot N^{-1}) = N \cdot M \cdot N^{-1} \cdot N \cdot M \cdot N^{-1} = N \cdot M \cdot I \cdot M \cdot N^{-1} = \\ &= N \cdot M \cdot M \cdot N^{-1} = N \cdot M^2 \cdot N^{-1} = \{M^2 = M\} = N \cdot M \cdot N^{-1} = C \end{aligned}$$

Es cierto que $C^2 = C$.

Problema C1. — Restringidos al dominio $[0, 20]$, considera las tres funciones siguientes:

$$f(x) = x(10 - x), \quad g(x) = 125 - 20x, \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 15 \\ g(x) & \text{si } 15 < x \leq 20 \end{cases}$$

a) ¿Para qué x se tiene que $f(x) = g(x)$? ¿Para qué x se tiene que $f'(x) = g'(x)$? **(1 pt)**

b) Estudia la continuidad de la función $f(x)$. **(1 pt)**

c) ¿Es la función $h(x)$ derivable? ¿En qué intervalos es creciente? **(1 pt)**

a) Averiguamos cuando $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x(10 - x) = 125 - 20x \Rightarrow 10x - x^2 = 125 - 20x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 + 30x - 125 = 0 \Rightarrow x = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4(-1)(-125)}}{2(-1)} = \frac{-30 \pm 20}{-2} = \begin{cases} \frac{-30 + 20}{-2} = 5 \\ \frac{-30 - 20}{-2} = 25 \end{cases}$$

La igualdad $f(x) = g(x)$ se cumple para $x = 5$ y $x = 25$.

Obtenemos las derivadas de ambas funciones y averiguamos cuando son iguales.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x(10 - x) = 10x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 10 - 2x \\ g(x) &= 125 - 20x \Rightarrow g'(x) = -20 \\ f'(x) &= g'(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 10 - 2x = -20 \Rightarrow 30 = 2x \Rightarrow \boxed{x = 15}$$

La igualdad $f'(x) = g'(x)$ se cumple para $x = 15$.

b) La función es continua en $[0, 15) \cup (15, 20]$ pues tiene expresiones polinómicas en cada uno de los intervalos. Hemos visto que $f(x) = g(x)$ solo para $x = 5$ y $x = 25$, por lo que para $x = 15$ no son iguales y la función no es continua en $x = 15$.

La función $h(x)$ es continua en $[0, 15) \cup (15, 20]$.

c) La función es derivable en $[0, 15) \cup (15, 20]$ pues tiene expresiones polinómicas en cada uno de los intervalos. La función no es derivable en $x = 15$, pues no es continua en este valor.

$$\text{La función tiene la expresión } h(x) = \begin{cases} 10x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 15 \\ 125 - 20x & \text{si } 15 < x \leq 20 \end{cases}.$$

$$\text{Su derivada tiene la expresión } h'(x) = \begin{cases} 10 - 2x & \text{si } 0 \leq x < 15 \\ -20 & \text{si } 15 < x \leq 20 \end{cases}.$$

En el intervalo $(15, 20]$ la derivada es $h'(x) = -20 < 0$ y la función es decreciente en este intervalo.

En el intervalo $[0, 15)$ la derivada es $h'(x) = 10 - 2x$. La derivada se anula para $x = 5$.

Siendo la derivada positiva para $0 \leq x < 5$ y negativa para $5 < x < 15$.

La función $h(x)$ es creciente únicamente en el intervalo $[0, 5)$.

Problema C2. — Considera la función $f(x) = 10^x + x^{10}$, para $x \in (0, +\infty)$.

a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (1 pt)

b) Calcula $f'(x)$. (1 pt)

c) Calcula justificadamente $\int_0^1 f'(x) dx$ (1 pt)

a) Calculamos los límites pedidos.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 10^x + x^{10} = 10^0 + 0^{10} = 1 + 0 = \boxed{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 10^x + x^{10} = 10^{+\infty} + (+\infty)^{10} = +\infty + \infty = \boxed{+\infty}$$

b) Calculamos la derivada de la función.

$$f(x) = 10^x + x^{10} \Rightarrow f'(x) = 10^x \cdot \ln 10 + 10x^9$$

c) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int f'(x) dx = f(x) + K$$

Lo aplicamos al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_0^1 f'(x) dx = \left[f(x) \right]_0^1 = f(1) - f(0) = 10^1 + 1^{10} - (10^0 + 0^{10}) = 10 + 1 - 1 = \boxed{10}$$