

 Universidad Carlos III de Madrid	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	C
--	--	----------

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de **4 ejercicios**: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. **Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.

DURACIÓN: 90 minutos.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

El famoso youtuber Pepe Fogones ha decidido emprender una nueva aventura empresarial y se ha unido con su amigo Cocinauta para lanzar al mercado una exclusiva variedad de té *matcha* ecológico. Ambos han invertido parte de sus ahorros en una plantación de té y están analizando los costes de recolección, procesamiento y envasado del té para su distribución. El grupo de asesores contratado por Pepe Fogones y Cocinauta ha logrado modelar los costes marginales mensuales, en euros, mediante la siguiente función:

$$c(x) = \frac{x+10}{50}, \quad 0 < x < 100$$

siendo x la cantidad mensual, en kilos, de té *matcha* envasado.

Los asesores contratados por Pepe Fogones y su socio han hecho, además, un estudio de los beneficios que obtiene con sus redes sociales, representados en euros mediante la siguiente función de beneficios:

$$B(t) = \frac{800000}{(t-1)^2 + 2}, \quad t \geq 0$$

siendo t el tiempo transcurrido a partir del momento en que han hecho el estudio.

1.a) (1 punto) Calcule el coste de envasar x kilos de té *matcha* sabiendo que el coste de envasar el primer kilo es de 121, 21 euros. Tenga en cuenta que la función de costes marginales es la derivada de la función de costes.

1.b) (1,5 puntos) Analice si, con el transcurso del tiempo, el beneficio que obtiene Pepe Fogones con sus redes sociales crece o no, cuál es el máximo beneficio y en qué momento se alcanza. Estudie qué pasaría con el beneficio a largo plazo.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.

Pregunta 2.1

Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.1.a) (1.25 puntos) Calcule las matrices A^{20} y A^{21} .

2.1.b) (1.25 puntos) Calcule la matriz X que verifique la igualdad $XA = BB^t A^{-1}$, donde B^t indica la matriz traspuesta de B .

Pregunta 2.2

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} ax + y = a + 1 \\ ay + z = -2a \\ -ax + az = -2 \end{cases}$$

2.2.a) (1.5 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

2.2.b) (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2. Una organización no gubernamental (ONG) quiere saber qué cantidad de dinero dedican las familias a actividades de interés social y en qué tipo de actividades están interesadas. Para ello se selecciona un municipio al azar.

Pregunta 3.1

La cantidad anual donada por familia a actividades de interés social se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y desviación típica de 40 euros.

3.1.a) (1,25 puntos) Para una muestra aleatoria de 64 familias resultó que la donación media fue de 360 euros. Obtenga un intervalo de confianza del 90% para estimar la cantidad media donada por familia a actividades de interés social.

3.1.b) (1,25 puntos) Determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de familias del municipio para garantizar, con un nivel de confianza del 95%, que el margen de error en la estimación de la cantidad media donada por familia no supere los 10 euros.

Pregunta 3.2

Se sabe que el 70% de las familias del municipio destina una parte de su presupuesto a actividades de interés social. Si se seleccionan 200 familias al azar:

3.2.a) (1 punto) Indique la distribución de la variable aleatoria $X =$ "número de familias que no destinan ninguna cantidad a actividades de interés social". Determine el número esperado de familias con esta propiedad.

3.2.b) (1,5 puntos) Mediante la aproximación por una distribución normal, calcule la probabilidad de que el número de familias de la muestra que destinan una parte de su presupuesto a actividades de interés social esté comprendido entre 138 y 145 familias, ambas incluidas.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 4.1 o 4.2.

Pregunta 4.1

Sean A y B dos sucesos resultado de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0.5$, $P(\bar{B}) = 0.4$ y $P(A \cup B) = 0.8$, siendo $\bar{B}$ el suceso complementario de B .

4.1.a) (1 punto) Calcule $P(B/\bar{A})$, siendo $\bar{A}$ el suceso complementario de A .

4.1.b) (0,75 puntos) Calcule $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

4.1.c) (0,75 puntos) Justifique si los sucesos A y B son independientes o no.

Pregunta 4.2

Un ayuntamiento ha sacado a concurso una convocatoria para la construcción de un Centro de Salud de Atención Primaria. Al concurso se han presentado tres constructoras, Horizon, Vértice XXI y CuadraNova, que tienen una probabilidad de conseguir el contrato de 0,5; 0,3 y 0,2 respectivamente. La probabilidad de que el Centro de Salud esté terminado en la fecha prevista es de 0,6 si la obra se le encarga a Horizon, 0,2 si se le adjudica a Vértice XXI y 0,9 si la realiza CuadraNova.

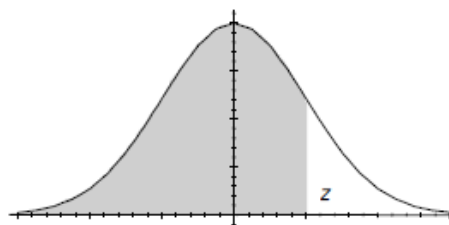
4.2.a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que el Centro de Salud esté terminado en la fecha prevista.

4.2.b) (1,25 puntos) Transcurrido el plazo previsto para la ejecución de la obra se constató que el Centro de Salud de Atención Primaria no estaba terminado. Obtenga la probabilidad de que la obra hubiera sido adjudicada a Vértice XXI.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

El famoso youtuber Pepe Fogones ha decidido emprender una nueva aventura empresarial y se ha unido con su amigo Cocinauta para lanzar al mercado una exclusiva variedad de té *matcha* ecológico. Ambos han invertido parte de sus ahorros en una plantación de té y están analizando los costes de recolección, procesamiento y envasado del té para su distribución. El grupo de asesores contratado por Pepe Fogones y Cocinauta ha logrado modelar los costes marginales mensuales, en euros, mediante la siguiente función:

$$c(x) = \frac{x+10}{50}, \quad 0 < x < 100$$

siendo x la cantidad mensual, en kilos, de té *matcha* envasado.

Los asesores contratados por Pepe Fogones y su socio han hecho, además, un estudio de los beneficios que obtiene con sus redes sociales, representados en euros mediante la siguiente función de beneficios:

$$B(t) = \frac{800000}{(t-1)^2 + 2}, \quad t \geq 0$$

siendo t el tiempo transcurrido a partir del momento en que han hecho el estudio.

1.a) (1 punto) Calcule el coste de envasar x kilos de té *matcha* sabiendo que el coste de envasar el primer kilo es de 121, 21 euros. Tenga en cuenta que la función de costes marginales es la derivada de la función de costes.

1.b) (1,5 puntos) Analice si, con el transcurso del tiempo, el beneficio que obtiene Pepe Fogones con sus redes sociales crece o no, cuál es el máximo beneficio y en qué momento se alcanza. Estudie qué pasaría con el beneficio a largo plazo.

1.a) Debemos hallar la función costes $C(x)$ que es la integral de la función costes marginales.

$$C(x) = \int c(x) dx = \int \frac{x+10}{50} dx = \frac{1}{50} \int x+10 dx = \frac{1}{50} \left(\frac{x^2}{2} + 10x \right) = \frac{x^2}{100} + \frac{x}{5} + K$$

Como sabemos que el coste de envasar el primer kilo es de 121, 21 euros entonces $C(1) = 121.21$. Determinamos el valor de K utilizando este dato.

$$\left. \begin{array}{l} C(x) = \frac{x^2}{100} + \frac{x}{5} + K \\ C(1) = 121.21 \end{array} \right\} \Rightarrow 121.21 = \frac{1^2}{100} + \frac{1}{5} + K \Rightarrow 12121 = 1 + 20 + 100K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100K = 12121 - 21 = 12100 \Rightarrow K = \frac{12100}{100} = 121$$

La función costes tiene la expresión $C(x) = \frac{x^2}{100} + \frac{x}{5} + 121, \quad 0 < x < 100$.

1.b) Averiguamos cuando se anula la derivada de los beneficios.

$$B(t) = \frac{800000}{(t-1)^2 + 2} \Rightarrow B'(t) = \frac{-800000 \cdot (2(t-1))}{((t-1)^2 + 2)^2} = \frac{-1600000(t-1)}{((t-1)^2 + 2)^2}$$

$$B'(t) = 0 \Rightarrow \frac{-1600000(t-1)}{((t-1)^2 + 2)^2} = 0 \Rightarrow -1600000(t-1) = 0 \Rightarrow \boxed{t=1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $t = 1$.

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $t = 0.5$ y la derivada vale

$$B'(0.5) = \frac{-1600000(0.5-1)}{((0.5-1)^2 + 2)^2} = \frac{800000}{81/16} > 0. \text{ La función crece en } (0,1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $t = 2$ y la derivada vale

$$B'(2) = \frac{-1600000(2-1)}{((2-1)^2 + 2)^2} = \frac{-1600000}{9} < 0. \text{ La función decrece en } (1, +\infty).$$

El beneficio crece hasta $t = 1$ y decrece a partir de ese momento.

El máximo beneficio se alcanza en $t = 1$, siendo $B(1) = \frac{800000}{(1-1)^2 + 2} = 400000$ € el importe de dicho beneficio máximo.

Para averiguar que pasa con el beneficio a largo plazo calculamos el límite de la función beneficios cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} B(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{800000}{(t-1)^2 + 2} = \frac{800000}{\infty} = 0$$

A largo plazo el beneficio va disminuyendo y acercándose a 0.

Pregunta 2.1

Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.1.a) (1.25 puntos) Calcule las matrices A^{20} y A^{21} .

2.1.b) (1.25 puntos) Calcule la matriz X que verifique la igualdad $XA = BB^t A^{-1}$, donde B^t indica la matriz traspuesta de B .

2.1.a) Calculamos las primeras potencias de la matriz A en busca de una regularidad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$A^{20} = A^{2 \cdot 10} = (A^2)^{10} = (I_2)^{10} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{21} = A^{20} A = I_2 A = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Hemos visto que } A^{20} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^{21} = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.1.b) Sabemos que $A^2 = A \cdot A = I_2$, por lo que la inversa de la matriz A existe y $A^{-1} = A$. Despejamos X en la ecuación matricial.

$$XA = BB^t A^{-1} \Rightarrow XAA = BB^t A^{-1} A \Rightarrow XA^2 = BB^t I_2 \Rightarrow XI_2 = BB^t \Rightarrow X = BB^t$$

Terminamos de hallar la expresión de la matriz X .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = BB^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1 & -1-1-1 \\ -1-1-1 & 1+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

La matriz X solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Pregunta 2.2

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} ax + y = a + 1 \\ ay + z = -2a \\ -ax + az = -2 \end{cases}$$

2.2.a) (1.5 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

2.2.b) (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

2.2.a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & a+1 \\ 0 & a & 1 & -2a \\ -a & 0 & a & -2 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 - a$.

Veamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow a^3 - a = 0 \Rightarrow a(a^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 - 1 = 0 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

Analizamos cuatro casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$, $a \neq -1$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada queda

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

CASO 3. $a = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente al inicial.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \\ -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 1 \quad -1 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad -1 \quad -2 \\ 0 \quad -1 \quad 1 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{A/B} & & \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \underbrace{A} & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, igual que el de A/B y menor que el número de incógnitas (3). El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

CASO 4. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente al inicial.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad 0 \quad 1 \quad -2 \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{A/B} & & \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ & \underbrace{A} & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

Resumiendo: Para $a \neq 0$, $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones), para $a = 1$ y $a = 0$ el sistema es incompatible.

2.1.b) Lo resolvemos para $a = -1$. Sabemos que es compatible indeterminado (CASO 3). Lo resolvemos a partir del sistema triangular obtenido.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + y = 0 \\ -y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ z = 2 + y \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Para $a = -1$ las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}.$

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2. Una organización no gubernamental (ONG) quiere saber qué cantidad de dinero dedican las familias a actividades de interés social y en qué tipo de actividades están interesadas. Para ello se selecciona un municipio al azar.

Pregunta 3.1

La cantidad anual donada por familia a actividades de interés social se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y desviación típica de 40 euros.

3.1.a) (1,25 puntos) Para una muestra aleatoria de 64 familias resultó que la donación media fue de 360 euros. Obtenga un intervalo de confianza del 90% para estimar la cantidad media donada por familia a actividades de interés social.

3.1.b) (1,25 puntos) Determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de familias del municipio para garantizar, con un nivel de confianza del 95%, que el margen de error en la estimación de la cantidad media donada por familia no supere los 10 euros.

3.1.a) Consideramos X = La cantidad anual (en euros) donada por familia a actividades de interés social. $X = N(\mu, 40)$

El tamaño de la muestra es $n = 64$. La media muestral es 360 euros.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 90% el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.1 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505

Hallamos el error del intervalo de confianza.

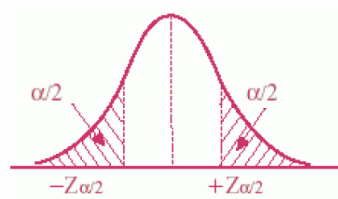
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{40}{\sqrt{64}} = 8.225 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (360 - 8.225, 360 + 8.225) = (351.775, 368.225)$$

3.1.b) Hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95%.

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha / 2 = 0.025 \Rightarrow 1 - \alpha / 2 = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9718	0.9722	0.9726	0.9729	0.9732	0.9735

Igualemos el error a 10 € y despejamos n .

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10 = 1.96 \cdot \frac{40}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10\sqrt{n} = 1.96 \cdot 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96 \cdot 40}{10} \Rightarrow n = (1.96 \cdot 4)^2 \Rightarrow \boxed{n = 61.47}$$

Para que el error cometido sea menor de 10 €, con un nivel de confianza del 95%, el tamaño mínimo de la muestra deberá ser de 62 familias.

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2. Una organización no gubernamental (ONG) quiere saber qué cantidad de dinero dedican las familias a actividades de interés social y en qué tipo de actividades están interesadas. Para ello se selecciona un municipio al azar.

Pregunta 3.2

Se sabe que el 70% de las familias del municipio destina una parte de su presupuesto a actividades de interés social. Si se seleccionan 200 familias al azar:

3.2.a) (1 punto) Indique la distribución de la variable aleatoria $X =$ "número de familias que no destinan ninguna cantidad a actividades de interés social". Determine el número esperado de familias con esta propiedad.

3.2.b) (1,5 puntos) Mediante la aproximación por una distribución normal, calcule la probabilidad de que el número de familias de la muestra que destinan una parte de su presupuesto a actividades de interés social esté comprendido entre 138 y 145 familias, ambas incluidas.

3.2.a) Consideramos $X =$ "número de familias que no destinan ninguna cantidad a actividades de interés social de un grupo de 200". Hay un 70% de las familias del municipio que destina una parte de su presupuesto a actividades de interés social, por lo que el restante 30% no destina ninguna cantidad a actividades de interés social.

La variable aleatoria X es una binomial de parámetros $n = 200$ y $p = 0.3$. $X = B(200, 0.3)$.

El número esperado de familias con esta propiedad es $np = 200 \cdot 0.3 = 60$ familias.

3.2.b) Que el número de familias de la muestra que destinan una parte de su presupuesto a actividades de interés social esté comprendido entre 138 y 145 familias, ambas incluidas es lo mismo que el número de familias que no destinan ningún dinero a actividades de interés social esté comprendido entre $200 - 138 = 62$ y $200 - 145 = 55$ familias.

Nos piden calcular $P(55 \leq X \leq 62)$.

Como el número de repeticiones es muy alto para el cálculo de probabilidades aproximaremos esta variable a una variable Y que sigue una ley normal con media $np = 200 \cdot 0.3 = 60$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.3 \cdot 0.7} = \sqrt{42} \approx 6.481$.

$Y = N(60, \sqrt{42})$.

$$P(55 \leq X \leq 62) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(54.5 \leq Y \leq 62.5) =$$

$$= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{54.5 - 60}{\sqrt{42}} \leq Z \leq \frac{62.5 - 60}{\sqrt{42}}\right) = P(-0.85 \leq Z \leq 0.39) =$$

$$= P(Z \leq 0.39) - P(Z \leq -0.85) = P(Z \leq 0.39) - P(Z \geq 0.85) =$$

$$= P(Z \leq 0.39) - [1 - P(Z \leq 0.85)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0.6517 - 1 + 0.8023 = \boxed{0.454}$$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389

Pregunta 4.1

Sean A y B dos sucesos resultado de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0.5$, $P(\bar{B}) = 0.4$ y $P(A \cup B) = 0.8$, siendo $\bar{B}$ el suceso complementario de B.

4.1.a) (1 punto) Calcule $P(B/\bar{A})$, siendo $\bar{A}$ el suceso complementario de A.

4.1.b) (0,75 puntos) Calcule $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

4.1.c) (0,75 puntos) Justifique si los sucesos A y B son independientes o no.

Calculamos $P(B)$.

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0.4 = 0.6$$

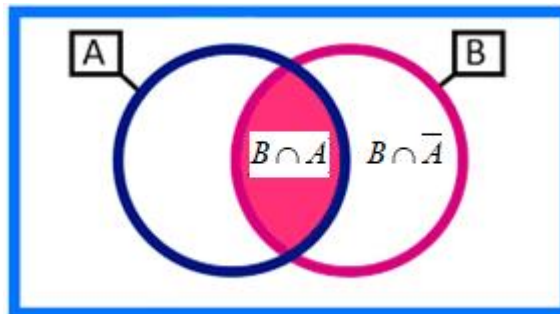
Calculamos $P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.8 = 0.5 + 0.6 - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.5 + 0.6 - 0.8 = 0.3$$

4.1.a) Debemos calcular $P(B/\bar{A})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{1 - P(A)} = \frac{0.6 - 0.3}{1 - 0.5} = \frac{3}{5} = \boxed{0.6}$$



4.1.b) Aplicamos una de las leyes de Morgan: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.8 = \boxed{0.2}$$

4.1.c) Para que los sucesos sean independientes se debe cumplir $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.3 \\ P(A)P(B) = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3 \end{array} \right\} P(A \cap B) = 0.3 = P(A)P(B)$$

Se cumple la igualdad y los sucesos A y B son independientes.

Pregunta 4.2

Un ayuntamiento ha sacado a concurso una convocatoria para la construcción de un Centro de Salud de Atención Primaria. Al concurso se han presentado tres constructoras, Horizon, Vértice XXI y CuadraNova, que tienen una probabilidad de conseguir el contrato de 0,5; 0,3 y 0,2 respectivamente. La probabilidad de que el Centro de Salud esté terminado en la fecha prevista es de 0,6 si la obra se le encarga a Horizon, 0,2 si se le adjudica a Vértice XXI y 0,9 si la realiza CuadraNova.

4.2.a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que el Centro de Salud esté terminado en la fecha prevista.

4.2.b) (1,25 puntos) Transcurrido el plazo previsto para la ejecución de la obra se constató que el Centro de Salud de Atención Primaria no estaba terminado. Obtenga la probabilidad de que la obra hubiera sido adjudicada a Vértice XXI.

Llamamos H, V y C a los sucesos “encargar la obra a Horizon, Vértice XXI o a CuadraNova respectivamente” y T al suceso “Terminar el centro de salud en la fecha prevista”.

Sabemos que $P(H) = 0.5$, $P(V) = 0.3$, $P(C) = 0.2$, $P(T/H) = 0.6$, $P(T/V) = 0.2$ y $P(T/C) = 0.9$

4.2.a) Nos piden calcular $P(T)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T) = P(H)P(T/H) + P(V)P(T/V) + P(C)P(T/C) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.9 = \boxed{0.54}$$

La probabilidad de que el Centro de Salud esté terminado en la fecha prevista tiene un valor de 0.54.

4.2.b) Nos piden calcular $P(V/\bar{T})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V/\bar{T}) = \frac{P(V \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{P(V)P(\bar{T}/V)}{1 - P(T)} = \frac{0.3 \cdot (1 - 0.2)}{1 - 0.54} = \boxed{\frac{12}{23} \approx 0.5217}$$

La probabilidad de que la empresa adjudicataria haya sido Vértice XXI si la obra no está terminada en la fecha prevista tiene un valor de $\frac{12}{23} \approx 0.5217$.