

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	
---	---	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de **4 ejercicios**: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. **Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.

DURACIÓN: 90 minutos.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

La empresa tecnológica Pear acaba de lanzar la nueva versión para 2025 de su smartphone insignia, el P25. En la red social *Rettiwt* se ha generado una alta expectación y los primeros compradores del P25 han comenzado a publicar fotos con sus dispositivos y sus opiniones. La mayoría de estas opiniones son positivas, pero hay una minoría de usuarios que reporta un calentamiento excesivo del P25 que genera en pantalla el mensaje de aviso “El P25 necesita enfriarse para poder usarlo”.

Con el objetivo de recabar más información para su próximo vídeo, el youtuber *@solo_reviews* ha abierto un hilo para solicitar a los compradores verificados del P25 que reporten si han experimentado o no sobrecalentamiento repentino en sus smartphones, entendiendo este como el que origina el aviso en condiciones normales de uso.

Un total de 288 compradores verificados responden en el hilo, de los cuales 20 reportan haber visto el mensaje de enfriamiento necesario en condiciones de uso normales. Dado el perfil de los seguidores de *@solo_reviews*, se asume que esta es una muestra aleatoria simple.

Ante el ruido generado en las redes sociales, la empresa Pear lanza el siguiente comunicado en *Rettiwt*:

En Pear aclaramos: no hay problemas generalizados en nuestro nuevo P25. El sobrecalentamiento afecta al 2% de dispositivos al estar exclusivamente limitado a un lote defectuoso de un proveedor. Estamos contactando a los clientes afectados para ofrecer una solución inmediata.

#PearSupport #P25

- 1.a)** (1,25 puntos) Asumiendo que el comunicado de Pear es cierto, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que el número de smartphones defectuosos reportados en el hilo de *@solo_reviews* hubiese sido superior o igual a 11.
- 1.b)** (1,25 puntos) Obtenga un intervalo del 99% de confianza para la proporción de smartphones defectuosos a partir del hilo de *@solo_reviews*. ¿Es cuestionable la veracidad del comunicado de Pear?

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.

Pregunta 2.1

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ (a+1)x + az = 5 \end{cases}$$

2.1.a) (1.25 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a .

2.1.b) (1.25 puntos) Resuelva el sistema para $a = 2$.

Pregunta 2.2

Sean x e y dos números reales tales que

$$x \geq -6, y \geq 0, -x + y \leq 8, x + 4y \leq 12, x + y \leq 6$$

2.2.a) (2 puntos) Represente gráficamente la región S determinada por las restricciones y calcule las coordenadas de sus vértices.

2.2.b) (0,5 puntos) Se desea maximizar el doble de y menos el triple de x en S . Indique el valor máximo y el punto de la región en el cual se alcanza.

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2.

Pregunta 3.1

Considere la función real de variable real

$$f(x) = x(x^2 + a),$$

donde $a > 0$ es un parámetro real.

3.1.a) (1 punto) Calcule el valor de a para que la primitiva de $f(x)$, $F(x)$, cumpla que $F(0) = 0$ y $F(1) = 1$.

3.1.b) (0,5 puntos) Para $a = \frac{3}{2}$, obtenga el área del recinto delimitado por $f(x)$, el eje horizontal y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

3.1.c) (1 punto) Halle los valores de a que hacen que la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 1$ sea 1.

Pregunta 3.2

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2x-1} & \text{si } x < 0, \\ \frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

3.2.a) (0,5 puntos) Determine el dominio de $f(x)$.

3.2.b) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.

3.2.c) (1,5 puntos) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 4.1 o 4.2.

Pregunta 4.1

Sean A , B y C tres sucesos. Se sabe que A y B son independientes. Además, se conoce la siguiente información:

$$P(A) = 0.4, P(\bar{B}) = 0.7,$$

$$P(C) = 0.5, P(A \cap B / C) = 0.2$$

donde $\bar{B}$ denota el suceso complementario de B .

4.1.a) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que no ocurra A o no ocurra B .

4.1.b) (0,75 puntos) Determine la probabilidad de que A y $\bar{B}$ ocurran simultáneamente.

4.1.c) (1 punto) Obtenga $P(C / A \cap B)$.

Pregunta 4.2

En una clínica veterinaria se utiliza una prueba médica para detectar la insuficiencia renal en gatos adultos. Se sabe lo siguiente:

- El porcentaje de gatos adultos con insuficiencia renal es del 5%.
- Si el gato adulto tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el 90% de las veces.
- Si el gato adulto no tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el 10% de las veces.

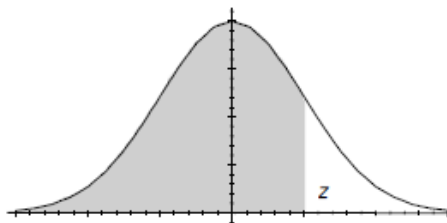
4.2.a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que un gato adulto seleccionado al azar dé un resultado negativo en la prueba.

4.2.b) (1,25 puntos) La prueba en un gato adulto ha resultado positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga insuficiencia renal?

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

La empresa tecnológica Pear acaba de lanzar la nueva versión para 2025 de su smartphone insignia, el P25. En la red social *Rettwt* se ha generado una alta expectación y los primeros compradores del P25 han comenzado a publicar fotos con sus dispositivos y sus opiniones. La mayoría de estas opiniones son positivas, pero hay una minoría de usuarios que reporta un calentamiento excesivo del P25 que genera en pantalla el mensaje de aviso “El P25 necesita enfriarse para poder usarlo”.

Con el objetivo de recabar más información para su próximo vídeo, el youtuber *@solo_reviews* ha abierto un hilo para solicitar a los compradores verificados del P25 que reporten si han experimentado o no sobrecalentamiento repentino en sus smartphones, entendiendo este como el que origina el aviso en condiciones normales de uso.

Un total de 288 compradores verificados responden en el hilo, de los cuales 20 reportan haber visto el mensaje de enfriamiento necesario en condiciones de uso normales. Dado el perfil de los seguidores de *@solo_reviews*, se asume que esta es una muestra aleatoria simple.

Ante el ruido generado en las redes sociales, la empresa Pear lanza el siguiente comunicado en *Rettwt*:

En Pear aclaramos: no hay problemas generalizados en nuestro nuevo P25. El sobrecalentamiento afecta al 2% de dispositivos al estar exclusivamente limitado a un lote defectuoso de un proveedor. Estamos contactando a los clientes afectados para ofrecer una solución inmediata.

#PearSupport #P25

1.a) (1,25 puntos) Asumiendo que el comunicado de Pear es cierto, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que el número de smartphones defectuosos reportados en el hilo de *@solo_reviews* hubiese sido superior o igual a 11.

1.b) (1,25 puntos) Obtenga un intervalo del 99% de confianza para la proporción de smartphones defectuosos a partir del hilo de *@solo_reviews*. ¿Es cuestionable la veracidad del comunicado de Pear?

1.a) Consideramos la variable aleatoria X que cuenta el número de teléfonos defectuosos de un grupo de 288.

Esta variable es una binomial de parámetros $n = 288$ y $p =$ probabilidad de que un móvil esté defectuoso $= 0.02$. $X = B(288, 0.02)$.

Como el número de repeticiones es muy alto aproximamos esta binomial a una normal de media $n \cdot p = 288 \cdot 0.02 = 5.76$ y desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{288 \cdot 0.02 \cdot 0.98} \approx 2.376$.

$Y = N(5.76, 2.376)$.

Esta aproximación es buena pues $np = 5.76 > 5$ y $nq = 288 \cdot 0.98 = 282.24 > 5$

Nos piden calcular $P(X \geq 11)$.

$$P(X \geq 11) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 10.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{10.5 - 5.76}{2.376}\right) = P(Z \geq 1.99) = 1 - P(Z \leq 1.99) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9767 = \boxed{0.0233}$$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

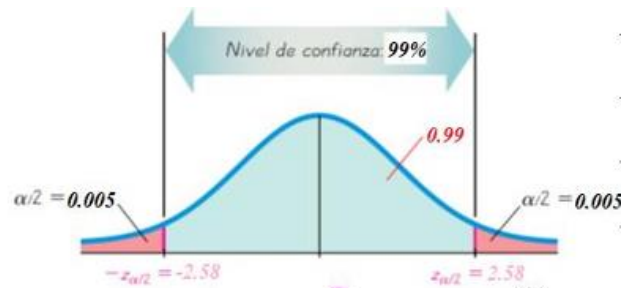
La probabilidad de que el número de smartphones defectuosos reportados en el hilo de @solo_reviews hubiese sido superior o igual a 11 es de 0.0233.

1.b) El tamaño muestral es $n = 288$.

La proporción muestral de teléfonos defectuosos es $\frac{20}{288} \approx 0.069$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2,575$$



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951

Sustituimos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.02 \cdot 0.98}{288}} \approx 0.021$$

El intervalo de confianza será:

$$(p - Error, p + Error) = (0.068 - 0.021, 0.068 + 0.021) = (0.047, 0.089)$$

¿Es cuestionable la veracidad del comunicado de Pear?

En el comunicado se dice que el porcentaje de teléfonos defectuosos es del 2% que significa una proporción de 0.02 que no pertenece al intervalo de confianza calculado.

La afirmación del comunicado es cuestionable con una confianza del 99%.

Pregunta 2.1

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ (a+1)x + az = 5 \end{cases}$$

2.1.a) (1.25 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a .

2.1.b) (1.25 puntos) Resuelva el sistema para $a = 2$.

2.1.a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a+1 & 0 & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ a+1 & 0 & a & 5 \end{pmatrix}$.

El determinante de A es $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a+1 & 0 & a \end{vmatrix} = -a + a + 1 + 0 + a + 1 - 2a - 0 = 2 - a$.

Veamos cuando se anula.

$$|A| = 0 \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 2$$

Analizamos dos casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1 \quad 1 \quad 3 \\ -2 \quad -2 \quad -2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad -3 \quad -1 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 0 \quad 2 \quad 5 \\ -3 \quad -3 \quad -3 \quad -6 \\ \hline 0 \quad -3 \quad -1 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -3 \quad -1 \quad -1 \\ 0 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 2}^{A/B} \\ 0 \quad -3 \quad -1 \quad -1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

2.1.b) Lo resolvemos para $a = 2$. Sabemos que es compatible indeterminado (CASO 2). Lo resolvemos a partir del sistema triangular obtenido.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & A/B \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ -3y - z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 1 - 3y = z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y + 1 - 3y = 2 \Rightarrow x - 2y = 1 \Rightarrow x = 1 + 2y \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Para $a = 2$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}.$

Pregunta 2.2

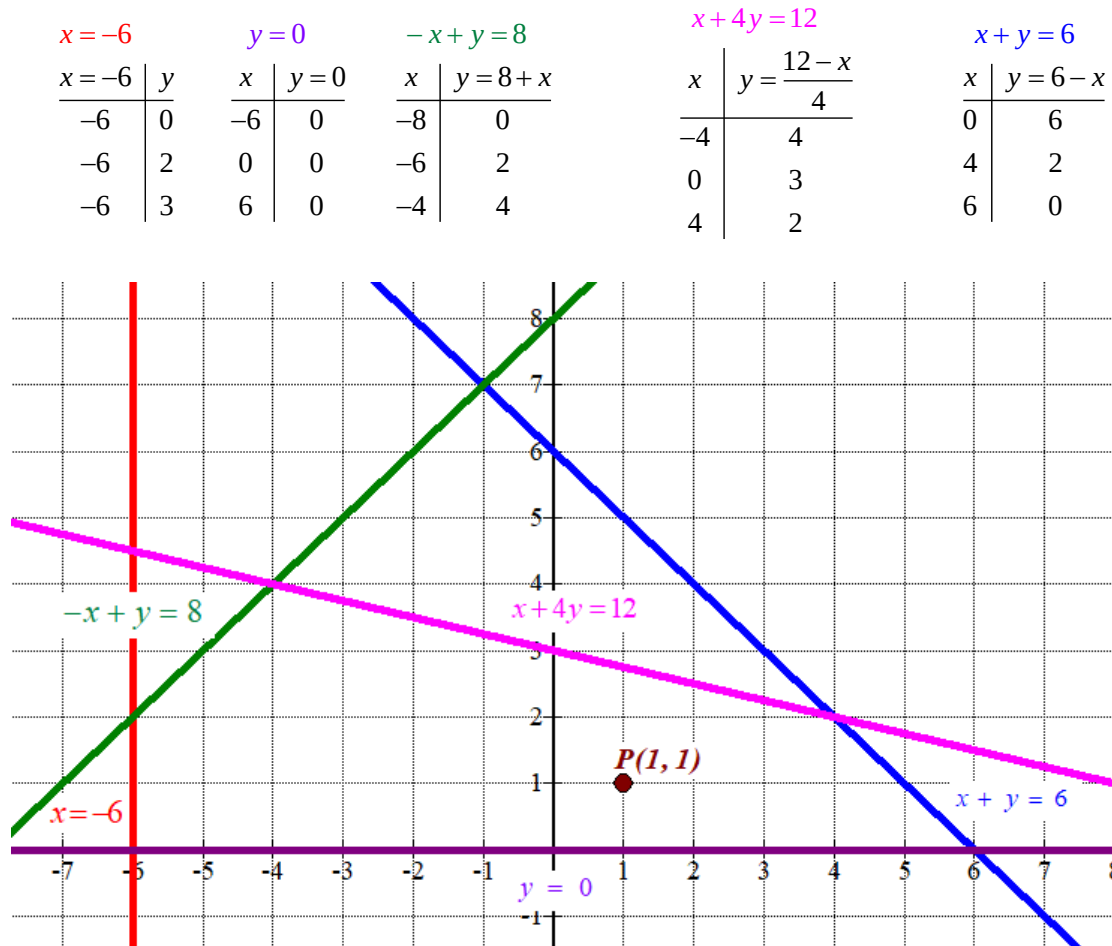
Sean x e y dos números reales tales que

$$x \geq -6, y \geq 0, -x + y \leq 8, x + 4y \leq 12, x + y \leq 6$$

2.2.a) (2 puntos) Represente gráficamente la región S determinada por las restricciones y calcule las coordenadas de sus vértices.

2.2.b) (0,5 puntos) Se desea maximizar el doble de y menos el triple de x en S . Indique el valor máximo y el punto de la región en el cual se alcanza.

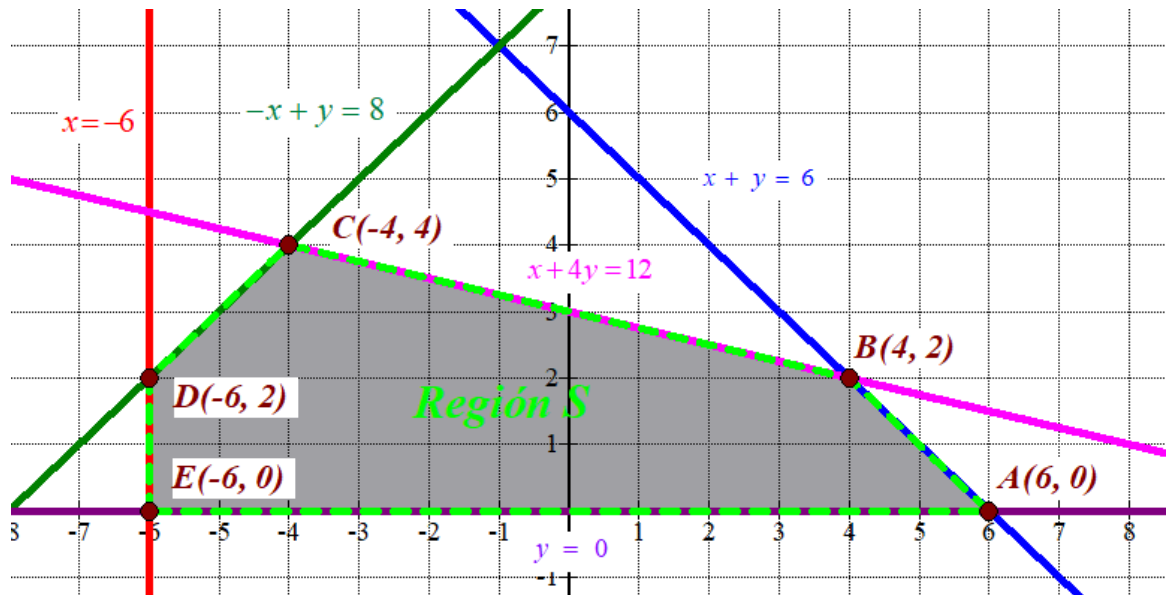
2.2.a) Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región S .



Como las restricciones son $x \geq -6$, $y \geq 0$, $-x + y \leq 8$, $x + 4y \leq 12$, $x + y \leq 6$ la región S está por debajo de las rectas verde, azul y rosa, por encima de la recta horizontal que coincide con el eje de abscisas y a la derecha de la recta vertical roja. Lo comprobamos viendo si el punto $P(1, 1)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$1 \geq -6, 1 \geq 0, -1 + 1 \leq 8, 1 + 4 \leq 12, 1 + 1 \leq 6 \quad \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región S en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices de la región S .



Los vértices de la región S son A(6, 0), B(4, 2), C(-4, 4), D(-6, 2) y E(-6, 0).

2.2.b) Valoramos la función $f(x, y) = 2y - 3x$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(6, 0) \rightarrow f(6, 0) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 6 = -18$$

$$B(4, 2) \rightarrow f(4, 2) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = -10$$

$$C(-4, 4) \rightarrow f(-4, 4) = 2 \cdot 4 - 3(-4) = 20$$

$$D(-6, 2) \rightarrow f(-6, 2) = 2 \cdot 2 - 3(-6) = 22 \text{ Máximo}$$

$$E(-6, 0) \rightarrow f(-6, 0) = 2 \cdot 0 - 3(-6) = 18$$

El valor máximo que alcanza la función en la región S es 22 y se consigue en el vértice D(-6, 2).

Pregunta 3.1

Considere la función real de variable real

$$f(x) = x(x^2 + a),$$

donde $a > 0$ es un parámetro real.

3.1.a) (1 punto) Calcule el valor de a para que la primitiva de $f(x)$, $F(x)$, cumpla que $F(0) = 0$ y $F(1) = 1$.

3.1.b) (0,5 puntos) Para $a = \frac{3}{2}$, obtenga el área del recinto delimitado por $f(x)$, el eje horizontal y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

3.1.c) (1 punto) Halle los valores de a que hacen que la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 1$ sea 1.

3.1.a) Hallamos la expresión de la primitiva $F(x)$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x(x^2 + a) dx = \int x^3 + ax dx = \frac{x^4}{4} + a \frac{x^2}{2} + K$$

Determinamos el valor de a y K para que se cumpla que $F(0) = 0$ y $F(1) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{x^4}{4} + a \frac{x^2}{2} + K \\ F(0) = 0 \\ F(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{0^4}{4} + a \frac{0^2}{2} + K = 0 \\ \frac{1^4}{4} + a \frac{1^2}{2} + K = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{K = 0} \\ \frac{1}{4} + \frac{a}{2} + K = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{a}{2} + 0 = 1 \Rightarrow 1 + 2a = 4 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$$

El valor de a buscado es $a = \frac{3}{2}$.

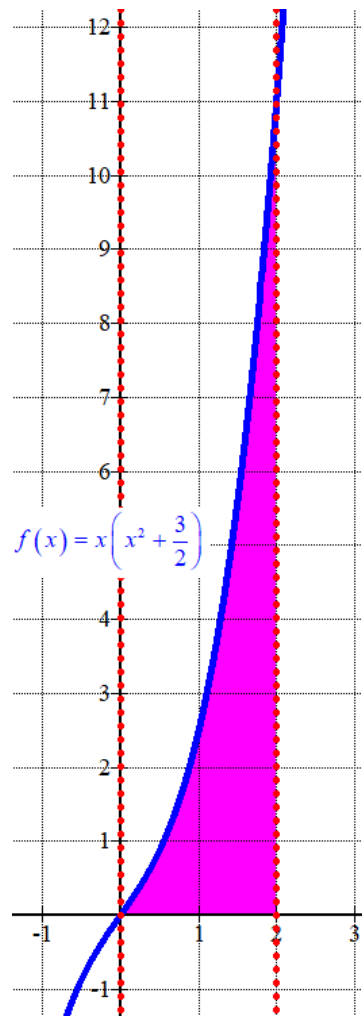
3.1.b) Para $a = \frac{3}{2}$ la función queda $f(x) = x\left(x^2 + \frac{3}{2}\right)$. Determinamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x\left(x^2 + \frac{3}{2}\right) \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x\left(x^2 + \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left\{ x^2 + \frac{3}{2} \neq 0 \right\} \Rightarrow x = 0$$

El único punto de corte está en $x = 0$. Entre 0 y 2 la función es positiva.

El área del recinto delimitado por $f(x)$, el eje horizontal y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$ se obtiene con la integral definida entre 0 y 2 de la función.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 x\left(x^2 + \frac{3}{2}\right) dx = \int_0^2 x^3 + \frac{3}{2}x dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4} \right]_0^2 = \\ &= \left[\frac{2^4}{4} + \frac{3 \cdot 2^2}{4} \right] - \left[\frac{0^4}{4} + \frac{3 \cdot 0^2}{4} \right] = 4 + 3 = \boxed{7u^2} \end{aligned}$$



3.1.c) Si la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x=1$ vale 1 entonces la derivada de la función en el punto $x=1$ vale 1 $\rightarrow f'(1)=1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + ax \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + a \\ f'(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = 3 \cdot 1^2 + a \Rightarrow \boxed{a = 1 - 3 = -2}$$

El valor buscado es $a = -2$.

Pregunta 3.2

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2x-1} & \text{si } x < 0, \\ \frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

3.2.a) (0,5 puntos) Determine el dominio de $f(x)$.

3.2.b) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.

3.2.c) (1,5 puntos) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

3.2.a) En el intervalo $(-\infty, 0)$ la función tiene la expresión $f(x) = \frac{x}{2x-1}$. El denominador se anula para $x = 0.5$ que no pertenece al intervalo de definición $(-\infty, 0)$. La función no plantea problemas de definición en este intervalo.

En el intervalo $(0, +\infty)$ la función tiene la expresión $f(x) = \frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9}$. El denominador se anula para $x = -3$ que no pertenece al intervalo de definición $(0, +\infty)$, también se anula para $x = 3$ que si pertenece al intervalo $(0, +\infty)$.

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{3\}$.

3.2.b) La función es continua en $(-\infty, 0)$. También es continua en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$. Estudiamos su continuidad en el cambio de definición $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{4 \cdot 0^3 + 0^2}{0^2 - 9} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2x-1} = \frac{0}{2 \cdot 0 - 1} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

La función es continua en $x = 0$. La función es continua en todo su dominio $\mathbb{R} - \{3\}$.

3.2.c) Asíntotas verticales $x = a$

¿ $x = 3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} = \frac{4 \cdot 3^3 + 3^2}{3^2 - 9} = \frac{117}{0} = \infty$$

$x = 3$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

Cuando x tiende a $-\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

La recta $y = \frac{1}{2}$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Cuando x tiende a $+\infty$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x = +\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Cuando x tiende a $-\infty$ la función tiene asíntota horizontal y no puede tener asíntota oblicua.

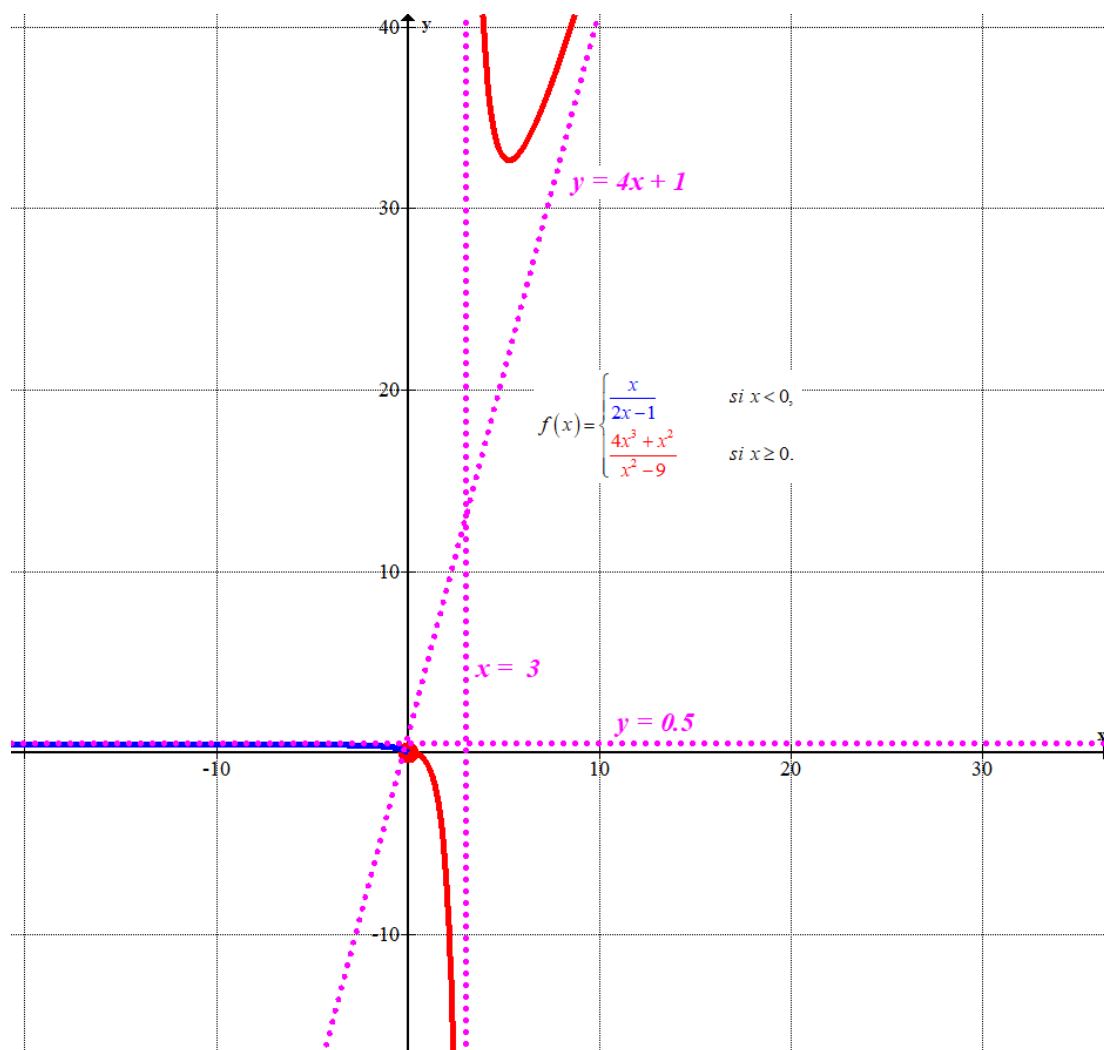
Cuando x tiende a $+\infty$ la función no tiene asíntota horizontal y puede tener asíntota oblicua.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + x^2}{x^3 - 9x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 = 4$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} - 4x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + x^2 - 4x^3 + 36x}{x^2 - 9} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 36x}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

La recta $y = 4x + 1$ es asíntota oblicua de la función cuando x tiende a $+\infty$.



Resumiendo: $x = 3$ es asíntota vertical. La recta $y = \frac{1}{2}$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$. La recta $y = 4x + 1$ es asíntota oblicua de la función cuando x tiende a $+\infty$.

Pregunta 4.1

Sean A, B y C tres sucesos. Se sabe que A y B son independientes. Además, se conoce la siguiente información:

$$P(A) = 0.4, P(\bar{B}) = 0.7,$$

$$P(C) = 0.5, P(A \cap B / C) = 0.2$$

donde $\bar{B}$ denota el suceso complementario de B.

4.1.a) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que no ocurra A o no ocurra B.

4.1.b) (0,75 puntos) Determine la probabilidad de que A y $\bar{B}$ ocurran simultáneamente.

4.1.c) (1 punto) Obtenga $P(C / A \cap B)$.

Si A y B son independientes entonces:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(A)(1 - P(\bar{B})) = 0.4(1 - 0.7) = 0.12$$

Aplicando el teorema de Bayes tenemos:

$$P(A \cap B / C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \Rightarrow 0.2 = \frac{P(A \cap B \cap C)}{0.5} \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1$$

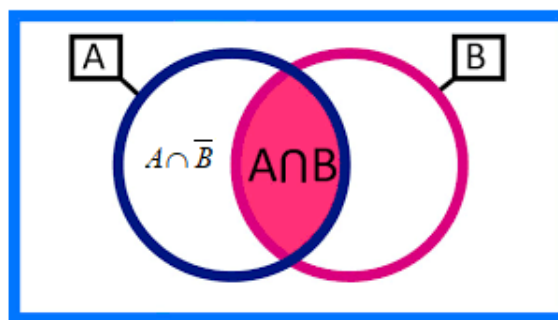
4.1.a) Debemos calcular $P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.12 = \boxed{0.88}$$

La probabilidad de que no ocurra A o no ocurra B vale 0.88.

4.1.b) Nos piden calcular $P(A \cap \bar{B})$.

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.12 = \boxed{0.28}$$



La probabilidad de que A y $\bar{B}$ ocurran simultáneamente vale 0.28.

4.1.c) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C / A \cap B) = \frac{P(C \cap A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{0.1}{0.12} = \boxed{\frac{5}{6} \approx 0.8333}$$

Pregunta 4.2

En una clínica veterinaria se utiliza una prueba médica para detectar la insuficiencia renal en gatos adultos. Se sabe lo siguiente:

- El porcentaje de gatos adultos con insuficiencia renal es del 5%.
- Si el gato adulto tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el 90% de las veces.
- Si el gato adulto no tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el 10% de las veces.

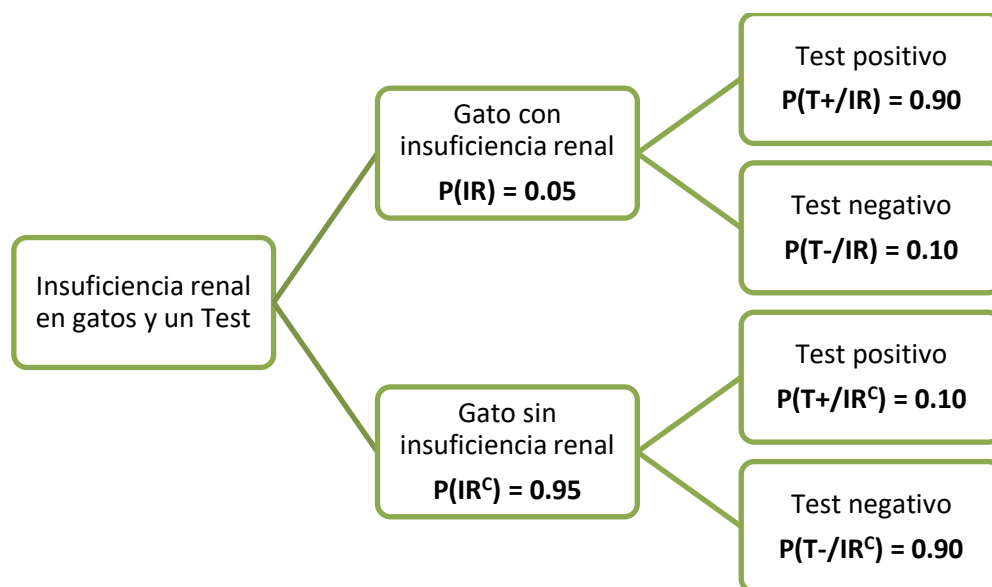
4.2.a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que un gato adulto seleccionado al azar dé un resultado negativo en la prueba.

4.2.b) (1,25 puntos) La prueba en un gato adulto ha resultado positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga insuficiencia renal?

Llamamos IR al suceso “el gato tiene insuficiencia renal”, T+ a “la prueba da positivo” y T− a “la prueba da negativo”.

Sabemos que $P(IR) = 0.05$, $P(T+|IR) = 0.90$ y $P(T+|IR^c) = 0.10$.

Realizamos un diagrama de árbol.



4.2.a) Nos piden calcular $P(T-)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T-) = P(IR)P(T-/IR) + P(IR^c)P(T-/IR^c) = 0.05 \cdot 0.1 + 0.95 \cdot 0.9 = \boxed{0.86}$$

La probabilidad de que un gato adulto seleccionado al azar dé un resultado negativo en la prueba tiene un valor de 0.86.

4.2.b) Nos piden calcular $P(IR|T+)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(IR|T+) = \frac{P(IR \cap T+)}{P(T+)} = \frac{P(IR)P(T+/IR)}{1 - P(T-)} = \frac{0.05 \cdot 0.9}{1 - 0.86} = \boxed{\frac{9}{28} \approx 0.3214}$$

La probabilidad de que un gato que ha dado positivo en el test tenga insuficiencia renal tiene un valor de $\frac{9}{28} \approx 0.3214$.