



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)
Curso Académico 2024/2025
**ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES**
Tiempo de realización: 1 HORA Y 30 MINUTOS

El examen consta de 4 ejercicios. La PARTE 1 consta de dos ejercicios, cada uno de los cuales se puntúa con 2 puntos: el primero de carácter competencial y obligatorio; el segundo puede elegirse entre dos opciones dadas. En las PARTES 2 y 3 se realizará un ejercicio en cada una, puntuado con 3 puntos, con posibilidad de elegir entre dos opciones.

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad de almacenar o transmitir datos. Si el estudiante es sorprendido con una calculadora no autorizada podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PARTE 1. NÚMEROS Y ÁLGEBRA

EJERCICIO 1

1. Una empresa fabrica y vende dos modelos de armarios de oficina A y B. Para fabricar un armario del modelo A se necesitan 3 horas para su construcción y 4 horas de pintura; cada uno del modelo B, necesita para estos procesos 6 y 2 horas respectivamente. La empresa dispone semanalmente de un máximo de 60 horas para la construcción de estos armarios y de un máximo de 32 horas para la pintura. Cada armario del modelo A genera un beneficio de 200 euros y cada uno del modelo B, 300 euros. A la empresa le interesa saber cuántos armarios de cada tipo debe fabricar para maximizar su beneficio. Se pide:

- a) **(0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal que permita saber cuántos armarios de cada tipo se deben producir para maximizar el beneficio.
- b) **(0,5 PUNTOS)** Representa la región factible.
- c) **(0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región.
- d) **(0,5 PUNTOS)** Indica cuántos armarios de cada tipo deben fabricarse para maximizar el beneficio. Indica el valor de dicho beneficio máximo.

EJERCICIO 2

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (2.1 o 2.2)

(Opción 1)

2.1. a) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de “k” para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ k & -5 \end{pmatrix}$ verifique la igualdad:

$$A^2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) **(1 PUNTO)** Comprueba que la matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ también verifica que $B^2 = I_2$.

Calcula la matriz inversa de B. Calcula una matriz X que verifique: $BX = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(Opción 2)

2.2. Dadas las matrices $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) **(0,5 PUNTOS)** Demuestra que se cumple la igualdad: $AA^T = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- b) **(1,5 PUNTOS)** Calcula una matriz X para que se cumpla la igualdad: $XA + B = BA$ (A^T representa la matriz traspuesta de A)

PARTE 2. ANÁLISIS**EJERCICIO 3**

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (3.1 o 3.2)

(Opción 1)

3.1. Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 36x + 5$ (a: número real). Se pide:

- a) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de “a” para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(2, f(2))$ tenga por ecuación: $y = 37$. Estudia si la función posee un máximo o un mínimo relativo en $x = 2$.
- b) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de “a” para que haya un cambio de concavidad de la función en $x = 5$.
- c) **(1 PUNTO)** Qué valor debe tomar “a” para que se verifique la igualdad:

$$\int_2^4 (3x^2 + 2ax + 36) dx = 152$$

(Opción 2)

3.2. Un empresario ha realizado un estudio para analizar la evolución de su negocio durante 6 meses. Los ingresos, en miles de euros, vienen dados por la función:

$$f(t) = t^3 - 3t + 10 \text{ con } 0 \leq t \leq 6 \text{ (t: meses transcurridos desde el inicio del estudio)}$$

Se pide:

- a) **(1,25 PUNTOS)** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Calcula cuando los ingresos han sido máximos y cuándo mínimos en el intervalo de tiempo considerado, $[0, 6]$, e indica cuándo se han alcanzado.
- b) **(0,25 PUNTOS)** Calcula en qué momento los ingresos han sido de 12000 euros.
- c) **(0,75 PUNTOS)** Representa gráficamente la función en el intervalo $[0, 6]$.
- d) **(0,75 PUNTOS)** Calcula en qué punto de la gráfica anterior, la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto es igual a 9. Indica la ecuación de dicha recta.

PARTE 3. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA**EJERCICIO 4**

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (4.1 o 4.2)

(Opción 1)

4.1. Una empresa de motos fabrica uno de sus modelos en tres plantas distintas A, B y C que producen respectivamente el 35%, el 25% y el 40% de las unidades. El modelo está disponible en dos versiones, gasolina y eléctrica. Mientras en la planta B el 65% de las motos fabricadas son de gasolina, en la C sucede lo contrario y el 65% de las motos son eléctricas, Sabemos también que, de la producción total, el 60% de las motos son de gasolina. Se pide:

- a) **(1,25 PUNTOS)** ¿Qué porcentaje de motos fabricadas por la planta A son de gasolina?
- b) **(0,5 PUNTOS)** ¿Son independientes los sucesos “moto fabricada en la planta B” y “moto de gasolina”?
- c) **(1,25 PUNTOS)** Se elige una moto al azar de dicha empresa, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada en la planta B si la moto es eléctrica.

(Opción 2)**4.2.** Resuelve los apartados A) y B)

A) **(1 PUNTO)** De dos sucesos A y B sabemos que $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ y que, además, A y B son independientes. Calcula: $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A/B)$ y $P(\bar{A}/B)$.

($\bar{A}$ representa el suceso complementario o contrario de A)

B) La duración, en horas, de un tipo de bombilla sigue una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 250 horas.

B.1) **(1 PUNTO)** Se toma una muestra aleatoria de 100 bombillas y la duración media de estas bombillas ha sido de 2000 horas. Calcula un intervalo de confianza del 95% para la media μ .

B.2) **(1 PUNTO)** Calcula el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que al estimar μ , con el mismo nivel de confianza, el error sea inferior a 20 horas.

SOLUCIONES

1. Una empresa fabrica y vende dos modelos de armarios de oficina A y B. Para fabricar un armario del modelo A se necesitan 3 horas para su construcción y 4 horas de pintura; cada uno del modelo B, necesita para estos procesos 6 y 2 horas respectivamente. La empresa dispone semanalmente de un máximo de 60 horas para la construcción de estos armarios y de un máximo de 32 horas para la pintura. Cada armario del modelo A genera un beneficio de 200 euros y cada uno del modelo B, 300 euros. A la empresa le interesa saber cuántos armarios de cada tipo debe fabricar para maximizar su beneficio. Se pide:
- a) **(0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal que permita saber cuántos armarios de cada tipo se deben producir para maximizar el beneficio.
- b) **(0,5 PUNTOS)** Representa la región factible.
- c) **(0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región.
- d) **(0,5 PUNTOS)** Indica cuántos armarios de cada tipo deben fabricarse para maximizar el beneficio. Indica el valor de dicho beneficio máximo.

- a) Llamamos “x” al número de armarios A producidos e “y” al número de armarios B. Organizamos los datos del ejercicio en una tabla.

	Horas de construcción	Horas de pintura	Beneficio
Armarios A (x)	3x	4x	200x
Armarios B (y)	6y	2y	300y
TOTAL	3x + 6y	4x + 2y	200x + 300y

La función objetivo es el beneficio $B(x, y) = 200x + 300y$. Nuestro objetivo es maximizarlo.

Expresamos las restricciones del problema en inecuaciones:

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

La empresa dispone semanalmente de un máximo de 60 horas para la construcción de estos armarios y de un máximo de 32 horas para la pintura $\rightarrow 3x + 6y \leq 60; 4x + 2y \leq 32$

Agrupamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ 3x + 6y \leq 60 \\ 4x + 2y \leq 32 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + 2y \leq 20 \\ 2x + y \leq 16 \end{array} \right\}$$

- b) Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos del plano que satisfacen las inecuaciones.

	$x + 2y = 20$	$2x + y = 16$
$x \geq 0; y \geq 0$	$x \quad y = \frac{20 - x}{2}$	$x \quad y = 16 - 2x$
<i>El primer cuadrante</i>	0 10 4 8 20 0	0 16 4 8 8 0



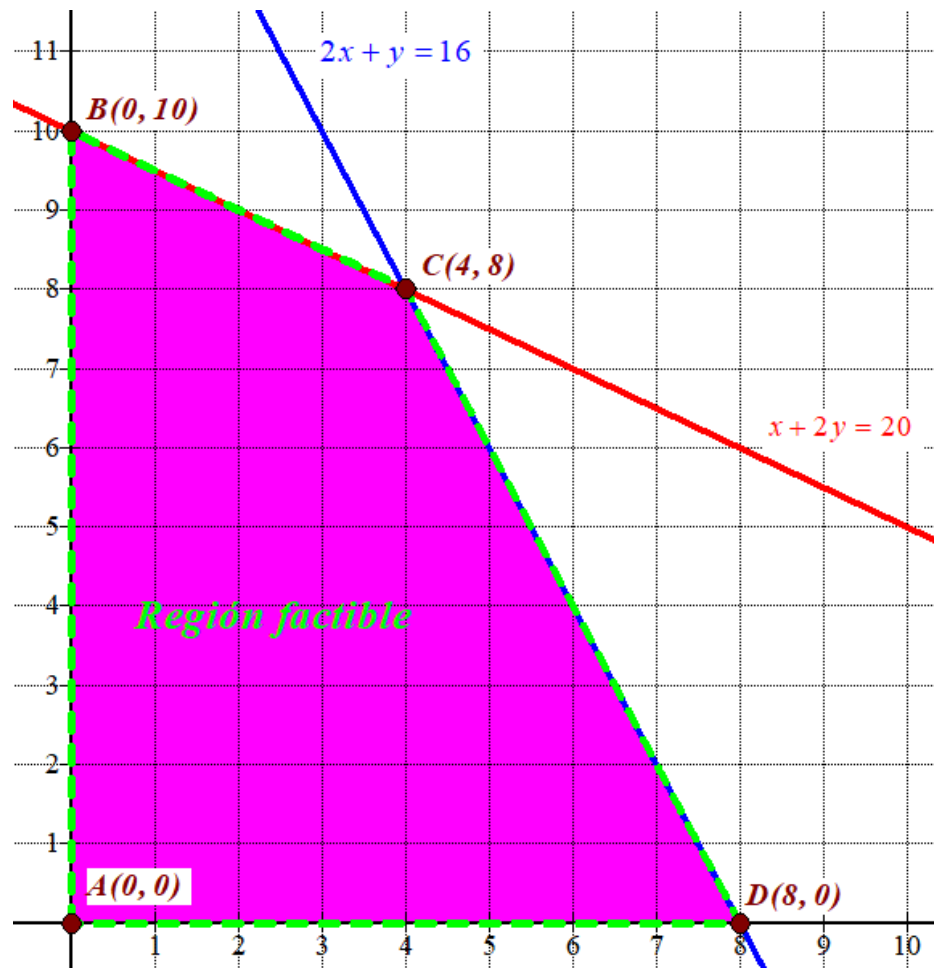
Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 20 \\ 2x + y \leq 16 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto $P(2, 2)$ perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \geq 0; 2 \geq 0 \\ 2 + 2 \cdot 2 \leq 20 \\ 2 \cdot 2 + 2 \leq 16 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen! }$$

Coloreamos de rosa la región factible.



c) Los vértices de la región factible son $A(0, 0)$, $B(0, 10)$, $C(4, 8)$ y $D(8, 0)$.

d) Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 200x + 300y$ en cada uno de los vértices de la región.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 10) \rightarrow B(0, 10) = 200 \cdot 0 + 300 \cdot 10 = 3000$$

$$C(4, 8) \rightarrow B(4, 8) = 200 \cdot 4 + 300 \cdot 8 = 3200 \text{ Máximo}$$

$$D(8, 0) \rightarrow B(8, 0) = 200 \cdot 8 + 300 \cdot 0 = 1600$$

El Beneficio máximo se obtiene en el punto $C(4, 8)$.

El objetivo de maximizar el beneficio se consigue con la fabricación y venta de 4 armarios tipo A y 8 tipo B. Este beneficio máximo tiene un valor de 3200 €.

2.1. a) (1 PUNTO) Calcula el valor de “k” para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ k & -5 \end{pmatrix}$ verifique la igualdad:

$$A^2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) (1 PUNTO) Comprueba que la matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ también verifica que $B^2 = I_2$. Calcula la matriz inversa de B. Calcula una matriz X que verifique: $BX = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Resolvemos la igualdad planteada.

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ k & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ k & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 25+3k & 15-15 \\ 5k-5k & 3k+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 25+3k & 0 \\ 0 & 3k+25 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3k+25=1 \Rightarrow 3k=-24 \Rightarrow \boxed{k=-8} \end{aligned}$$

Para $k=-8$ se cumple que $A^2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Comprobamos que la matriz B cumple la igualdad $B^2 = I_2$.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-15 & 12-12 \\ -20+20 & -15+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

La matriz B cumple que $B^2 = I_2 \rightarrow B \cdot B = I_2$.

Resolvemos la ecuación matricial $BX = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} BX &= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow BBX = B \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{B^2 = I\} \Rightarrow I \cdot X = B \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow X &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+3 & 28+6 \\ -15-4 & -35-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 34 \\ -19 & -43 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz solución es $X = \begin{pmatrix} 15 & 34 \\ -19 & -43 \end{pmatrix}$.

2.2. Dadas las matrices $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$, se pide:

a) **(0,5 PUNTOS)** Demuestra que se cumple la igualdad: $AA^T = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) **(1,5 PUNTOS)** Calcula una matriz X para que se cumpla la igualdad: $XA + B = BA$
(A^T representa la matriz traspuesta de A)

a) Comprobamos que se cumple la igualdad.

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 9+16 & 12-12 \\ 12-12 & 16+9 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

b) Por el apartado anterior sabemos que la matriz A tiene inversa y que $A^{-1} = A^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Despejamos X de la igualdad.

$$XA + B = BA \Rightarrow XA = BA - B \Rightarrow X = (BA - B)A^{-1} = BAA^{-1} - BA^{-1} = B - BA^{-1}$$

Terminamos de hallar la matriz X.

$$X = B - BA^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15-40 & 20+30 \\ -80 & 60 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -25 & 50 \\ -80 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -16 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$.

3.1. Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 36x + 5$ (a : número real). Se pide:

- a) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de “ a ” para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(2, f(2))$ tenga por ecuación: $y = 37$. Estudia si la función posee un máximo o un mínimo relativo en $x = 2$.
- b) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de “ a ” para que haya un cambio de concavidad de la función en $x = 5$.
- c) **(1 PUNTO)** Qué valor debe tomar “ a ” para que se verifique la igualdad:

$$\int_2^4 (3x^2 + 2ax + 36) dx = 152$$

- a) Si la recta tangente a la gráfica de la función en $x = 2$ es $y = 37$, esto quiere decir dos cosas: la primera es que $f(2) = 37$ y la segunda que $f'(2) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 37 \\ f(x) = x^3 + ax^2 + 36x + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 37 = 2^3 + a \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 + 5 \Rightarrow 37 = 8 + 4a + 72 + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a = -48 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-48}{4} = -12}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 2ax + 36 \\ f'(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2a + 36 \Rightarrow 0 = 12 + 4a + 36 \Rightarrow \boxed{a = -12}$$

El valor necesario para que se cumpla lo pedido es $a = -12$.

Al ser $f'(2) = 0$ la función tiene un extremo relativo en $x = 2$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 24x + 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = 6x - 24 \Rightarrow f''(2) = 6 \cdot 2 - 24 = -12 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función tiene un máximo relativo en $x = 2$.

- b) Para que haya un cambio de concavidad de la función en $x = 5$ la función tiene que tener un punto de inflexión en dicho valor y para ello la derivada segunda debe anularse para $x = 5$.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + 36x + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + 36 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2a$$

$$f''(5) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 5 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -30 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-30}{2} = -15}$$

Para $a = -15$ se cumple lo pedido.

- c) Calculamos el valor de la integral definida planteada.

$$\int_2^4 (3x^2 + 2ax + 36) dx = \left[x^3 + ax^2 + 36x \right]_2^4 = \left[4^3 + a \cdot 4^2 + 36 \cdot 4 \right] - \left[2^3 + a \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 \right] =$$
$$= 64 + 16a + 144 - 8 - 4a - 72 = 12a + 128$$

Determinamos el valor de “a” para que esta integral valga 152.

$$\int_2^4 (3x^2 + 2ax + 36) dx = 152 \Rightarrow 12a + 128 = 152 \Rightarrow 12a = 24 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

El valor buscado es $a = 2$.

3.2. Un empresario ha realizado un estudio para analizar la evolución de su negocio durante 6 meses. Los ingresos, en miles de euros, vienen dados por la función:

$$f(t) = t^3 - 3t + 10 \text{ con } 0 \leq t \leq 6 \text{ (t: meses transcurridos desde el inicio del estudio)}$$

Se pide:

- a) **(1,25 PUNTOS)** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Calcula cuando los ingresos han sido máximos y cuándo mínimos en el intervalo de tiempo considerado, $[0, 6]$, e indica cuándo se han alcanzado.
- b) **(0,25 PUNTOS)** Calcula en qué momento los ingresos han sido de 12000 euros.
- c) **(0,75 PUNTOS)** Representa gráficamente la función en el intervalo $[0, 6]$.
- d) **(0,75 PUNTOS)** Calcula en qué punto de la gráfica anterior, la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto es igual a 9. Indica la ecuación de dicha recta.

a) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función ingresos.

$$f(t) = t^3 - 3t + 10 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 3$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 3 = 0 \Rightarrow t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{1} = 1}$$

Solo consideramos el valor positivo de la raíz. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $t = 1$.

- En el intervalo $[0, 1)$ consideramos $t = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = 3 \cdot 0.5^2 - 3 = -2.25 < 0$. La función decrece en $[0, 1)$.
- En el intervalo $(1, 6]$ consideramos $t = 5$ y la derivada vale $f'(5) = 3 \cdot 5^2 - 3 = 72 > 0$. La función crece en $(1, 6]$.

La función decrece en $[0, 1)$ y crece en $(1, 6]$.

La función presenta un mínimo relativo en $t = 1$.

Valoramos los ingresos en este punto crítico y en los extremos del intervalo para determinar el máximo y mínimo absoluto de los ingresos.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 10 = 10 \\ f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 10 = 8 \text{ Mínimo} \\ f(6) = 6^3 - 3 \cdot 6 + 10 = 208 \text{ Máximo} \end{array} \right\}$$

El ingreso mínimo es de 8000 € y se produce transcurrido 1 mes desde el comienzo del estudio.
El ingreso máximo es de 208000 € y se consigue transcurridos 6 meses desde el inicio del estudio.

b) Averiguamos el valor de “t” para el que $f(t) = 12$.

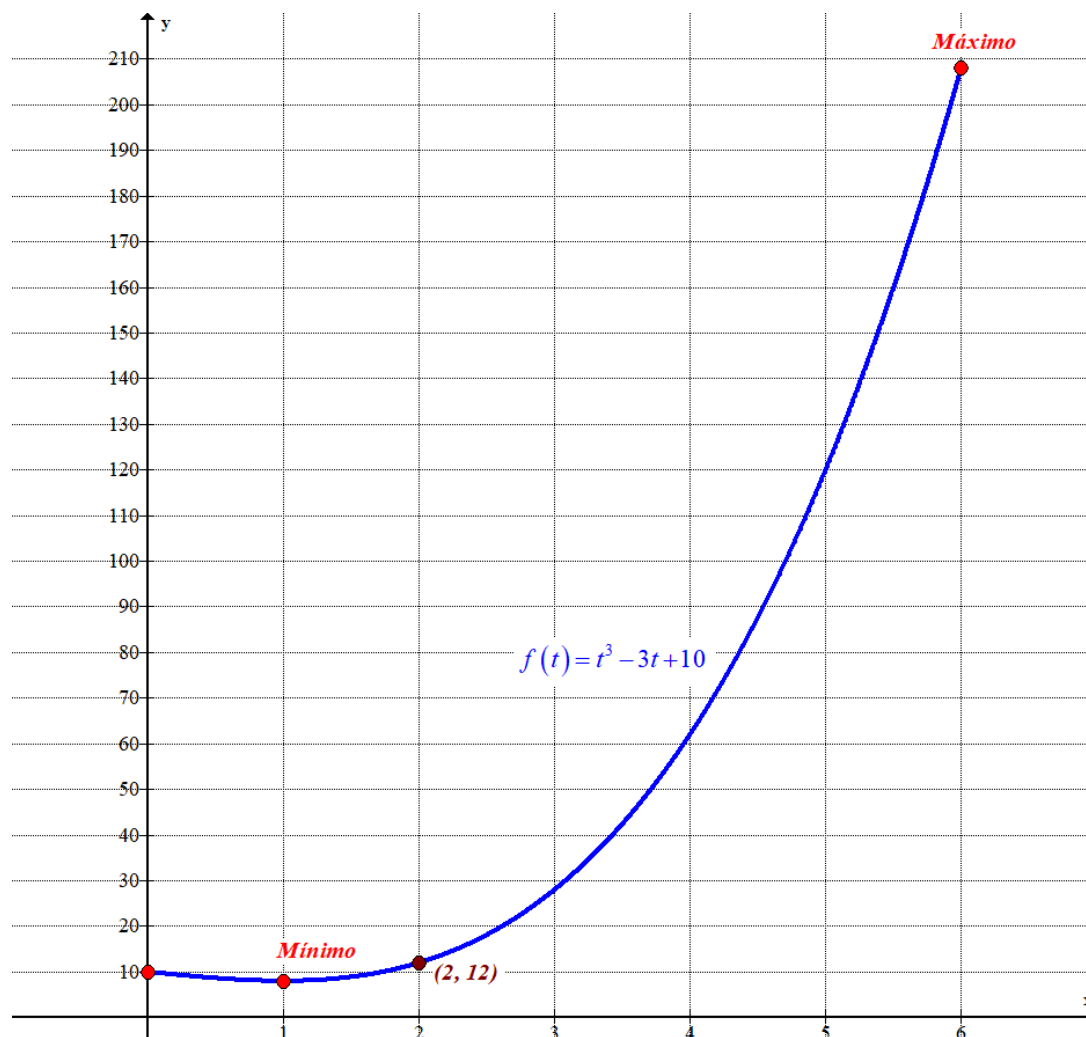
$$f(t) = 12 \Rightarrow t^3 - 3t + 10 = 12 \Rightarrow t^3 - 3t - 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow t^3 - 3t - 2 = (t+1)(t^2 - t - 2)$$

$$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = t \\ \frac{1-3}{2} = -1 \notin [0,6] \end{cases}$$

Transcurridos 2 meses desde el inicio del estudio los ingresos son de 12000 €.

c) Dibujamos la gráfica de la función.



d) Para que la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto sea igual a 9 la derivada de la función debe valer 9 $\Rightarrow f'(t) = 9$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(t) = 9 \\ f'(t) = 3t^2 - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 9 = 3t^2 - 3 \Rightarrow 3t^2 = 12 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = \sqrt{4} = 2$$

En $t = 2$ la pendiente de la recta tangente vale 9. Hallamos la expresión de esta recta tangente.

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 12 \\ f'(2) = 9 \\ y - f(2) = f'(2)(t - 2) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 12 = 9(t - 2) \Rightarrow y - 12 = 9t - 18 \Rightarrow y = 9t - 6$$

La recta tangente en $t = 2$ tiene ecuación $y = 9t - 6$.

- 4.1.** Una empresa de motos fabrica uno de sus modelos en tres plantas distintas A, B y C que producen respectivamente el 35%, el 25% y el 40% de las unidades. El modelo está disponible en dos versiones, gasolina y eléctrica. Mientras en la planta B el 65% de las motos fabricadas son de gasolina, en la C sucede lo contrario y el 65% de las motos son eléctricas, Sabemos también que, de la producción total, el 60% de las motos son de gasolina. Se pide:
- a) **(1,25 PUNTOS)** ¿Qué porcentaje de motos fabricadas por la planta A son de gasolina?
- b) **(0,5 PUNTOS)** ¿Son independientes los sucesos “moto fabricada en la planta B” y “moto de gasolina”?
- c) **(1,25 PUNTOS)** Se elige una moto al azar de dicha empresa, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada en la planta B si la moto es eléctrica.

Llamamos A, B y C a los sucesos “la moto está fabricada en la planta A, B y C respectivamente” y G a “la moto es de gasolina”.

Al elegir una moto al azar tenemos que $P(A) = 0.35$, $P(B) = 0.25$, $P(C) = 0.40$,

$P(G/B) = 0.65$, $P(\bar{G}/C) = 0.65$ y $P(G) = 0.60$.

- a) Calculamos $P(G/A)$. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G) = P(A)P(G/A) + P(B)P(G/B) + P(C)P(G/C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.60 = 0.35 \cdot P(G/A) + 0.25 \cdot 0.65 + 0.4(1 - 0.65) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.6 = 0.35 \cdot P(G/A) + 0.3025 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.35 \cdot P(G/A) = 0.2975 \Rightarrow P(G/A) = \frac{0.2975}{0.35} = \boxed{0.85}$$

El 85% de las motos fabricadas en la planta A son de gasolina.

- b) Para que sean independientes debe cumplirse la igualdad $P(G/B) = P(G)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(G/B) = 0.65 \\ P(G) = 0.6 \end{array} \right\} \Rightarrow P(G/B) = 0.65 \neq 0.6 = P(G)$$

Los sucesos “moto fabricada en la planta B” y “moto de gasolina” no son independientes.

- c) Nos piden calcular $P(B/\bar{G})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/\bar{G}) = \frac{P(B \cap \bar{G})}{P(\bar{G})} = \frac{P(B)P(\bar{G}/B)}{1 - P(G)} = \frac{0.25 \cdot (1 - 0.65)}{1 - 0.6} = \frac{7}{32} = \boxed{0.21875}$$

4.2. Resuelve los apartados A) y B)

A) **(1 PUNTO)** De dos sucesos A y B sabemos que $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ y que, además, A y B son independientes. Calcula: $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A/B)$ y $P(\bar{A}/B)$.

($\bar{A}$ representa el suceso complementario o contrario de A)

B) La duración, en horas, de un tipo de bombilla sigue una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 250 horas.

B.1) **(1 PUNTO)** Se toma una muestra aleatoria de 100 bombillas y la duración media de estas bombillas ha sido de 2000 horas. Calcula un intervalo de confianza del 95% para la media μ .

B.2) **(1 PUNTO)** Calcula el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que al estimar μ , con el mismo nivel de confianza, el error sea inferior a 20 horas.

A) Como A y B son independientes se cumple $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ P(A) = \frac{1}{4} \\ P(A \cap B) = \frac{1}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{4}P(B) \Rightarrow \boxed{P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0.5}$$

Para calcular $P(A \cup B)$ utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{5}{8} = 0.625}$$

Para calcular $P(A/B)$ utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$$

Para calcular $P(\bar{A}/B)$ utilizamos la probabilidad del suceso contrario.

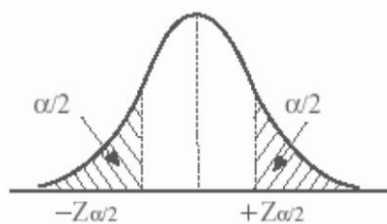
$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B) = 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4} = 0.75}$$

B) Sea X = La duración, en horas, de un tipo de bombilla. Esta distribución sigue una ley normal $N(\mu, 250)$.

B.1) Tenemos que el tamaño de la muestra es $n = 100$ y la media $= \bar{x} = 2000$ horas.

Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{250}{\sqrt{100}} = 49 \text{ horas}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (2000 - 49, 2000 + 49) = (1951, 2049)$$

B.2) Sabemos que $X = N(\mu, 250)$ y que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

Utilizamos la fórmula del error para despejar n con un error de 20 horas.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 20 = 1.96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} \Rightarrow 20 = \frac{490}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{490}{20} \Rightarrow \boxed{n = 24.5^2 = 600.25}$$

Para que el error cometido en la estimación sea menor de 20 horas la muestra debe ser de un mínimo de 601 bombillas.