



## PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

PAU

CURSO 2024–2025

|                                                   |            |
|---------------------------------------------------|------------|
| <b>MATERIA: Matemáticas Aplicadas a las CC SS</b> | <b>(4)</b> |
|---------------------------------------------------|------------|

|                      |
|----------------------|
| <b>Convocatoria:</b> |
|----------------------|

**Instrucciones:** La pregunta 1 es obligatoria. Se deberá además resolver un máximo de 3 preguntas eligiendo UNA entre 2A y 2B, UNA entre 3A y 3B y UNA entre 4A y 4B.

1. Se quiere estimar el sueldo medio de los trabajadores de cierto sector. Para ello se selecciona una muestra de 625 trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 €. Suponiendo que el sueldo de un trabajador es una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica  $\sigma$  igual a 250 €:

- Hallar el intervalo de confianza del 95% para el sueldo medio de un trabajador. **(1 punto)**
- Si se quiere que el error máximo de la estimación del sueldo medio de un trabajador sea de 15 €, con una confianza del 98%, determinar el tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir. **(1 punto)**
- Si se considera el valor 1480 como sueldo medio poblacional, y se eligen al azar y de manera independiente dos trabajadores del sector, ¿cuál es la probabilidad de que cada uno de ellos gane más de 1500 €? **(0,5 puntos)**

2A. En un estudio sobre el país de origen de los cruceristas que visitan las Islas Canarias se ha seleccionado una muestra aleatoria de 196 cruceristas, de los cuales 34 procedían de Alemania.

- Determinar un intervalo de confianza al 98% para la proporción de cruceristas procedentes de Alemania. **(0,75 puntos)**
- Si se deseara estimar dicha proporción con un margen de error del 2% y una confianza del 95% ¿cuál debería ser el tamaño de la muestra? **(1 punto)**
- De los 196 cruceristas anteriores se selecciona al azar un grupo de 5 para una entrevista en la TV. ¿Cuál es la probabilidad de que en dicho grupo haya al menos un alemán? **(0,75 puntos)**

2B. Determinados productos envasados de larga duración se transportan cada semana, entre dos ciudades españolas, por carretera (el 42%), por tren (el 47%) y por avión (el resto). Por causas diversas, las entregas en destino sufren retraso en el 10%, el 5% y el 7% de los envíos, respectivamente.

- Dibujar el correspondiente árbol de probabilidades. **(0,5 puntos)**
- Hallar la probabilidad de que, en una determinada semana, los envíos se entreguen en destino sin retrasos. **(1 punto)**
- Sabiendo que se ha producido retraso en la entrega en destino, ¿cuál es la probabilidad de que el envío se haya realizado por tren? **(1 punto)**

3A. Una empresa canaria ha decidido comercializar una bebida refrescante con zumo de aloe vera ecológico. El número de bebidas vendidas (en miles de unidades), durante los primeros seis meses tras el lanzamiento, viene dado por la función:

$$A(t) = \begin{cases} 12 - t(t-2), & 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{5t+12}{3}, & 3 < t \leq 6 \end{cases}$$

donde  $t$  es el tiempo transcurrido en meses.

- Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función durante los 6 primeros meses tras el lanzamiento de la bebida. **(1 punto)**

- (b) Estudiar, usando las derivadas, el crecimiento y decrecimiento de la función. ¿Cuáles fueron los valores mínimo y máximo de unidades vendidas y en qué meses se produjeron dichos valores? **(1 punto)**
- (c) Dibujar la gráfica de la función  $A(t)$ . A la vista de la información proporcionada por la función  $A(t)$ , y considerando que el incremento de ventas solo se consigue mediante campañas publicitarias, ¿crees que la empresa contrató servicios de publicidad previos al lanzamiento? ¿En algún momento tuvo que realizar un refuerzo de la campaña publicitaria? **(0,5 puntos)**

**3B.** El ayuntamiento de una ciudad está renovando un parque y va a construir un lago artificial con forma curva, delimitado por un sendero recto. El parque tiene forma rectangular y sus dimensiones (en metros) van de 0 a 50 en el eje  $x$  y de 0 a 90 en el eje  $y$ . La silueta del lago sigue la función

$$y = \frac{-2}{10}x^2 + 11x - 70 \text{ (metros), y se sitúa al norte del sendero, definido por la recta } y = x + 10$$

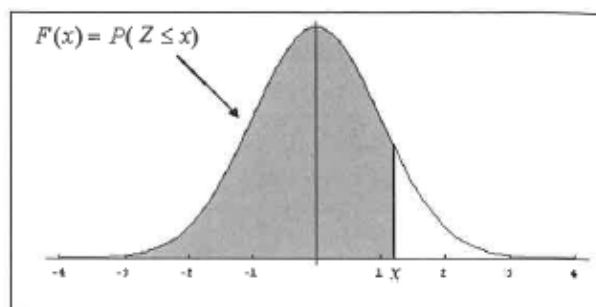
- a) Representar el parque después de que esté terminada su renovación. **(0,75 puntos)**
- b) Calcular la superficie del lago. **(1 punto)**
- c) La superficie del parque situada al norte del sendero se va a plantar con flores y la situada al sur con césped. Calcular el coste de renovación del parque si el coste de construcción del lago supone 1000 €/m<sup>2</sup>, la zona de flores 180 €/m<sup>2</sup> y la zona de césped 110 €/m<sup>2</sup>. **(0,75 puntos)**

**4A.** Un taller especializado repara aparatos eléctricos de dos tipos, A y B. La reparación de cada aparato tipo A precisa de la sustitución de 3 componentes electrónicas y requiere 4 horas de trabajo. La reparación de cada aparato tipo B precisa de la sustitución de 5 componentes electrónicas y requiere 6 horas de trabajo. Si el taller dispone de 480 componentes electrónicas y de 600 horas de trabajo, y los beneficios que se obtienen por cada aparato A y B reparado son, respectivamente 80 y 130 euros

- a) Formular el correspondiente problema de programación lineal **(1 punto)**.
- b) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. **(0,75 puntos)**
- c) ¿Cuántos aparatos de cada tipo se deben reparar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio? **(0,75 puntos)**

**4B.** En la cafetería “Desayuna como un mencey” ofrecen desayunos ecológicos y saludables, compuestos por batidos de frutas, yogur con cereales y tortitas. Tres amigos han ido en tres ocasiones a desayunar. El primer día decidieron probar entre los tres dos batidos, una tortita y un yogur con cereales, pagando un total de 12,25 euros. Otro día aprovecharon que las tortitas tenían un descuento del 20% y pidieron 3, acompañándolas con dos batidos, pagando un total de 13,90 euros. Ayer descubrieron que si pedían 3 batidos y 3 yogures con cereales pagarían un euro menos que si pedían 2 batidos, 2 yogures y 2 tortitas.

- a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. **(1,5 puntos)**
- b) ¿Qué precio tienen los batidos, yogures y las tortitas en esta cafetería? **(1 punto)**



|     | 0      | 0,01   | 0,02   | 0,03   | 0,04   | 0,05   | 0,06   | 0,07   | 0,08   | 0,09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0   | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1   | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2   | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3   | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |
| 3,5 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |
| 3,6 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,7 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,8 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,9 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

## SOLUCIONES

1. Se quiere estimar el sueldo medio de los trabajadores de cierto sector. Para ello se selecciona una muestra de 625 trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 €. Suponiendo que el sueldo de un trabajador es una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica  $\sigma$  igual a 250 €:

- Hallar el intervalo de confianza del 95% para el sueldo medio de un trabajador. **(1 punto)**
- Si se quiere que el error máximo de la estimación del sueldo medio de un trabajador sea de 15 €, con una confianza del 98%, determinar el tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir. **(1 punto)**
- Si se considera el valor 1480 como sueldo medio poblacional, y se eligen al azar y de manera independiente dos trabajadores del sector, ¿cuál es la probabilidad de que cada uno de ellos gane más de 1500 €? **(0,5 puntos)**

$X$  = el sueldo medio de los trabajadores de cierto sector.  $X = N(\mu, 250)$ .

a) La muestra es de tamaño  $n = 625$  trabajadores. La media muestral es  $\bar{x} = 1480$  €

Con un nivel de confianza del 95 % calculamos  $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



|     | 0      | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0   | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 |
| 0.1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 |
| 0.2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 |
| 0.3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 |
| 0.4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 |
| 0.5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 |
| 0.6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 |
| 0.7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 |
| 0.8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 |
| 0.9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 |
| 1   | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 |
| 1.1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 |
| 1.2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 |
| 1.3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 |
| 1.4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 |
| 1.5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 |
| 1.6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 |
| 1.7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 |
| 1.8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 |
| 1.9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 |

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{250}{\sqrt{625}} = 19.6 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{y} - Error, \bar{y} + Error) = (1480 - 19.6, 1480 + 19.6) = (1460.4, 1499.6)$$

b) Con un nivel de confianza del 98 % calculamos  $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.32 + 2.33}{2} = 2.325$$



|     | 0      | 0.01   | 0.02   | 0.03   |
|-----|--------|--------|--------|--------|
| 0   | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 |
| 1   | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 |
| 2   | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 |
| 2,3 | 0,9898 | 0,9900 | 0,9901 | 0,9902 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9923 |

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} < 15 \Rightarrow 2.325 \cdot 250 < 15\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{581.25}{15} < \sqrt{n} \Rightarrow n > \left( \frac{581.25}{15} \right)^2 \Rightarrow \boxed{n > 1501.5625}$$

El tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir es de 1502 trabajadores.

- c)  $X$  = el sueldo medio de los trabajadores de cierto sector.  $X = N(1480, 250)$ .  
Calculamos  $P(X \geq 1500)$ .

$$P(X \geq 1500) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{1500 - 1480}{250}\right) = P(Z \geq 0.08) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.08) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.5319 = \boxed{0.4681}$$

|     | 0      | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0   | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5238 | 0,5277 | 0,5319 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 |

La probabilidad de que un trabajador gane más de 1500 € es de 0.4681. Si se eligen al azar y de manera independiente dos trabajadores del sector la probabilidad de que cada uno de ellos gane más de 1500 € vale  $0.4681 \cdot 0.4681 = 0.2191$ .

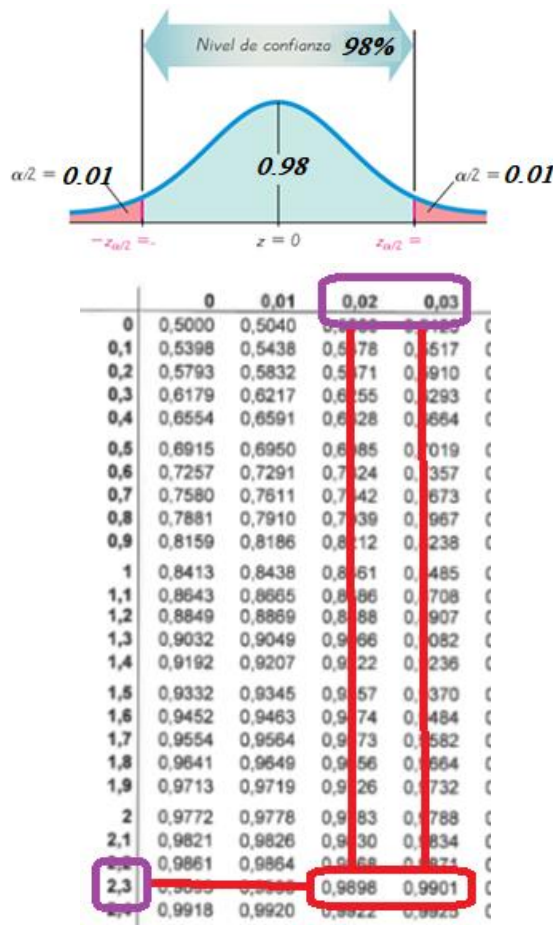
- 2A.** En un estudio sobre el país de origen de los cruceristas que visitan las Islas Canarias se ha seleccionado una muestra aleatoria de 196 cruceristas, de los cuales 34 procedían de Alemania.
- Determinar un intervalo de confianza al 98% para la proporción de cruceristas procedentes de Alemania. **(0,75 puntos)**
  - Si se deseara estimar dicha proporción con un margen de error del 2% y una confianza del 95% ¿cuál debería ser el tamaño de la muestra? **(1 punto)**
  - De los 196 cruceristas anteriores se selecciona al azar un grupo de 5 para una entrevista en la TV. ¿Cuál es la probabilidad de que en dicho grupo haya al menos un alemán? **(0,75 puntos)**

a) La proporción muestral de los cruceristas alemanes que visitan las Islas Canarias es

$$p = \frac{34}{196} = \frac{17}{98} \approx 0.1735.$$

Con un nivel de confianza del 98 % calculamos  $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.32 + 2.33}{2} = 2.325$$



Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 2.325 \cdot \sqrt{\frac{17 \cdot \frac{98-17}{98}}{196}} \approx 0.0629$$

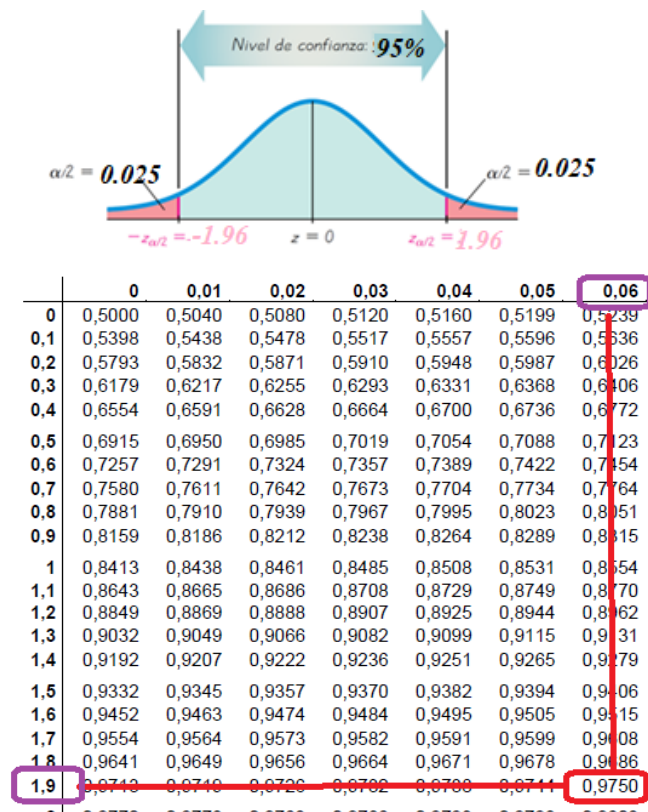
El error máximo en la estimación sería de 0.0629.

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.1735 - 0.0629, 0.1735 + 0.0629) = (0.1106, 0.2364)$$

b) Con un nivel de confianza del 95 % calculamos  $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



Utilizamos la fórmula del error para despejar “n” siendo el error de 0.02.

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \Rightarrow 0.02 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{17}{98} \cdot \frac{81}{98}}{n}} \Rightarrow \frac{0.02}{1.96} = \sqrt{\frac{\frac{17}{98} \cdot \frac{81}{98}}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2 = \frac{\frac{17}{98} \cdot \frac{81}{98}}{n} \Rightarrow n = \frac{\frac{17}{98} \cdot \frac{81}{98}}{\left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2} = 1377 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 1377 cruceristas.

c) Llamamos  $X$  = Número de cruceristas alemanes de un grupo de 5. Esta variable es una binomial de parámetros  $n = 5$  y  $p = \frac{17}{98}$ .  $X = B\left(5, \frac{17}{98}\right)$

Debemos calcular  $P(X \geq 1)$ .

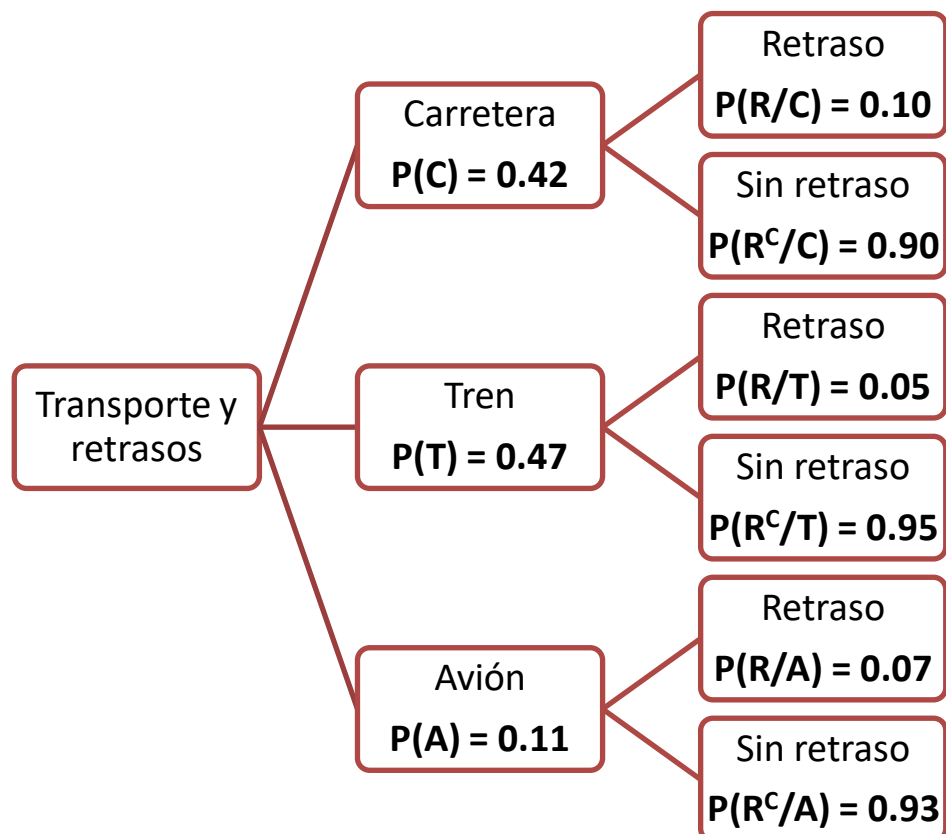
$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \left(\frac{17}{98}\right)^0 \cdot \left(\frac{81}{98}\right)^5 = 1 - \left(\frac{81}{98}\right)^5 = 0.5724$$

La probabilidad de que en un grupo de 5 cruceristas haya al menos un alemán es de 0.5724.

**2B.** Determinados productos envasados de larga duración se transportan cada semana, entre dos ciudades españolas, por carretera (el 42%), por tren (el 47%) y por avión (el resto). Por causas diversas, las entregas en destino sufren retraso en el 10%, el 5% y el 7% de los envíos, respectivamente.

- Dibujar el correspondiente árbol de probabilidades. **(0,5 puntos)**
- Hallar la probabilidad de que, en una determinada semana, los envíos se entreguen en destino sin retrasos. **(1 punto)**
- Sabiendo que se ha producido retraso en la entrega en destino, ¿cuál es la probabilidad de que el envío se haya realizado por tren? **(1 punto)**

a) Llamamos C a “el producto llega por carretera”, T a “el producto llega en tren”, A a “el producto llega en avión” y R a “el producto llega con retraso”. Realizamos un diagrama de árbol.



b) Nos piden calcular  $P(R^C)$ . Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(R^C) &= P(C)P(R^C/C) + P(T)P(R^C/T) + P(A)P(R^C/A) = \\
 &= 0.42 \cdot 0.9 + 0.47 \cdot 0.95 + 0.11 \cdot 0.93 = \boxed{0.9268}
 \end{aligned}$$

c) Nos piden calcular  $P(T/R)$ . Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(T/R) = \frac{P(T \cap R)}{P(R)} = \frac{P(T)P(R/T)}{1 - P(R^C)} = \frac{0.47 \cdot 0.05}{1 - 0.9268} = \boxed{\frac{235}{732} = 0.321}$$

**3A.** Una empresa canaria ha decidido comercializar una bebida refrescante con zumo de aloe vera ecológico. El número de bebidas vendidas (en miles de unidades), durante los primeros seis meses tras el lanzamiento, viene dado por la función:

$$A(t) = \begin{cases} 12 - t(t-2), & 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{5t+12}{3}, & 3 < t \leq 6 \end{cases}$$

donde  $t$  es el tiempo transcurrido en meses.

- (a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función durante los 6 primeros meses tras el lanzamiento de la bebida. **(1 punto)**
- (b) Estudiar, usando las derivadas, el crecimiento y decrecimiento de la función. ¿Cuáles fueron los valores mínimo y máximo de unidades vendidas y en qué meses se produjeron dichos valores? **(1 punto)**
- (c) Dibujar la gráfica de la función  $A(t)$ . A la vista de la información proporcionada por la función  $A(t)$ , y considerando que el incremento de ventas solo se consigue mediante campañas publicitarias, ¿crees que la empresa contrató servicios de publicidad previos al lanzamiento? ¿En algún momento tuvo que realizar un refuerzo de la campaña publicitaria? **(0,5 puntos)**

a) En el intervalo  $[0,3)$  la función tiene la expresión  $A(t) = 12 - t(t-2) = 12 - t^2 + 2t$ , que es una función polinómica y por tanto es continua y derivable.

En el intervalo  $(3,6]$  la función tiene la expresión  $A(t) = \frac{5t+12}{3} = \frac{5}{3}t + 4$ , que es una función polinómica y por tanto es continua y derivable.

Estudiamos la continuidad en  $t = 3$ .

$$\left. \begin{aligned} A(3) &= 12 - 3(3-2) = 9 \\ \lim_{t \rightarrow 3^+} A(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^+} \frac{5t+12}{3} = \frac{15+12}{3} = 9 \\ \lim_{t \rightarrow 3^-} A(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^-} 12 - t(t-2) = 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 3^+} A(t) = \lim_{t \rightarrow 3^-} A(t) = A(3) = 9$$

La función es continua en  $t = 3$ . La función es continua en  $[0,6]$ .

La derivada de la función en  $[0,3) \cup (3,6]$  es  $A'(t) = \begin{cases} -2t + 2, & 0 \leq t < 3 \\ \frac{5}{3}, & 3 < t \leq 6 \end{cases}$ .

Comprobamos si la función es derivable en  $t = 3$  viendo si coinciden las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} A'(3^-) &= \lim_{t \rightarrow 3^-} A'(t) = \lim_{t \rightarrow 3^-} -2t + 2 = -2 \cdot 3 + 2 = -4 \\ A'(3^+) &= \lim_{t \rightarrow 3^+} A'(t) = \lim_{t \rightarrow 3^+} \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A'(3^-) = -4 \neq \frac{5}{3} = A'(3^+)$$

La función no es derivable en  $t = 3$ . La función es derivable en  $[0,3) \cup (3,6]$ .

b) La derivada de la función es  $A'(t) = \begin{cases} -2t + 2, & 0 \leq t < 3 \\ \frac{5}{3}, & 3 < t \leq 6 \end{cases}$ . Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

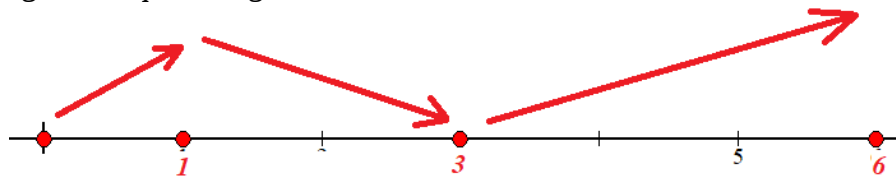
$$A'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2t + 2 = 0 \rightarrow -2t = -2 \rightarrow \boxed{t=1} \in [0,3) \\ \frac{5}{3} = 0 \rightarrow \text{Imposible} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de  $t=1$  y  $t=3$ .

- En el intervalo  $[0,1)$  consideramos  $t=0.5$  y la derivada vale  $A'(0.5) = -2 \cdot 0.5 + 2 = 1 > 0$ . La función crece en  $[0,1)$ .
- En el intervalo  $(1,3)$  consideramos  $t=2$  y la derivada vale  $A'(2) = -2 \cdot 2 + 2 = -2 < 0$ . La función decrece en  $(1,3)$ .
- En el intervalo  $(3,6)$  la derivada es  $A'(t) = \frac{5}{3} > 0$ . La función crece en  $(3,6)$ .

La función crece en  $[0,2) \cup (3,6]$  y decrece en  $(1,3)$ .

La función sigue el esquema siguiente.



La función alcanza un máximo relativo en  $t=1$  y un mínimo relativo en  $t=3$ .

Estos son máximo y mínimo relativos, faltaría compararlo con los valores de la función en los extremos del intervalo para determinar si son máximo o/y mínimo absoluto.

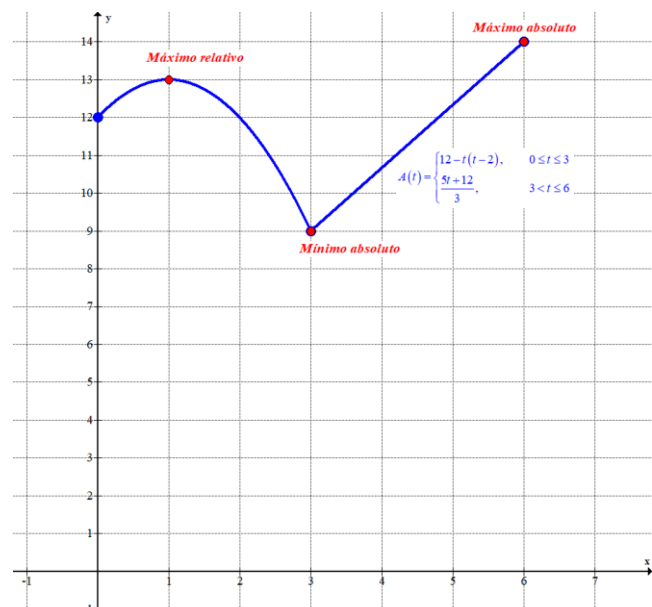
$$\left. \begin{aligned} A(0) &= 12 - 0(0-2) = 12 \\ A(1) &= 12 - 1(1-2) = 13 \\ A(3) &= 9 \text{ Mínimo} \\ A(6) &= \frac{5 \cdot 6 + 12}{3} = 14 \text{ Máximo} \end{aligned} \right\}$$

El valor mínimo de unidades vendidas se produce a los 3 meses y es de 9000 unidades.

El valor máximo de unidades vendidas se produce a los 6 meses y es de 14000 unidades.

- c) Representamos la gráfica de la función usando todos los datos obtenidos.

A la vista de la gráfica las ventas crecieron durante el primer mes, lo que indica que se hizo una campaña de publicidad previa al lanzamiento. Como las ventas bajaron en los siguientes meses tuvo que realizar un refuerzo para que las ventas volvieran a crecer a partir del tercer mes.



**3B.** El ayuntamiento de una ciudad está renovando un parque y va a construir un lago artificial con forma curva, delimitado por un sendero recto. El parque tiene forma rectangular y sus dimensiones (en metros) van de 0 a 50 en el eje  $x$  y de 0 a 90 en el eje  $y$ . La silueta del lago sigue la función  $y = \frac{-2}{10}x^2 + 11x - 70$  (metros), y se sitúa al norte del sendero, definido por la recta  $y = x + 10$

- a) Representar el parque después de que esté terminada su renovación. **(0,75 puntos)**  
 b) Calcular la superficie del lago. **(1 punto)**  
 c) La superficie del parque situada al norte del sendero se va a plantar con flores y la situada al sur con césped. Calcular el coste de renovación del parque si el coste de construcción del lago supone 1000 €/m<sup>2</sup>, la zona de flores 180 €/m<sup>2</sup> y la zona de césped 110 €/m<sup>2</sup>. **(0,75 puntos)**

a) Debemos representar la gráfica de una parábola y de una recta. Hallamos los puntos de corte de sus gráficas.

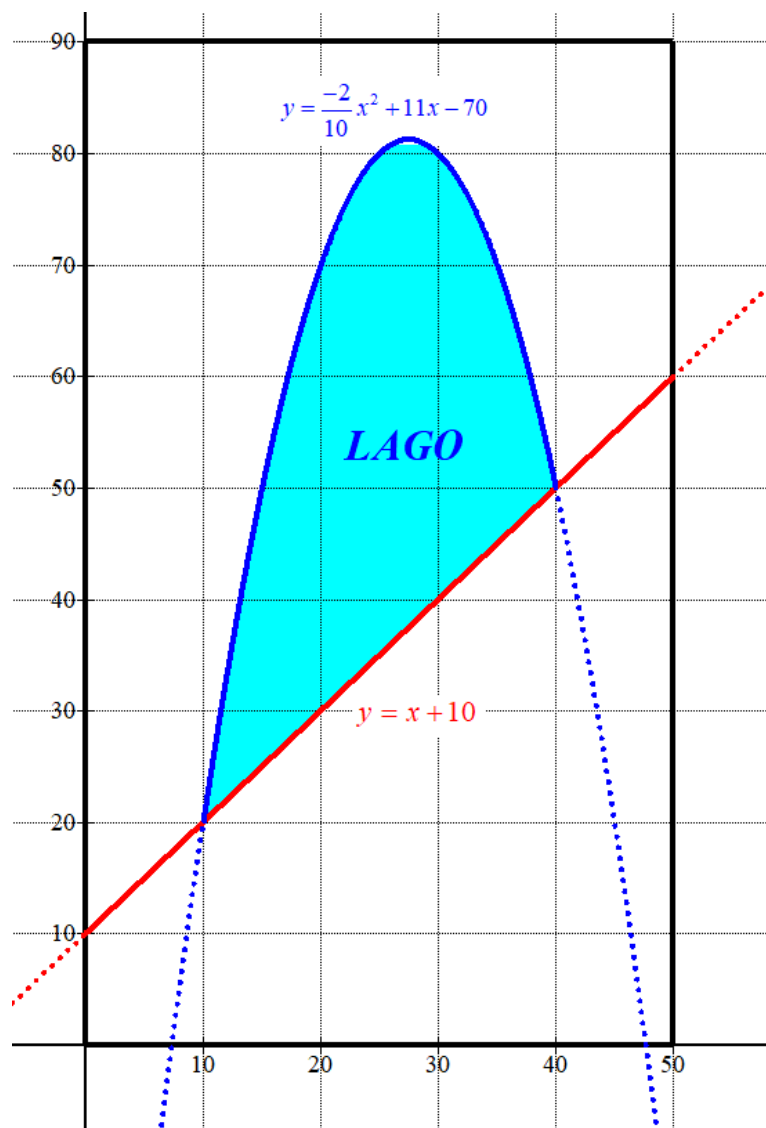
$$\frac{-2}{10}x^2 + 11x - 70 = x + 10 \Rightarrow \frac{-1}{5}x^2 + 10x - 80 = 0 \Rightarrow x^2 - 50x + 400 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{50 \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \cdot 400}}{2} = \frac{50 \pm 30}{2} = \begin{cases} \frac{50 + 30}{2} = 40 = x \\ \frac{50 - 30}{2} = 10 = x \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos el recinto del jardín.

| $x$ | $y = x + 10$ |
|-----|--------------|
| 0   | 10           |
| 10  | 20           |
| 40  | 50           |
| 50  | 60           |

| $x$ | $y = \frac{-2}{10}x^2 + 11x - 70$ |
|-----|-----------------------------------|
| 0   | -70                               |
| 10  | 20                                |
| 40  | 50                                |
| 50  | -20                               |

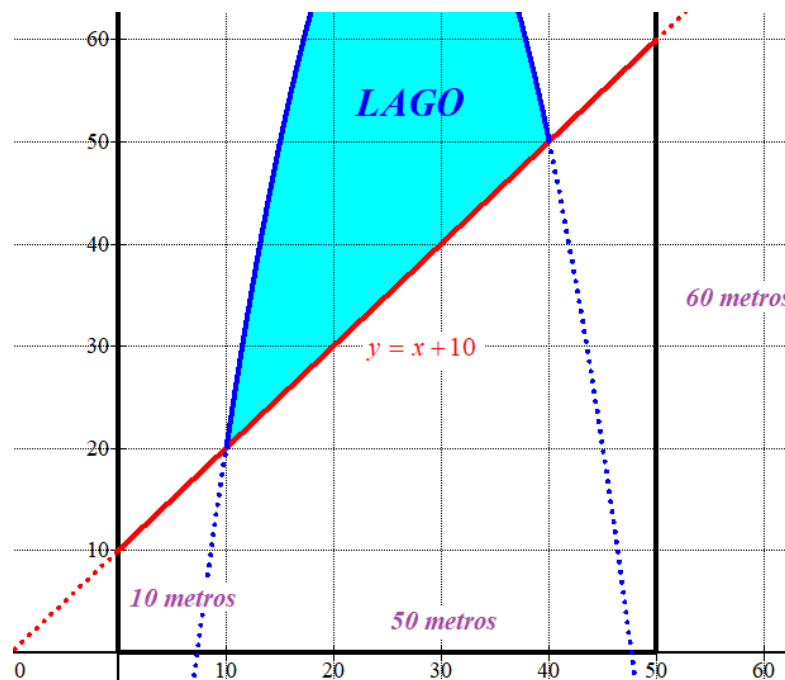


- b) Hallamos la superficie del lago calculando la integral definida entre 10 y 40 de la diferencia de las dos funciones.

$$\begin{aligned}
 \text{Superficie} &= \int_{10}^{40} \left( \frac{-1}{5}x^2 + 11x - 70 - (x + 10) \right) dx = \int_{10}^{40} \left( \frac{-1}{5}x^2 + 10x - 80 \right) dx = \\
 &= \left[ \frac{-x^3}{15} + 5x^2 - 80x \right]_{10}^{40} = \left[ \frac{-40^3}{15} + 5 \cdot 40^2 - 80 \cdot 40 \right] - \left[ \frac{-10^3}{15} + 5 \cdot 10^2 - 80 \cdot 10 \right] = \\
 &= \frac{-64000}{15} + 8000 - 3200 + \frac{1000}{15} - 500 + 800 = \boxed{900 \text{ m}^2}
 \end{aligned}$$

La zona dedicada al lago tiene una superficie de 900 metros cuadrados.

- c) El parque tiene forma rectangular y una superficie de  $90 \cdot 50 = 4500$  metros cuadrados. El sendero lo divide en dos partes. Calculamos la superficie de la parte inferior.



$$\text{Superficie} = \frac{60+10}{2} \cdot 50 = 1750 \text{ metros cuadrados.}$$

Esta parte del parque situada al sur del sendero se cubre con césped que cuesta a  $110 \text{ €/m}^2$ , lo que supone un coste de  $110 \cdot 1750 = 192500 \text{ €}$ .

El lago tiene una superficie de 900 metros cuadrados cuya construcción cuesta a  $1000 \text{ €/m}^2$ , lo que supone un coste de  $900 \cdot 1000 = 900000 \text{ €}$ .

La parte norte fuera del lago tiene una superficie de  $4500 - 900 - 1750 = 1850$  metros cuadrados. Esta zona la cubrimos con flores a un precio de  $180 \text{ €/m}^2$ , lo que supone un coste de  $180 \cdot 1850 = 333000 \text{ €}$ .

El coste total de la renovación es  $192500 + 900000 + 333000 = 1.425.500 \text{ €}$ .

**4A.** Un taller especializado repara aparatos eléctricos de dos tipos, A y B. La reparación de cada aparato tipo A precisa de la sustitución de 3 componentes electrónicas y requiere 4 horas de trabajo. La reparación de cada aparato tipo B precisa de la sustitución de 5 componentes electrónicas y requiere 6 horas de trabajo. Si el taller dispone de 480 componentes electrónicas y de 600 horas de trabajo, y los beneficios que se obtienen por cada aparato A y B reparado son, respectivamente 80 y 130 euros

- a) Formular el correspondiente problema de programación lineal **(1 punto)**.  
 b) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. **(0,75 puntos)**  
 c) ¿Cuántos aparatos de cada tipo se deben reparar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio? **(0,75 puntos)**

- a) Llamamos  $x$  = número de aparatos A que repara e  $y$  = número de aparatos B que repara. Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

|                          | Nº componentes | Horas de trabajo | Beneficios   |
|--------------------------|----------------|------------------|--------------|
| Nº de aparatos A ( $x$ ) | $3x$           | $4x$             | $80x$        |
| Nº de aparatos B ( $y$ ) | $5y$           | $6y$             | $130y$       |
| TOTAL                    | $3x + 5y$      | $4x + 6y$        | $80x + 130y$ |

La función que deseamos maximizar son los beneficios  $B(x, y) = 80x + 130y$  sometida a las restricciones siguientes.

Las cantidades deben ser positivas  $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

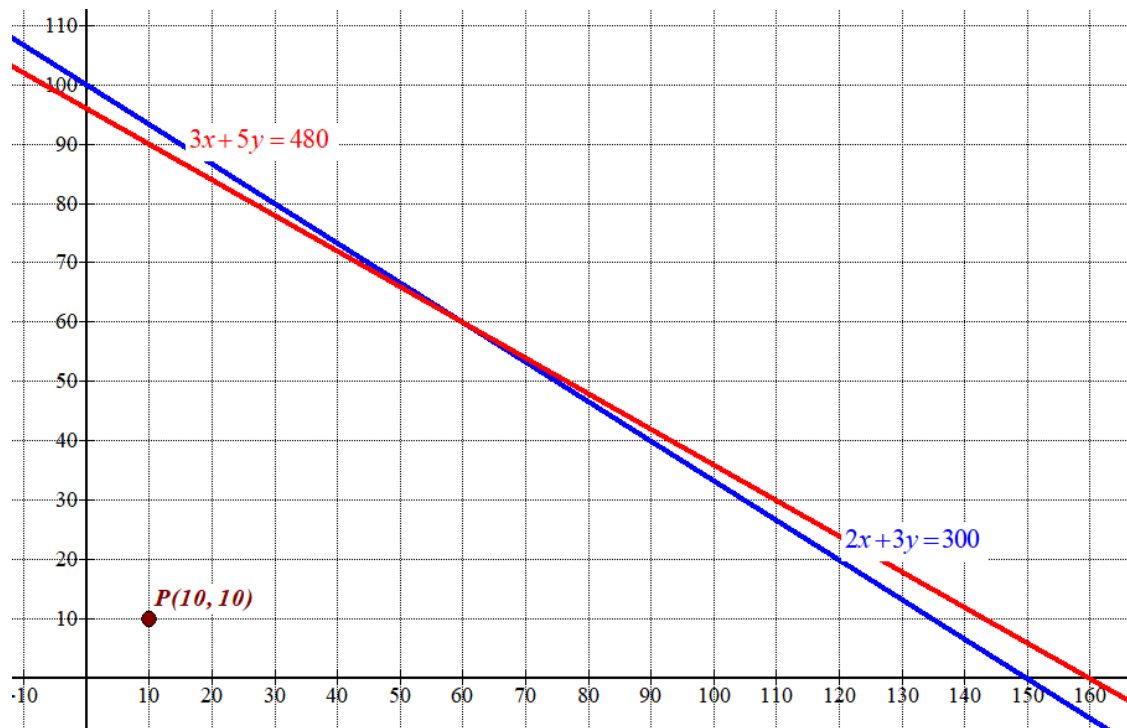
“El taller dispone de 480 componentes electrónicas y de 600 horas de trabajo”  $\rightarrow 3x + 5y \leq 480; 4x + 6y \leq 600$ .

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 5y \leq 480 \\ 4x + 6y \leq 600 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 5y \leq 480 \\ 2x + 3y \leq 300 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

| $3x + 5y = 480$ |                          | $2x + 3y = 300$ |                          | $x \geq 0; y \geq 0$ |
|-----------------|--------------------------|-----------------|--------------------------|----------------------|
| $x$             | $y = \frac{480 - 3x}{5}$ | $x$             | $y = \frac{300 - 2x}{3}$ |                      |
| 0               | 96                       | 0               | 100                      | Primer cuadrante     |
| 60              | 60                       | 60              | 60                       |                      |
| 160             | 0                        | 150             | 0                        |                      |



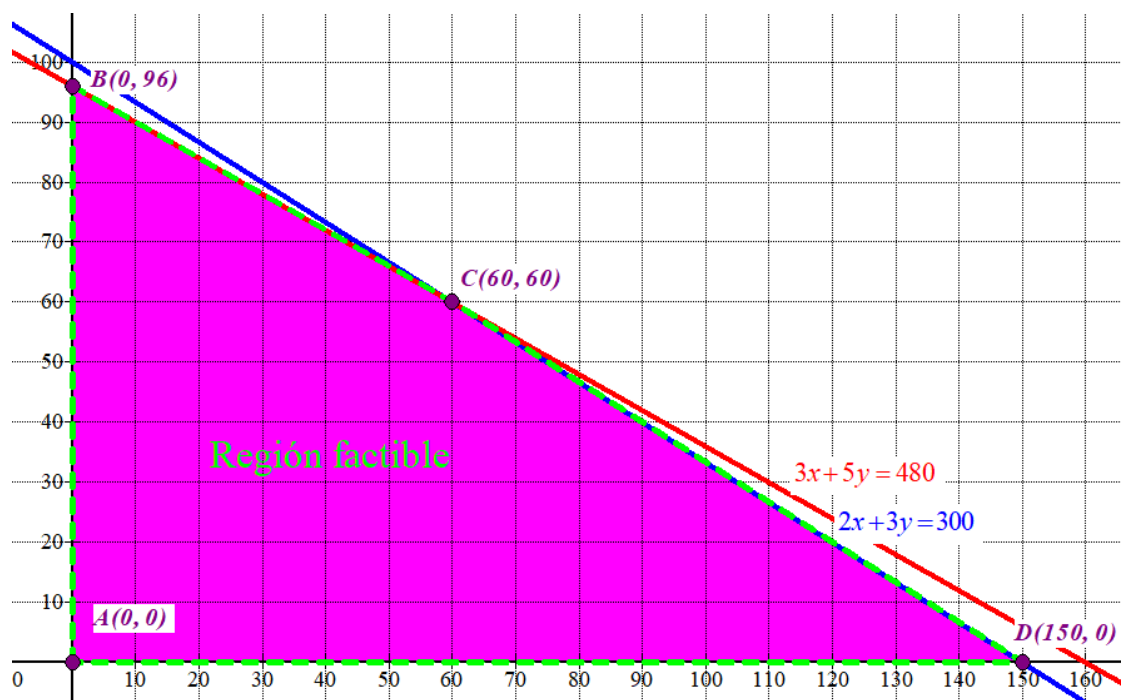
Como las restricciones son  $\left. \begin{array}{l} 3x + 5y \leq 480 \\ 2x + 3y \leq 300 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$  la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto  $P(10, 10)$  perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 30 + 50 \leq 480 \\ 20 + 30 \leq 300 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las restricciones. Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible tienen coordenadas A(0, 0), B(0, 96), C(60, 60) y D(150, 0). Las coordenadas del vértice C las obtenemos resolviendo el sistema siguiente.

$$\begin{array}{l} -2x \rightarrow 3x + 5y = 480 \\ 3x \rightarrow 2x + 3y = 300 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} -2x \rightarrow 3x + 5y = 480 \\ 3x \rightarrow 2x + 3y = 300 \end{array}} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -6x - 10y = -960 \\ 6x + 9y = 900 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} -6x - 10y = -960 \\ 6x + 9y = 900 \end{array}} \right\} \Rightarrow$$
$$\hline -y = -60 \Rightarrow y = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 300 = 480 \Rightarrow 3x = 180 \Rightarrow x = 60 \Rightarrow \boxed{C(60, 60)}$$

c) Valoramos la función beneficio  $B(x, y) = 80x + 130y$  en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 96) \rightarrow B(0, 96) = 80 \cdot 0 + 130 \cdot 96 = 12480$$

$$C(60, 60) \rightarrow B(60, 60) = 80 \cdot 60 + 130 \cdot 60 = 12600 \text{ Máximo}$$

$$D(150, 0) \rightarrow B(150, 0) = 80 \cdot 150 + 130 \cdot 0 = 12000$$

El máximo beneficio se consigue en el vértice C(60, 60).

El máximo beneficio que se puede conseguir es de 12600 euros con la reparación de 60 aparatos tipo A y otros 60 del tipo B.

**4B.** En la cafetería “Desayuna como un mencey” ofrecen desayunos ecológicos y saludables, compuestos por batidos de frutas, yogur con cereales y tortitas. Tres amigos han ido en tres ocasiones a desayunar. El primer día decidieron probar entre los tres dos batidos, una tortita y un yogur con cereales, pagando un total de 12,25 euros. Otro día aprovecharon que las tortitas tenían un descuento del 20% y pidieron 3, acompañándolas con dos batidos, pagando un total de 13,90 euros. Ayer descubrieron que si pedían 3 batidos y 3 yogures con cereales pagarían un euro menos que si pedían 2 batidos, 2 yogures y 2 tortitas.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. **(1,5 puntos)**

b) ¿Qué precio tienen los batidos, yogures y las tortitas en esta cafetería? **(1 punto)**

a) Llamamos “x” al precio de un batido de frutas, “y” al precio de un yogur con cereales y “z” al precio de una tortita.

“El primer día decidieron probar entre los tres dos batidos, una tortita y un yogur con cereales, pagando un total de 12,25 euros”  $\rightarrow 2x + y + z = 12.25$ .

“Otro día aprovecharon que las tortitas tenían un descuento del 20% (pagan el 80%) y pidieron 3, acompañándolas con dos batidos, pagando un total de 13,90 euros”  $\rightarrow 3 \cdot 0.8 \cdot z + 2x = 13.9$

“Ayer descubrieron que si pedían 3 batidos y 3 yogures con cereales pagarían un euro menos que si pedían 2 batidos, 2 yogures y 2 tortitas”  $\rightarrow 3x + 3y = 2x + 2y + 2z - 1$ .

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 12.25 \\ 3 \cdot 0.8 \cdot z + 2x = 13.9 \\ 3x + 3y = 2x + 2y + 2z - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 12.25 \\ 2.4z + 2x = 13.9 \\ y = -x + 2z - 1 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 12.25 \\ 2.4z + 2x = 13.9 \\ y = -x + 2z - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - x + 2z - 1 + z = 12.25 \\ 2.4z + 2x = 13.9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3z = 13.25 \\ 2.4z + 2x = 13.9 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 13.25 - 3z \\ 2.4z + 2x = 13.9 \end{array} \right\} \Rightarrow 2.4z + 2(13.25 - 3z) = 13.9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.4z + 26.5 - 6z = 13.9 \Rightarrow -3.6z = -12.6 \Rightarrow \boxed{z = \frac{12.6}{3.6} = 3.5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 13.25 - 3 \cdot 3.5 = 2.75} \Rightarrow \boxed{y = -2.75 + 2 \cdot 3.5 - 1 = 3.25}$$

Un batido de frutas cuesta 2.75 €, un yogur con cereales vale 3.25 € y por una tortita debemos pagar 3.5 €.