



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
307 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
PAU2025 – JULIO

NOTA IMPORTANTE: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones. Las cuestiones se pueden hacer en cualquier orden. En cada APARTADO se debe hacer sólo la CUESTIÓN 1 o la CUESTIÓN 2. La elección de CUESTIÓN 1 o CUESTIÓN 2 puede cambiar de un apartado a otro. Si se responden las 2 CUESTIONES de un apartado, solo se corregirá la primera CUESTIÓN contestada. Cada cuestión tiene una puntuación entre 2 y 3 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

APARTADO 1 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1: [2,5 puntos]

[0,5 puntos] Calcula el valor de a para que $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2a-1 & a \end{vmatrix} = 0$.

[2 puntos] Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde a es un número real desconocido:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = a \\ 3x + 2y - az = 4 \end{cases}$$

- a) Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a . **[1 punto]**
b) Resuelve el sistema para $a = 1$. **[1 punto]**

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] El famoso tiktoker Peldanhos produce videos tanto para TikTok como para YouTube. Cada video de TikTok le genera 40 euros de ingresos, mientras que cada video de YouTube le genera 20 euros. Hay tres fases en el proceso de creación de videos: planificación, grabación y edición. La planificación de contenido para TikTok requiere 4 horas por video, mientras que para YouTube solo requiere 1 hora. Peldanhos dispone de 36 horas semanales para planificar contenido. Cada video de TikTok requiere 1 hora de grabación, mientras que cada video de YouTube requiere 2 horas. Peldanhos dispone de un máximo de 20 horas semanales para grabar. Finalmente, para la edición Peldanhos emplea 1 hora para cada uno de los dos tipos de videos y puede dedicar hasta 12 horas semanales a la edición. Se pide:

- a) Si Peldanhos quiere maximizar el ingreso semanal, formula el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,5 puntos]**
b) Representa la región factible. **[0,75 puntos]**
c) Encuentra los vértices de esta región. **[0,5 puntos]**
d) ¿Cuántos videos de cada plataforma debe producir semanalmente para maximizar sus ingresos? **[0,5 puntos]**
e) Calcula el ingreso máximo semanal posible. **[0,25 puntos]**

APARTADO 2 (a elegir una cuestión):**CUESTIÓN 1: [3 puntos]** Dada la función:

$$f(x) = \frac{-9 + x^2}{x^2 - 4}$$

- a) Determina su dominio y los puntos de corte de la gráfica de $f(x)$ con los ejes de coordenadas. **[0,5 puntos]**
- b) Estudia sus asíntotas. **[0,5 puntos]**
- c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. **[1 punto]**
- d) Halla y clasifica sus extremos relativos. **[0,25 puntos]**
- e) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$. **[0,75 puntos]**

CUESTIÓN 2: [3 puntos] El beneficio mensual en euros de la hamburguesería Jamburguer, que el verano pasado abrió sus puertas en un conocido centro comercial de Murcia, viene dado por:

$$B(x) = 144x - 0.1x^2 - 50000$$

donde x es el número de hamburguesas vendidas mensualmente.

- a) Si actualmente Jamburguer vende 750 hamburguesas al mes, ¿obtendrá pérdidas o ganancias? **[0,5 puntos]**
- b) Evalúa e interpreta la primera derivada de $B(x)$ en $x = 750$. ¿Qué recomendarías al propietario? **[0,5 puntos]**
- c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $B(x)$. **[1 punto]**
- d) Determina el número de hamburguesas que maximiza el beneficio mensual de esta hamburguesería. **[0,75 puntos]**
- e) ¿Cuál es el beneficio máximo mensual? **[0,25 puntos]**

APARTADO 3 (a elegir una cuestión):**CUESTIÓN 1:****[2 puntos]** Realiza:

- a) Calcula $\int \left(\frac{2}{x-1} + 3\sqrt{x} \right) dx$. **[0,25 puntos]**
- b) Calcula el área limitada por la función $f(x) = -x^2 + 4x$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 4$. **[1,75 puntos]**

CUESTIÓN 2:**[2 puntos]** Realiza:

- a) Calcula $\int \left(\frac{1}{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{3}e^{3x} \right) dx$. **[0,25 puntos]**
- b) Calcula el área limitada por la función $f(x) = 4 - x^2$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. **[1,75 puntos]**

APARTADO 4 (a elegir una cuestión):**CUESTIÓN 1:**

[2,5 puntos] En una encuesta realizada por el Departamento de Orientación de un instituto a 100 estudiantes de segundo de bachillerato, se obtuvo que 30 de ellos quieren estudiar Veterinaria, 25 Economía, 20 Química, 15 Biología y 10 Matemáticas. De ellos, 10, 12, 13, 8 y 6 son mujeres respectivamente. Además, la orientadora del centro les ha informado que no es posible que se matriculen en más de un grado.

- a) Si se elige a un estudiante al azar del grupo estudiado, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **[0,25 puntos]**
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, sea hombre y estudie Veterinaria? **[0,25 puntos]**
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, estudie Química o Veterinaria? **[0,25 puntos]**
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, no estudie ni Biología ni Matemáticas? **[0,5 puntos]**
- e) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, estudie Química, dado que se trata de una mujer? **[0,5 puntos]**
- f) Si el estudiante seleccionado al azar es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que estudie Economía? **[0,75 puntos]**

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] El número de horas semanales que los estudiantes de segundo de bachillerato de una pedanía de Murcia dedican a ver series en inglés en HBO Max sigue una distribución normal con media μ y desviación típica igual a 2 horas.

- a) Si en una muestra de 100 estudiantes, el número medio de horas semanales que dedican a ver series en inglés en HBO Max han sido de 8 horas, calcula un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media de las horas semanales que dedican a esta actividad. **[1 punto]**
- b) Determina el tamaño mínimo que debe tener una muestra de estudiantes para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 0.5 horas con un nivel de confianza del 99%. **[0,75 puntos]**
- c) Si $\mu = 8.2$ y se elige a un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dedique más de 9 horas semanales a ver series en inglés en HBO Max? **[0,75 puntos]**

SOLUCIONES**APARTADO 1 (a elegir una cuestión):****CUESTIÓN 1: [2,5 puntos]**

[0,5 puntos] Calcula el valor de a para que $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2a-1 & a \end{vmatrix} = 0$.

[2 puntos] Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde a es un número real desconocido:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = a \\ 3x + 2y - az = 4 \end{cases}$$

a) Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a . **[1 punto]**

b) Resuelve el sistema para $a = 1$. **[1 punto]**

1)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2a-1 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1=a}$$

Se cumple para $a = 1$.

2) a) Discutimos el sistema utilizando el método de Gauss y obtenemos un sistema triangular equivalente al inicial.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = a \\ 3x + 2y - az = 4 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x & -y & +z & = a \\ -2x & +2y & -2z & = -2 \\ \hline & y & -z & = a-2 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{cases} \\ \begin{cases} \text{Ecuación } 3^a - 3 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 3x & +2y & -az & = 4 \\ -3x & +3y & -3z & = -3 \\ \hline & 5y & -(a+3)z & = 1 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = a - 2 \\ 5y - (a+3)z = 1 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 3^a - 5 \cdot \text{Ecuación } 2^a \\ 5y & -(a+3)z & = 1 \\ -5y & +5z & = -5a+10 \\ \hline & (-a+2)z & = -5a+11 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = a - 2 \\ (-a+2)z = -5a+11 \end{cases} \end{aligned}$$

Este sistema triangular obtenido es compatible determinado cuando $-a+2 \neq 0 \rightarrow a \neq 2$.

Si $a = 2$ el sistema equivalente queda $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$. Tenemos una igualdad imposible. El

sistema es incompatible.

Resumiendo: Para $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado y para $a = 2$ el sistema es incompatible.

b) Para $a = 1$ hemos visto en el apartado anterior que el sistema es compatible determinado. El

$$\text{sistema queda } \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases} \text{ y su sistema triangular equivalente es } \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = -1 \\ z = 6 \end{cases}.$$

Determinamos la solución del sistema partiendo del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = -1 \\ \boxed{z = 6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 6 = 1 \\ y - 6 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -5 \\ \boxed{y = 5} \end{cases} \Rightarrow x - 5 = -5 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

La solución del sistema es $x = 0, y = 5, z = 6$.

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] El famoso tiktoker Peldanhos produce videos tanto para TikTok como para YouTube. Cada video de TikTok le genera 40 euros de ingresos, mientras que cada video de YouTube le genera 20 euros. Hay tres fases en el proceso de creación de videos: planificación, grabación y edición. La planificación de contenido para TikTok requiere 4 horas por video, mientras que para YouTube solo requiere 1 hora. Peldanhos dispone de 36 horas semanales para planificar contenido. Cada video de TikTok requiere 1 hora de grabación, mientras que cada video de YouTube requiere 2 horas. Peldanhos dispone de un máximo de 20 horas semanales para grabar. Finalmente, para la edición Peldanhos emplea 1 hora para cada uno de los dos tipos de videos y puede dedicar hasta 12 horas semanales a la edición. Se pide:

- Si Peldanhos quiere maximizar el ingreso semanal, formula el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,5 puntos]**
- Representa la región factible. **[0,75 puntos]**
- Encuentra los vértices de esta región. **[0,5 puntos]**
- ¿Cuántos videos de cada plataforma debe producir semanalmente para maximizar sus ingresos? **[0,5 puntos]**
- Calcula el ingreso máximo semanal posible. **[0,25 puntos]**

- a) Llamamos x = número de videos de TikTok, y = número de videos de YouTube.
Realizamos una tabla para organizar toda la información proporcionada en el problema.

	Horas planificación	Horas grabación	Horas edición	Ingresos
TikTok (x)	$4x$	x	x	$40x$
YouTube (y)	y	$2y$	y	$20y$
TOTAL	$4x + y$	$x + 2y$	$x + y$	$40x + 20y$

La función objetivo son los ingresos semanales que deseamos maximizar: $I(x, y) = 40x + 20y$.

Las restricciones nos dan las siguientes inecuaciones.

Peldanhos dispone de 36 horas semanales para planificar contenido. $\rightarrow 4x + y \leq 36$

Peldanhos dispone de un máximo de 20 horas semanales para grabar $\rightarrow x + 2y \leq 20$

puede dedicar hasta 12 horas semanales a la edición $\rightarrow x + y \leq 12$

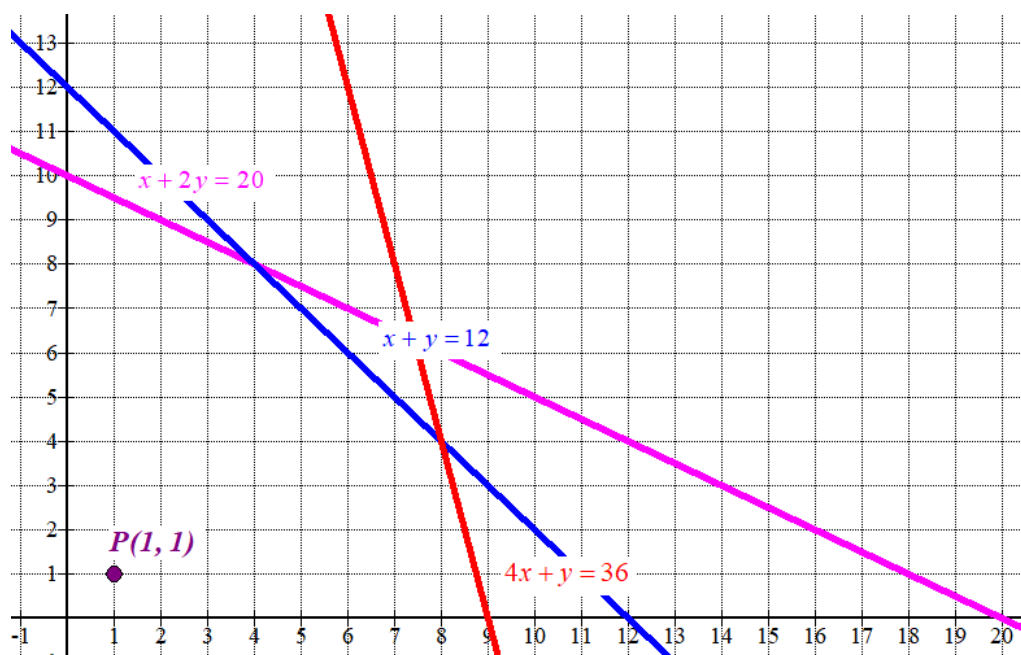
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

La región factible es la zona del plano que contiene los puntos que cumplen el sistema de inecuaciones siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + y \leq 36 \\ x + 2y \leq 20 \\ x + y \leq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$4x + y = 36$	$x + 2y = 20$	$x + y = 12$	
$x \mid y = 36 - 4x$	$x \mid y = \frac{20 - x}{2}$	$x \mid y = 12 - x$	$x \geq 0; y \geq 0$
0 $\mid$ 36	0 $\mid$ 10	0 $\mid$ 12	Primer
8 $\mid$ 4	4 $\mid$ 8	4 $\mid$ 8	cuadrante
9 $\mid$ 0	20 $\mid$ 0	8 $\mid$ 4	



Como las restricciones son:

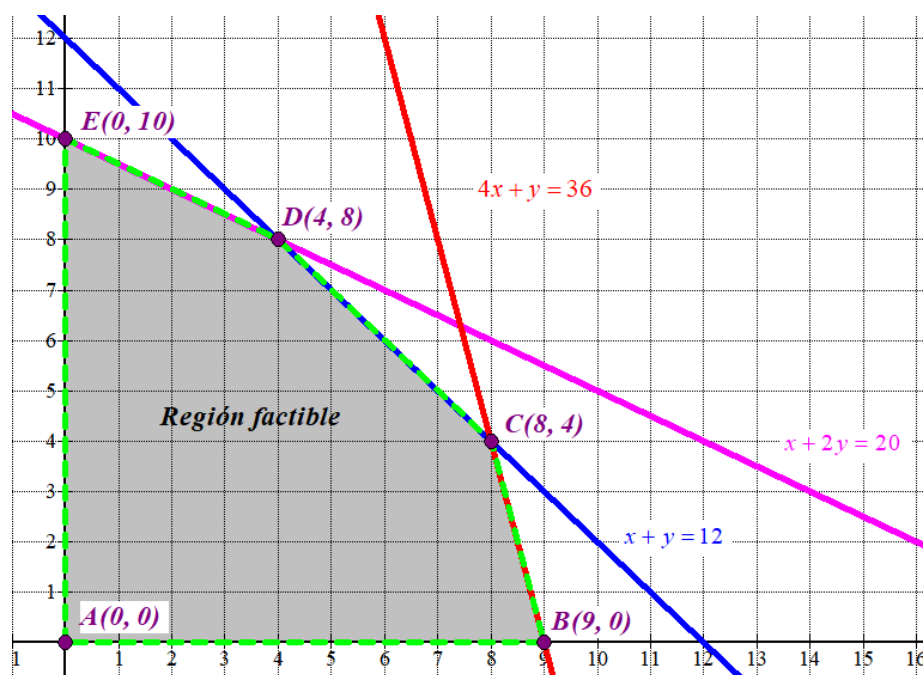
$$\left. \begin{array}{l} 4x + y \leq 36 \\ x + 2y \leq 20 \\ x + y \leq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la zona del primer cuadrante que}$$

está por debajo de las rectas rosa, azul y roja.

Comprobamos que el punto $P(1, 1)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 4 + 1 \leq 36 \\ 1 + 2 \leq 20 \\ 1 + 1 \leq 12 \\ 1 \geq 0; 1 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas.}$$

Coloreo de gris la región factible en el siguiente dibujo.



- c) Las coordenadas de los vértices se aprecian en el dibujo y se pueden también comprobar en las tablas de valores. Los vértices son: A(0,0), B(9,0), C(8, 4), D(4, 8) y E(0, 10)
- d) Valoramos la función objetivo $I(x, y) = 40x + 20y$ en cada uno de los vértices en busca del máximo valor.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(9, 0) \rightarrow I(9, 0) = 40 \cdot 9 + 20 \cdot 0 = 360$$

$$C(8, 4) \rightarrow I(8, 4) = 40 \cdot 8 + 20 \cdot 4 = 400 \text{ Máximo}$$

$$D(4, 8) \rightarrow I(4, 8) = 40 \cdot 4 + 20 \cdot 8 = 320$$

$$E(0, 10) \rightarrow I(0, 10) = 40 \cdot 0 + 20 \cdot 10 = 200$$

Los ingresos máximos se obtienen en el punto C(8, 4). Significa que se deben realizar semanalmente 8 videos de TikTok y 4 de YouTube para obtener los ingresos máximos.

- e) Los ingresos máximos semanales que se puede conseguir son de 400 euros.

APARTADO 2 (a elegir una cuestión):**CUESTIÓN 1: [3 puntos]** Dada la función:

$$f(x) = \frac{-9 + x^2}{x^2 - 4}$$

a) Determina su dominio y los puntos de corte de la gráfica de $f(x)$ con los ejes de coordenadas.**[0,5 puntos]**b) Estudia sus asíntotas. **[0,5 puntos]**c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. **[1 punto]**d) Halla y clasifica sus extremos relativos. **[0,25 puntos]**e) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$. **[0,75 puntos]**

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-2, +2\}.$$

Hallamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{-9 + x^2}{x^2 - 4} \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-9 + x^2}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow -9 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} A(-3, 0) \\ B(3, 0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{-9 + x^2}{x^2 - 4} \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{-9 + 0^2}{0^2 - 4} = \frac{9}{4} \Rightarrow C\left(0, \frac{9}{4}\right)$$

Los puntos de corte con los ejes de coordenadas son $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$ y $C\left(0, \frac{9}{4}\right)$.b) **Asíntotas verticales.** $x = a$ ¿ $x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-9 + x^2}{x^2 - 4} = \frac{-9 + (-2)^2}{(-2)^2 - 4} = \frac{-5}{0} = \infty$$

 $x = -2$ es asíntota vertical.¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-9 + x^2}{x^2 - 4} = \frac{-9 + 2^2}{2^2 - 4} = \frac{-5}{0} = \infty$$

 $x = 2$ es asíntota vertical.**Asíntota horizontal.** $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-9 + x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal.**Asíntota oblicua.** $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

c) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{-9+x^2}{x^2-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(-9+x^2)}{(x^2-4)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 8x + 18x - \cancel{2x^3}}{(x^2-4)^2} = \frac{10x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{10x}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de este valor y los valores excluidos del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

$$f'(-3) = \frac{10(-3)}{((-3)^2-4)^2} = \frac{-30}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo $(-2, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{10(-1)}{((-1)^2-4)^2} = \frac{-10}{9} < 0. \text{ La función decrece en } (-2, 0).$$

- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{10}{(1^2-4)^2} = \frac{10}{9} > 0$. La

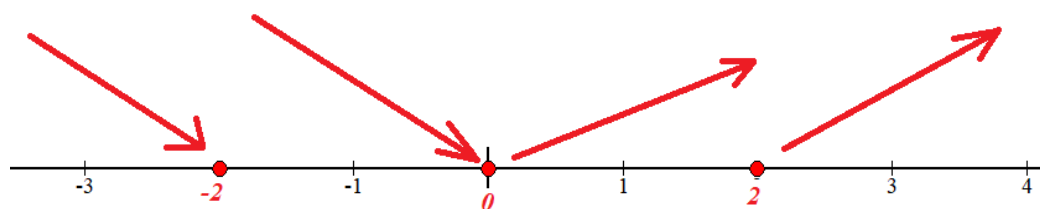
función crece en $(0, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{10 \cdot 3}{(3^2-4)^2} = \frac{30}{25} > 0$. La

función crece en $(2, +\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y crece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

d) Con el estudio anterior sabemos que la función sigue el esquema siguiente:



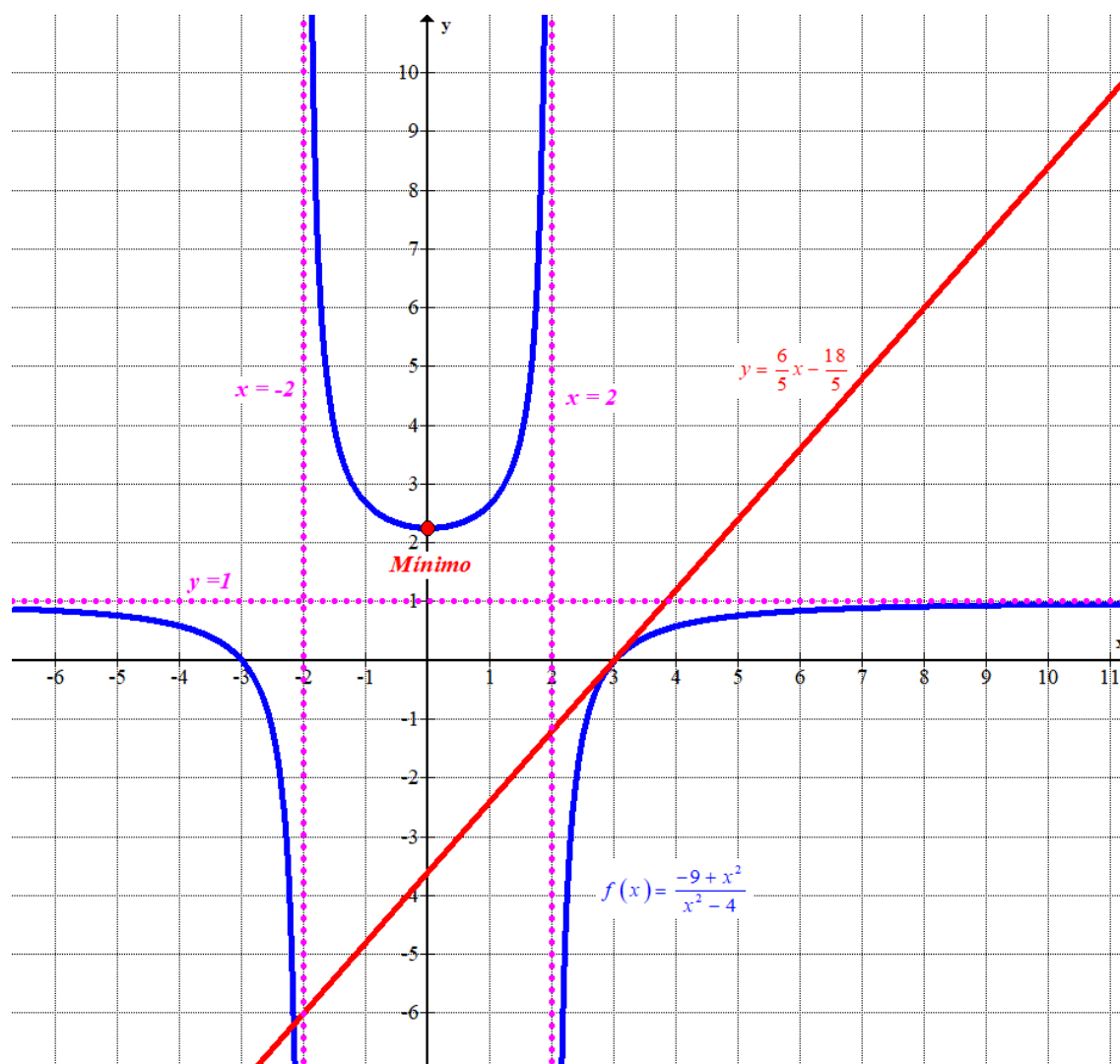
La función presenta un mínimo local en $x = 0$.

Como $f(0) = \frac{-9+0^2}{0^2-4} = \frac{9}{4}$ el mínimo local tiene coordenadas $\left(0, \frac{9}{4}\right)$.

e) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$ es

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3).$$

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= \frac{-9+3^2}{3^2-4} = 0 \\ f'(3) &= \frac{10 \cdot 3}{(3^2-4)^2} = \frac{6}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y-0 = \frac{6}{5}(x-3) \Rightarrow \boxed{y = \frac{6}{5}x - \frac{18}{5}}$$



CUESTIÓN 2: [3 puntos] El beneficio mensual en euros de la hamburguesería Jamburguer, que el verano pasado abrió sus puertas en un conocido centro comercial de Murcia, viene dado por:

$$B(x) = 144x - 0.1x^2 - 50000$$

donde x es el número de hamburguesas vendidas mensualmente.

- a) Si actualmente Jamburguer vende 750 hamburguesas al mes, ¿obtendrá pérdidas o ganancias? **[0,5 puntos]**
- b) Evalúa e interpreta la primera derivada de $B(x)$ en $x = 750$. ¿Qué recomendarías al propietario? **[0,5 puntos]**
- c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $B(x)$. **[1 punto]**
- d) Determina el número de hamburguesas que maximiza el beneficio mensual de esta hamburguesería. **[0,75 puntos]**
- e) ¿Cuál es el beneficio máximo mensual? **[0,25 puntos]**

- a) Calculamos los beneficios del mes con la venta de 750 hamburguesas.

$$B(750) = 144 \cdot 750 - 0.1 \cdot 750^2 - 50000 = 1750$$

Ese mes obtiene unas ganancias de 1750 euros.

- b) La derivada de la función es $B'(x) = 144 - 0.2x$. La primera derivada de $B(x)$ en $x = 750$ vale $B'(750) = 144 - 0.2 \cdot 750 = -6 < 0$. El signo negativo de la derivada indica que el beneficio mensual va decreciendo conforme aumentan el número de hamburguesas vendidas. Recomendaría al propietario no vender más de 750 hamburguesas. Vendiendo más hamburguesas el beneficio disminuye.

- c) Hallamos los puntos críticos de la función.

$$B'(x) = 0 \Rightarrow 144 - 0.2x = 0 \Rightarrow 144 = 0.2x \Rightarrow x = \frac{144}{0.2} = 720$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 720$.

- En el intervalo $(0, 720)$ consideramos $x = 100$ y la derivada vale $B'(100) = 144 - 0.2 \cdot 100 = 124 > 0$. La función crece en $(0, 720)$.
- En el intervalo $(720, +\infty)$ consideramos $x = 750$ y la derivada vale $B'(750) = -6 < 0$. La función decrece en $(720, +\infty)$.

El beneficio crece por debajo de 720 hamburguesas al mes y decrece por encima de 720 hamburguesas mensuales.

- d) Por lo visto en el apartado anterior el beneficio crece antes de 720 y decrece a partir de 720. Se deduce que el número de hamburguesas que maximiza el beneficio es de 720.
- e) Como $B(720) = 144 \cdot 720 - 0.1 \cdot 720^2 - 50000 = 1840$ podemos decir que el máximo beneficio que se puede conseguir es de 1840 euros.

APARTADO 3 (a elegir una cuestión):**CUESTIÓN 1:****[2 puntos]** Realiza:

a) Calcula $\int \left(\frac{2}{x-1} + 3\sqrt{x} \right) dx$. **[0,25 puntos]**

b) Calcula el área limitada por la función $f(x) = -x^2 + 4x$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.
[1,75 puntos]

a) Aplicamos las propiedades de la integración.

$$\int \left(\frac{2}{x-1} + 3\sqrt{x} \right) dx = \int \frac{2}{x-1} dx + \int 3\sqrt{x} dx = 2 \int \frac{1}{x-1} dx + 3 \int x^{1/2} dx =$$

$$= 2 \ln|x-1| + 3 \frac{x^{1+1/2}}{1+1/2} = 2 \ln|x-1| + 3 \frac{x^{3/2}}{3/2} = \boxed{2 \ln|x-1| + 2\sqrt{x^3} + C}$$

b) Hallamos los puntos de corte de la gráfica con el eje OX.

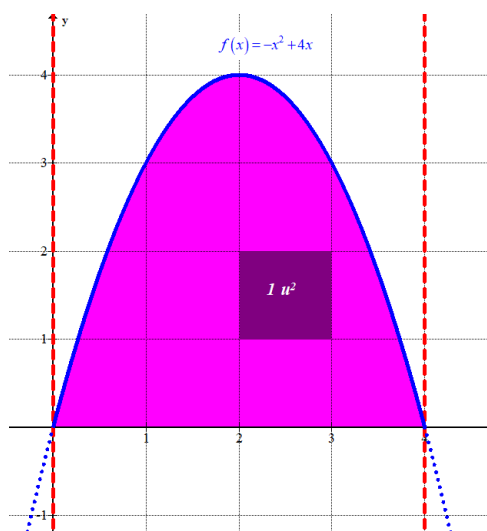
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 4x \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 4x = 0 \Rightarrow -x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x-4=0 \rightarrow \boxed{x=4} \end{cases}$$

Los dos puntos de corte están en los extremos de la región. Como $f(1) = -1^2 + 4 = 3 > 0$ la función es positiva en el intervalo $(0, 4)$ y el área limitada por la función $f(x) = -x^2 + 4x$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 4$ es el valor de la integral definida entre 0 y 4 de la función.

$$\text{Área} = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^4 -x^2 + 4x dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^4 =$$

$$= \left[-\frac{4^3}{3} + 2 \cdot 4^2 \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 2 \cdot 0^2 \right] = -\frac{64}{3} + 32 = \boxed{\frac{32}{3} \approx 10.667 \text{ u}^2}$$

El área tiene un valor de $\frac{32}{3} \approx 10.667$ unidades cuadradas.



CUESTIÓN 2:**[2 puntos]** Realiza:a) Calcula $\int \left(\frac{1}{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{3}e^{3x} \right) dx$. **[0,25 puntos]**b) Calcula el área limitada por la función $f(x) = 4 - x^2$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. **[1,75 puntos]**

a) Aplicando las propiedades de la integración.

$$\int \left(\frac{1}{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{3}e^{3x} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int 3\sqrt{x} dx + \int \frac{1}{3}e^{3x} dx = \int \frac{1}{x} dx + 3 \int x^{1/2} dx + \frac{1}{3} \int e^{3x} dx =$$

$$= \ln|x| + 3 \frac{x^{1+1/2}}{1+1/2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} e^{3x} = \ln|x| + 3 \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{1}{9} e^{3x} = \boxed{\ln|x| + 2\sqrt{x^3} + \frac{1}{9} e^{3x} + C}$$

b) Hallamos los puntos de corte de la gráfica con el eje OX.

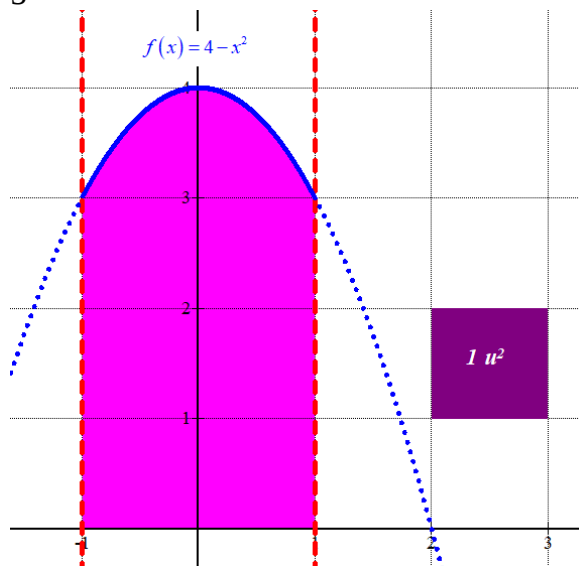
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 4 - x^2 \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Los dos puntos de corte están fuera del intervalo $(-1,1)$. Como $f(0) = 4 - 0^2 = 4 > 0$ la función es positiva en el intervalo $(-1, 1)$ y el área limitada por la función $f(x) = 4 - x^2$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$ es el valor de la integral definida entre -1 y 1 de la función.

$$\text{Área} = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 4 - x^2 dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \left[4 \cdot 1 - \frac{1^3}{3} \right] - \left[4(-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right] =$$

$$= 4 - \frac{1}{3} + 4 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{22}{3} \approx 7.333 u^2}$$

El área tiene un valor de $\frac{22}{3} \approx 7.333$ unidades cuadradas.



APARTADO 4 (a elegir una cuestión):**CUESTIÓN 1:**

[2,5 puntos] En una encuesta realizada por el Departamento de Orientación de un instituto a 100 estudiantes de segundo de bachillerato, se obtuvo que 30 de ellos quieren estudiar Veterinaria, 25 Economía, 20 Química, 15 Biología y 10 Matemáticas. De ellos, 10, 12, 13, 8 y 6 son mujeres respectivamente. Además, la orientadora del centro les ha informado que no es posible que se matriculen en más de un grado.

- a) Si se elige a un estudiante al azar del grupo estudiado, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **[0,25 puntos]**
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, sea hombre y estudie Veterinaria? **[0,25 puntos]**
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, estudie Química o Veterinaria? **[0,25 puntos]**
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, no estudie ni Biología ni Matemáticas? **[0,5 puntos]**
- e) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, estudie Química, dado que se trata de una mujer? **[0,5 puntos]**
- f) Si el estudiante seleccionado al azar es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que estudie Economía? **[0,75 puntos]**

Realizamos una tabla de contingencia para colocar de forma ordenada los datos proporcionados y obtener los datos que vienen implícitos en la información proporcionada.

	Veterinaria	Economía	Química	Biología	Matemáticas	TOTAL
Hombre						
Mujer	10	12	13	8	6	
TOTAL	30	25	20	15	10	100

Completamos la tabla.

	Veterinaria	Economía	Química	Biología	Matemáticas	TOTAL
Hombre	20	13	7	7	4	51
Mujer	10	12	13	8	6	49
TOTAL	30	25	20	15	10	100

Con toda esta información y aplicando la regla de Laplace respondemos a las preguntas planteadas.

- a) De los 100 estudiantes hay 49 mujeres. La probabilidad de que el estudiante elegido al azar sea mujer vale $\frac{49}{100} = 0.49$.
- b) De los 100 estudiantes hay 20 que son hombres que quieren estudiar veterinaria la probabilidad de que el estudiante elegido al azar sea hombre y estudie veterinaria vale $\frac{20}{100} = 0.2$.
- c) De los 100 estudiantes hay 20 que estudian Química y 30 que estudian Veterinaria. La probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, estudie Química o Veterinaria vale $\frac{20+30}{100} = 0.5$.

- d) De los 100 estudiantes hay 15 que quieren estudiar Biología y 10 que quieren estudiar Matemáticas, por lo que hay $100 - 15 - 10 = 75$ que no estudian ni Biología ni Matemáticas. La probabilidad de que el estudiante elegido al azar no estudie ni Biología ni Matemáticas vale $\frac{75}{100} = 0.75$.
- e) De las 49 mujeres hay 13 que quieren estudiar Química. La probabilidad de que el estudiante elegido al azar estudie Química, sabiendo que es mujer vale $\frac{13}{49} \approx 0.2653$.
- f) De los 51 hombres hay 13 que quieren estudiar Economía. La probabilidad de que el estudiante elegido al azar estudie Economía, sabiendo que es hombre vale $\frac{13}{51} \approx 0.255$.

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] El número de horas semanales que los estudiantes de segundo de bachillerato de una pedanía de Murcia dedican a ver series en inglés en HBO Max sigue una distribución normal con media μ y desviación típica igual a 2 horas.

- a) Si en una muestra de 100 estudiantes, el número medio de horas semanales que dedican a ver series en inglés en HBO Max han sido de 8 horas, calcula un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media de las horas semanales que dedican a esta actividad. **[1 punto]**
- b) Determina el tamaño mínimo que debe tener una muestra de estudiantes para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 0.5 horas con un nivel de confianza del 99%. **[0,75 puntos]**
- c) Si $\mu = 8.2$ y se elige a un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dedique más de 9 horas semanales a ver series en inglés en HBO Max? **[0,75 puntos]**

- a) Sea X la variable aleatoria que da el número de horas semanales que los estudiantes de segundo de bachillerato de una pedanía de Murcia dedican a ver series en inglés en HBO Max. Sabemos que sigue una distribución normal: $N(\mu, 2)$.

La muestra es de 100 estudiantes y la media muestral es 8 horas $\rightarrow n = 100, \bar{x} = 8$.

Para un nivel de confianza del 95% calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750

El error del intervalo viene dado por la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{100}} = 0.392 \text{ horas}$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (8 - 0.392, 8 + 0.392) = (7.608, 8.392)$$

b) Para un nivel de confianza del 99% calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951

Igualemos el error del intervalo a 0.5 horas y despejamos n .

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = 2.575 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2 \cdot 2.575}{0.5} \Rightarrow n = \left(\frac{2 \cdot 2.575}{0.5} \right)^2 = 106.09$$

El tamaño de la muestra es un valor entero superior al obtenido. 107 es el tamaño mínimo que debe tener una muestra de estudiantes para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 0.5 horas con un nivel de confianza del 99%.

c) Si $\mu = 8.2$ la distribución es $N(8.2, 2)$. Nos piden calcular $P(X > 9)$.

$$P(X > 9) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{9-8.2}{2}\right) = P(Z > 0.4) = 1 - P(Z \leq 0.4) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.6554 = 0.3446$$

z	0.00	
0.0	0.5000	0
0.1	0.5398	0
0.2	0.5793	0
0.3	0.6179	0
0.4	0.6554	0