



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
307 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
 PAU2025 - JUNIO

NOTA IMPORTANTE: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones. Las cuestiones se pueden hacer en cualquier orden. En cada APARTADO se debe hacer sólo la CUESTIÓN 1 o la CUESTIÓN 2. La elección de CUESTIÓN 1 o CUESTIÓN 2 puede cambiar de un apartado a otro. Si se responden las 2 CUESTIONES de un apartado, solo se corregirá la primera CUESTIÓN contestada. Cada cuestión tiene una puntuación entre 2 y 3 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

APARTADO 1 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1: [2,5 puntos]

[1,5 puntos] Dadas las matrices A, B y C:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula C^2 . **[0,25 puntos]**
- b) Halla $A + B + C^2$. **[0,25 puntos]**
- c) Encuentra $(A - B)^{-1}$. **[0,25 puntos]**
- d) Resuelve la ecuación matricial $AX - BX = A + B + C^2$. **[0,75 puntos]**

[1 punto] Discute y resuelve, si es posible, el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ x - y + 2z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] Una empresa del sector informático produce dos tipos de ordenadores portátiles: notebooks y gaming. La empresa obtiene 400 euros de beneficio por cada notebook y 500 euros por cada gaming. El proceso de fabricación es complejo y tiene tres fases: (1) selección y fabricación de componentes; (2) ensamblaje y (3) control de calidad. Los notebooks necesitan 2, 1 y 1 horas en cada fase, respectivamente, mientras que los gaming necesitan 1, 4 y 2 horas. En cada fase hay un límite de 14, 16 y 10 horas diarias. Se pide:

- a) Si la empresa quiere maximizar el beneficio diario, formula el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,5 puntos]**
- b) Representa la región factible. **[0,75 puntos]**
- c) Encuentra los vértices de esta región. **[0,5 puntos]**
- d) ¿Cuántos ordenadores portátiles de cada tipo hay que producir para maximizar los beneficios diarios? **[0,5 puntos]**
- e) Calcula el beneficio máximo diario posible. **[0,25 puntos]**

APARTADO 2 (a elegir una cuestión):**CUESTIÓN 1:****[3 puntos]** Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{1 - x}$$

- a) Determina su dominio. **[0,5 puntos]**
- b) Estudia sus asíntotas. **[0,75 puntos]**
- c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **[1 punto]**
- d) Calcula los máximos y mínimos locales. **[0,75 puntos]**

CUESTIÓN 2:

[3 puntos] El famoso rapero Myke Towers ofrecerá un concierto en Murcia el próximo 6 de junio en el Espacio Norte, que durará 5 horas. La asistencia al evento, medida en miles de personas, viene dada por la siguiente función:

$$N(t) = \frac{20t}{(t+1)^2}$$

donde $0 \leq t \leq 5$ y N es el número de miles de asistentes t horas después del comienzo. Se pide:

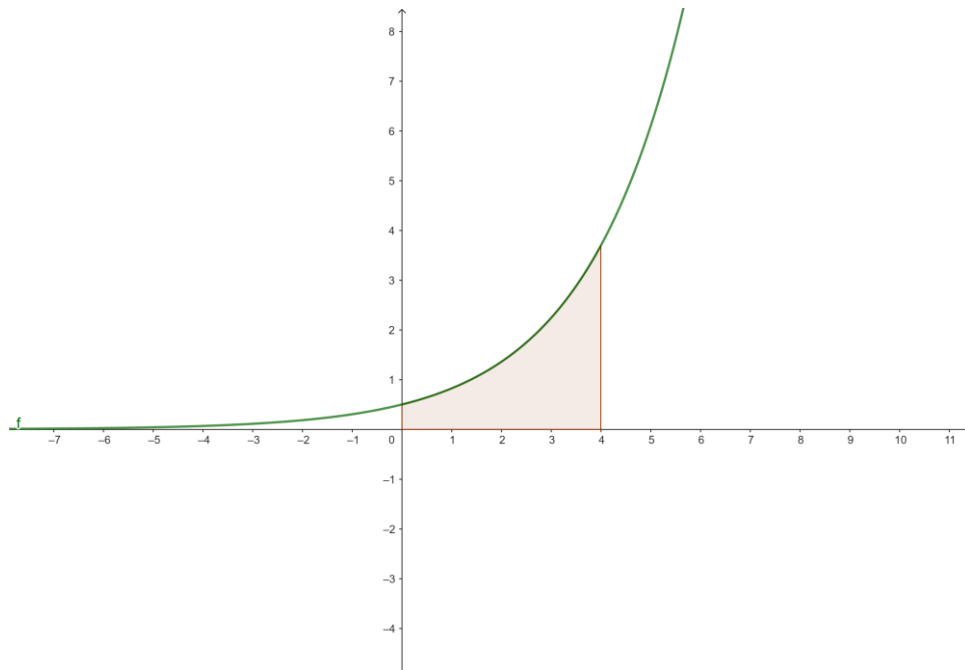
- a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $N(t)$. **[1 punto]**
- b) Calcula en qué hora se produce el máximo número de asistentes y a cuánto ascienden. **[1,25 puntos]**
- c) Evalúa e interpreta la derivada de la función $N(t)$ en $t = 2$. **[0,25 puntos]**
- d) Halla cuántos asistentes hay una vez han transcurrido 3 horas desde el comienzo del concierto. **[0,5 puntos]**

APARTADO 3 (a elegir una cuestión):**CUESTIÓN 1:****[2 puntos]** Realiza:

- a) Si $\int_0^2 f(x) dx = 4$, ¿a qué es igual $\int_0^2 [f(x) + 3] dx$? **[0,25 puntos]**
- b) Representa gráficamente el recinto del plano limitado por $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x + 3$. Calcula su área. **[1,75 puntos]**

CUESTIÓN 2:**[2 puntos]** Realiza:

- a) Calcula los valores de los límites de integración a y b de manera que se cumpla $\int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$. **[0,25 puntos]**
- b) Dada la función $f(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$:
 - b.1) Escribe la integral que describe el área de la región sombreada. **[0,5 puntos]**
 - b.2) Calcula el área. **[1,25 puntos]**



APARTADO 4 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:

[2,5 puntos] Un grupo de investigadores de la Universidad de Murcia realizó una encuesta en la que se preguntó a 1000 personas adultas su opinión sobre establecer una edad legal para que los niños tengan teléfono móvil. Según los resultados, 560 personas, de las que 390 eran mujeres, opinaron a favor de esta medida. De las 440 personas que opinaron en contra, 280 eran hombres. Si se selecciona una persona al azar:

- ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de esta medida? **[0,25 puntos]**
- ¿Cuál es la probabilidad de que la persona encuestada sea mujer? **[0,75 puntos]**
- ¿Cuál es la probabilidad de que la persona sea mujer o esté a favor de esta medida? **[0,75 puntos]**
- Si esa persona seleccionada al azar es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que esté a favor de esta medida? **[0,75 puntos]**

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] El peso, en kg, de los jugadores de fútbol de la Liga Nacional juvenil de la Región de Murcia sigue una distribución normal con media μ y desviación típica igual a 12 kg.

- Si en una muestra de 64 jugadores el peso medio ha sido de 70 kg, calcula un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media de los pesos de los jugadores de fútbol de la Liga Nacional juvenil de la Región de Murcia. **[1 punto]**
- Determina el tamaño mínimo que debe tener una muestra de jugadores para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 4 kg con un nivel de confianza del 98%. **[0,75 puntos]**
- Si $\mu = 71$ y se elige a un jugador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 75 kg? **[0,75 puntos]**

SOLUCIONES**APARTADO 1 (a elegir una cuestión):****CUESTIÓN 1: [2,5 puntos]****[1,5 puntos]** Dadas las matrices A, B y C:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula C^2 . **[0,25 puntos]**b) Halla $A + B + C^2$. **[0,25 puntos]**c) Encuentra $(A - B)^{-1}$. **[0,25 puntos]**d) Resuelve la ecuación matricial $AX - BX = A + B + C^2$. **[0,75 puntos]****[1 punto]** Discute y resuelve, si es posible, el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ x - y + 2z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

a) Calculamos C^2 .

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2-2 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos $A + B + C^2$.

$$A + B + C^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Hallamos la expresión de la matriz $A - B$ y comprobamos que su determinante es no nulo.

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A - B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$$

Como el determinante es no nulo existe la inversa de $A - B$. La calculamos.

$$(A - B)^{-1} = \frac{\text{Adj}(A - B)^T}{|A - B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Despejamos X en la ecuación matricial y obtenemos su expresión.

$$AX - BX = A + B + C^2 \Rightarrow (A - B)X = A + B + C^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = (A - B)^{-1} (A + B + C^2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+0 & 1+2 \\ -8+0 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$.

Discutimos el sistema utilizando el método de Gauss y obtenemos un sistema triangular equivalente al inicial.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ x - y + 2z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \{ \text{Ecuación 2}^a \leftrightarrow \text{Ecuación 1}^a \} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - 3 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ 3x + 2y - z = 3 \\ -3x + 3y - 6z = -12 \\ \hline 5y - 7z = -9 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - 2 \cdot \text{Ecuación 1}^a \\ 2x + 3y - z = 3 \\ -2x + 2y - 4z = -8 \\ \hline 5y - 5z = -5 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 5y - 7z = -9 \\ 5y - 5z = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 2}^a \\ 5y - 5z = -5 \\ -5y + 7z = 9 \\ \hline 2z = 4 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 5y - 7z = -9 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

Este sistema triangular obtenido es compatible determinado. Determinamos la solución del sistema.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 5y - 7z = -9 \\ 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 5y - 7z = -9 \\ \boxed{z = \frac{4}{2} = 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2 \cdot 2 = 4 \\ 5y - 7 \cdot 2 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 5y = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ \boxed{y = \frac{5}{5} = 1} \end{cases} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

La solución del sistema es $x = 1, y = 1, z = 2$.

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] Una empresa del sector informático produce dos tipos de ordenadores portátiles: notebooks y gaming. La empresa obtiene 400 euros de beneficio por cada notebook y 500 euros por cada gaming. El proceso de fabricación es complejo y tiene tres fases: (1) selección y fabricación de componentes; (2) ensamblaje y (3) control de calidad. Los notebooks necesitan 2, 1 y 1 horas en cada fase, respectivamente, mientras que los gaming necesitan 1, 4 y 2 horas. En cada fase hay un límite de 14, 16 y 10 horas diarias. Se pide:

- Si la empresa quiere maximizar el beneficio diario, formula el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,5 puntos]**
- Representa la región factible. **[0,75 puntos]**
- Encuentra los vértices de esta región. **[0,5 puntos]**
- ¿Cuántos ordenadores portátiles de cada tipo hay que producir para maximizar los beneficios diarios? **[0,5 puntos]**
- Calcula el beneficio máximo diario posible. **[0,25 puntos]**

- a) Llamamos x = número de notebooks que se producen, y = número de gaming.
Realizamos una tabla para organizar toda la información proporcionada en el problema.

	Horas fase 1	Horas fase 2	Horas fase 3	Beneficio
Notebooks (x)	$2x$	x	x	$400x$
Gaming (y)	y	$4y$	$2y$	$500y$
TOTAL	$2x + y$	$x + 4y$	$x + 2y$	$400x + 500y$

La función objetivo es el beneficio diario que deseamos maximizar: $B(x, y) = 400x + 500y$.

Las restricciones nos dan las siguientes inecuaciones.

En cada fase hay un límite de 14, 16 y 10 horas diarias. $\rightarrow$

$$2x + y \leq 14; x + 4y \leq 16; x + 2y \leq 10$$

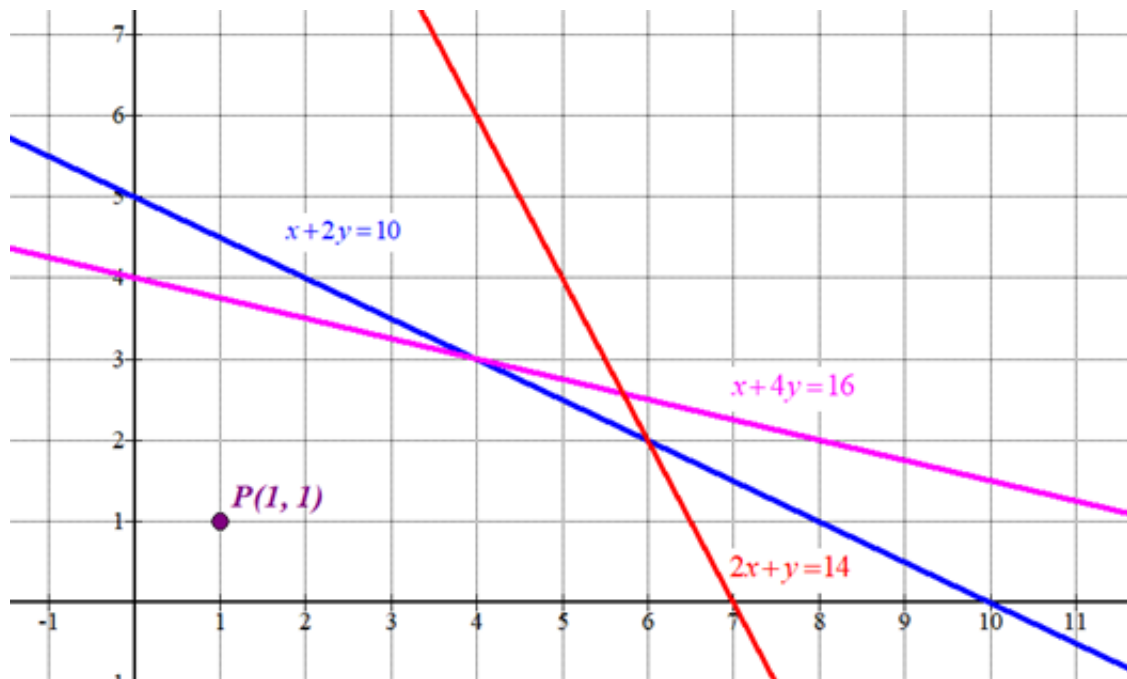
Las cantidades deben ser enteras y positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

La región factible es la zona del plano que contiene los puntos que cumplen el sistema de inecuaciones siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 14 \\ x + 4y \leq 16 \\ x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x + y = 14$	$x + 4y = 16$	$x + 2y = 10$	
$x \mid y = 14 - 2x$ $0 \mid 14$ $6 \mid 2$ $7 \mid 0$	$x \mid y = \frac{16 - x}{4}$ $0 \mid 4$ $4 \mid 3$ $16 \mid 0$	$x \mid y = \frac{10 - x}{2}$ $0 \mid 5$ $4 \mid 3$ $6 \mid 2$ $10 \mid 0$	$x \geq 0; y \geq 0$ Primer cuadrante



Como las restricciones son:

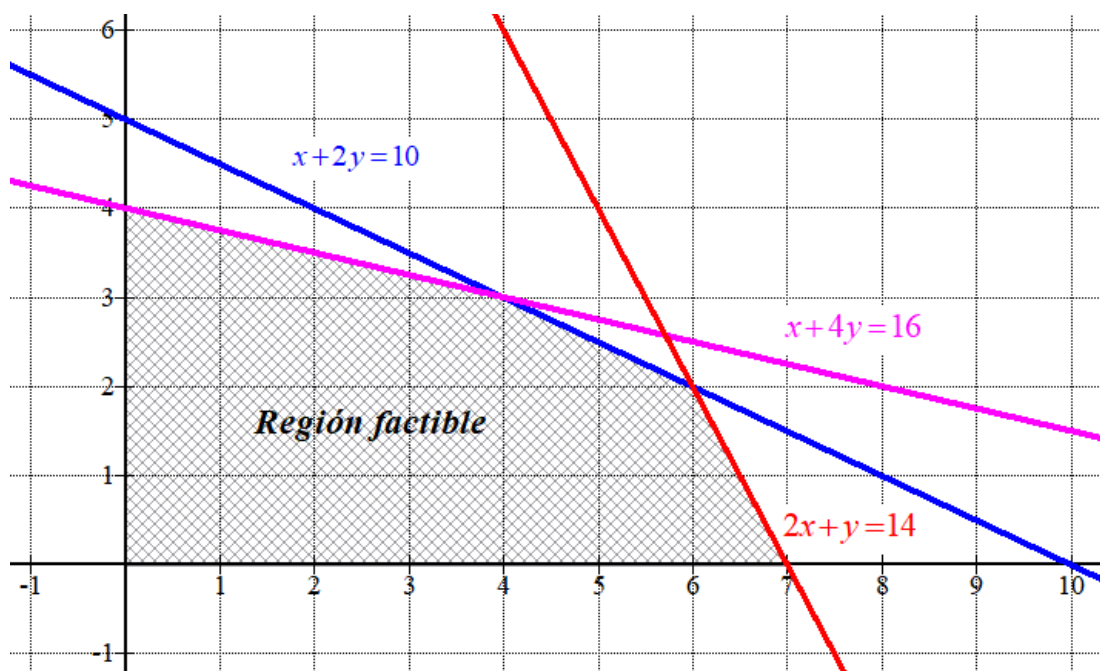
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 14 \\ x + 4y \leq 16 \\ x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la zona del primer cuadrante que}$$

está por debajo de las rectas oblicuas (rosa, azul y roja).

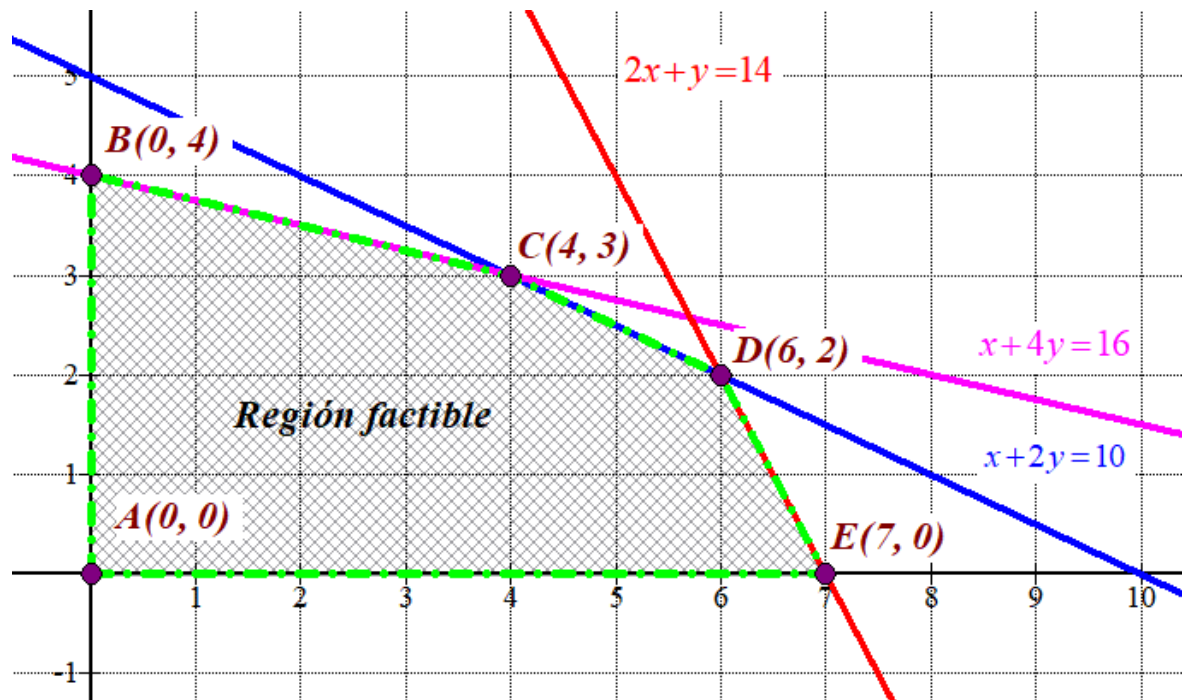
Comprobamos que el punto $P(1, 1)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 + 1 \leq 14 \\ 1 + 4 \leq 16 \\ 1 + 2 \leq 10 \\ 1 \geq 0; 1 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas y la región factible es la indicada.}$$

Coloreo de gris la región factible en el siguiente dibujo.



- c) Las coordenadas de los vértices se aprecian en el dibujo y se pueden también comprobar en las tablas de valores. Los vértices son: $A(0,0)$, $B(0,4)$, $C(4,3)$, $D(6,2)$ y $E(7,0)$



- d) Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 400x + 500y$ en cada uno de los vértices en busca del máximo valor.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 4) \rightarrow B(0, 4) = 400 \cdot 0 + 500 \cdot 4 = 2000 \text{ €}$$

$$C(4, 3) \rightarrow B(4, 3) = 400 \cdot 4 + 500 \cdot 3 = 3100 \text{ €}$$

$$D(6, 2) \rightarrow B(6, 2) = 400 \cdot 6 + 500 \cdot 2 = 3400 \text{ € Máximo}$$

$$E(7, 0) \rightarrow B(7, 0) = 400 \cdot 7 + 500 \cdot 0 = 2800 \text{ €}$$

El beneficio máximo se obtiene en el punto $D(6, 2)$. Significa que se deben fabricar diariamente 6 notebooks y 2 gaming para obtener los beneficios máximos.

- e) El beneficio máximo diario que se puede conseguir es de 3400 euros.

APARTADO 2 (a elegir una cuestión):**CUESTIÓN 1:**

[3 puntos] Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{1 - x}$$

- a) Determina su dominio. [0,5 puntos]
 b) Estudia sus asíntotas. [0,75 puntos]
 c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento. [1 punto]
 d) Calcula los máximos y mínimos locales. [0,75 puntos]

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{1\}.$$

b) **Asíntotas verticales.** $x = a$ ¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{1 - x} = \frac{1^2 + 3}{1 - 1} = \frac{4}{0} = \infty$$

 $x = 1$ es asíntota vertical.**Asíntota horizontal.** $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} -x = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 3}{1 - x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{1 - x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2} + 3 + x - \cancel{x^2}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + x}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{-x} = -1$$

La función tiene a la recta $y = -x - 1$ como asíntota oblicua.

c) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{1 - x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(1 - x) - (-1)(x^2 + 3)}{(1 - x)^2} = \frac{2x - 2x^2 + x^2 + 3}{(1 - x)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(1 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 2x + 3}{(1 - x)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)3}}{2(-1)} =$$

$$= \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{-2 + 4}{-2} = \boxed{-1 = x} \\ \frac{-2 - 4}{-2} = \boxed{3 = x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores y el valor excluido del dominio $x=1$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{-(-2)^2 + 2(-2) + 3}{(1-(-2))^2} = \frac{-5}{9} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

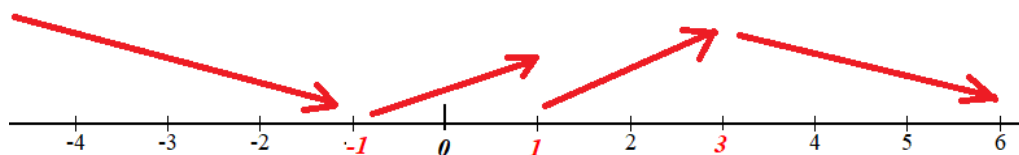
- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{-0^2 + 2 \cdot 0 + 3}{(1-0)^2} = 3 > 0$. La función crece en $(-1, 1)$.

- En el intervalo $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-2^2 + 2 \cdot 2 + 3}{(1-2)^2} = 3 > 0$. La función crece en $(1, 3)$.

- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = \frac{-4^2 + 2 \cdot 4 + 3}{(1-4)^2} = \frac{-5}{9} < 0$. La función decrece en $(3, +\infty)$.

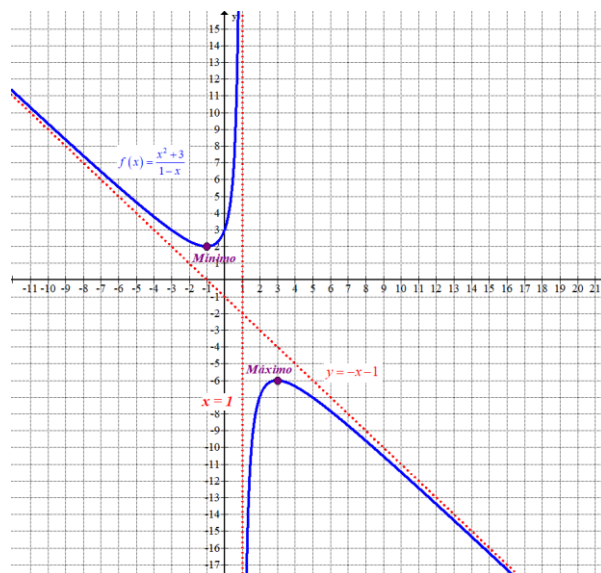
Resumiendo: La función decrece en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ y crece en $(-1, 1) \cup (1, 3)$.

d) Con el estudio anterior sabemos que la función sigue el esquema siguiente:



La función presenta un mínimo local en $x = -1$ y un máximo local en $x = 3$.

Como $f(-1) = \frac{(-1)^2 + 3}{1 - (-1)} = 2$ y $f(3) = \frac{3^2 + 3}{1 - 3} = -6$ el mínimo local tiene coordenadas $(-1, 2)$ y el máximo local tiene coordenadas $(3, -6)$.



CUESTIÓN 2:

[3 puntos] El famoso rapero Myke Towers ofrecerá un concierto en Murcia el próximo 6 de junio en el Espacio Norte, que durará 5 horas. La asistencia al evento, medida en miles de personas, viene dada por la siguiente función:

$$N(t) = \frac{20t}{(t+1)^2}$$

donde $0 \leq t \leq 5$ y N es el número de miles de asistentes t horas después del comienzo. Se pide:

- Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $N(t)$. **[1 punto]**
- Calcula en qué hora se produce el máximo número de asistentes y a cuánto ascienden. **[1,25 puntos]**
- Evalúa e interpreta la derivada de la función $N(t)$ en $t = 2$. **[0,25 puntos]**
- Halla cuántos asistentes hay una vez han transcurrido 3 horas desde el comienzo del concierto. **[0,5 puntos]**

a) Hallamos los puntos críticos de la función.

$$N(t) = \frac{20t}{(t+1)^2} \Rightarrow N'(t) = \frac{20(t+1)^2 - 2(t+1)20t}{(t+1)^4} = \frac{20(t+1) - 40t}{(t+1)^3} = \frac{20 - 20t}{(t+1)^3}$$

$$N'(t) = 0 \Rightarrow \frac{20 - 20t}{(t+1)^3} = 0 \Rightarrow 20 - 20t = 0 \Rightarrow \boxed{t=1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de la primera hora de concierto.

- En el intervalo $(0,1)$ consideramos $t = 0.5$ y la derivada vale

$$N'(0.5) = \frac{20 - 20 \cdot 0.5}{(0.5+1)^3} = \frac{80}{27} > 0. \text{ La función crece en } (0,1).$$

- En el intervalo $(1,5)$ consideramos $t = 2$ y la derivada vale $N'(2) = \frac{20 - 20 \cdot 2}{(2+1)^3} = \frac{-20}{27} < 0$.

La función decrece en $(1,5)$.

Resumiendo: Durante la primera hora de concierto crece el número de asistentes al concierto y de la primera a la quinta hora del concierto disminuye el número de asistentes.

- b) Por lo visto en el apartado anterior se deduce que el máximo número de asistentes se produce al cabo de 1 hora de concierto. Como $N(1) = \frac{20 \cdot 1}{(1+1)^2} = 5$ podemos decir que el número máximo de asistentes al concierto se produce al cabo de 1 hora siendo 5000 los asistentes en ese momento.

- c) $N'(2) = \frac{20 - 20 \cdot 2}{(2+1)^3} = \frac{-20}{27} = -0.74 < 0$. Este resultado nos indica que el número de asistentes

disminuye cuando han pasado 2 horas de concierto. Aproximadamente disminuyen 740 personas en torno a las 2 horas (entre la hora y media y las 2 horas y media se van 740 personas, aproximadamente).

- d) Como $N(3) = \frac{20 \cdot 3}{(3+1)^2} = \frac{60}{16} = 3.750$ podemos decir que al cabo de 3 horas hay 3750 asistentes en el concierto.

APARTADO 3 (a elegir una cuestión):**CUESTIÓN 1:****[2 puntos]** Realiza:a) Si $\int_0^2 f(x) dx = 4$, ¿a qué es igual $\int_0^2 [f(x) + 3] dx$? **[0,25 puntos]**b) Representa gráficamente el recinto del plano limitado por $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x + 3$. Calcula su área. **[1,75 puntos]**

a) Aplicamos las propiedades de la integración.

$$\int_0^2 [f(x) + 3] dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 3 dx = 4 + [3x]_0^2 = 4 + (3 \cdot 2 - 3 \cdot 0) = 4 + 6 = 10$$

b) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones.

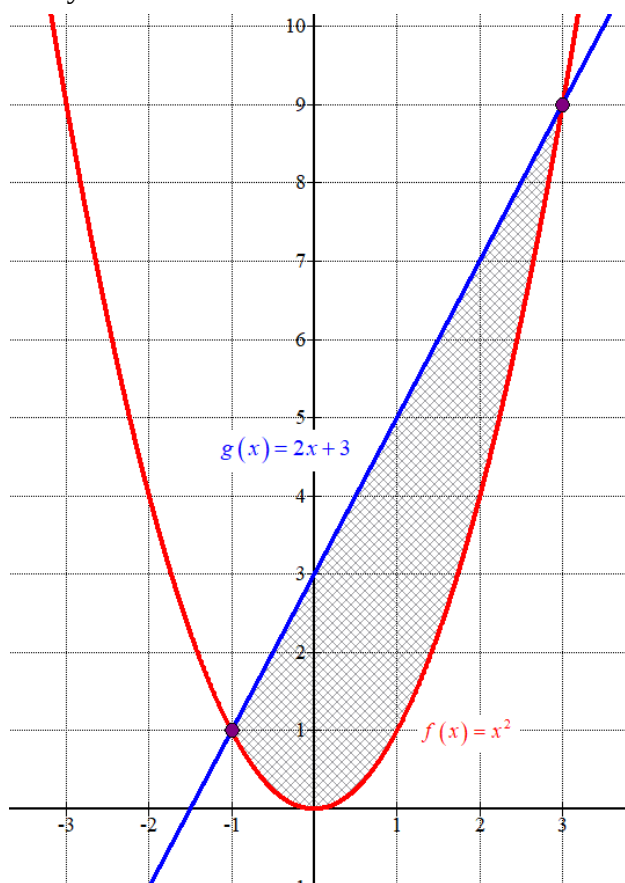
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = 2x + 3 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 = x \\ \frac{2-4}{2} = -1 = x \end{cases}$$

La región del plano de la cual queremos hallar su área está comprendida entre -1 y 3 . Hacemos una tabla de valores y representamos la parábola y la recta dadas.

x	$f(x) = x^2$
-1	1
0	0
3	9

x	$g(x) = 2x + 3$
-1	1
0	3
3	9



El área es el valor de la integral definida entre -1 y 3 de $g(x) - f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-1}^3 g(x) - f(x) dx = \int_{-1}^3 2x + 3 - x^2 dx = \left[x^2 + 3x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^3 = \\ &= \left[3^2 + 3 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} \right] - \left[(-1)^2 + 3(-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right] = 9 + 9 - 9 - \left(1 - 3 + \frac{1}{3} \right) = \boxed{\frac{32}{3} \approx 10.667 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

CUESTIÓN 2:**[2 puntos]** Realiza:

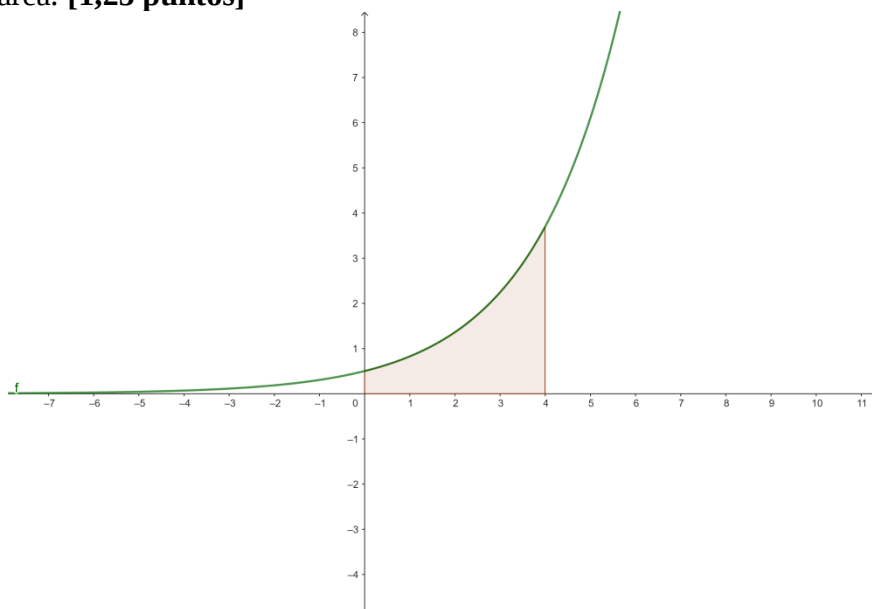
- a) Calcula los valores de los límites de integración
- a
- y
- b
- de manera que se cumpla

$$\int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \text{ [0,25 puntos]}$$

- b) Dada la función
- $f(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$
- :

- b.1) Escribe la integral que describe el área de la región sombreada.
- [0,5 puntos]**

- b.2) Calcula el área.
- [1,25 puntos]**



- a) Aplicando las propiedades de la integración.

$$\int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx = \int_{-2}^5 f(x) dx$$

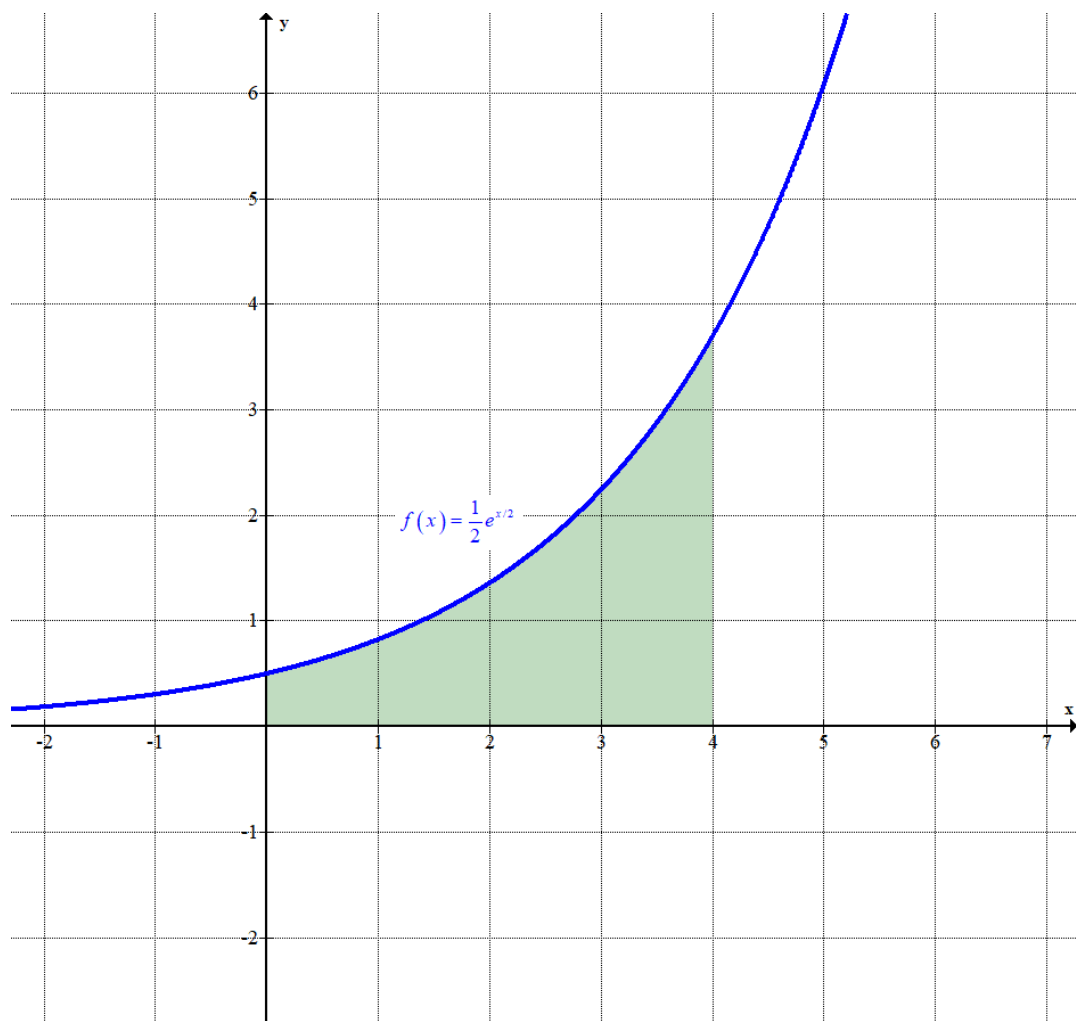
Por lo que $a = -2$ y $b = 5$.

- b) Por lo que se observa en el dibujo es la región del plano limitada por la gráfica de la función y el eje OX entre
- $x = 0$
- y
- $x = 4$
- , por lo que el valor del área se obtiene con la integral definida de la función entre esos dos valores:
- $\int_0^4 f(x) dx = \int_0^4 \frac{1}{2}e^{x/2} dx$
- .

Calculamos el valor del área determinando el valor de la integral definida.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^4 \frac{1}{2}e^{x/2} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 e^{x/2} dx = \frac{1}{2} \left[2e^{x/2} \right]_0^4 = \frac{1}{2} \left[2e^{4/2} - 2e^{0/2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[2e^2 - 2 \right] = \boxed{e^2 - 1 \approx 6.39 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

Si contamos los cuadraditos que están coloreados en el siguiente dibujo y sabiendo que cada uno tiene un área de 1 unidad cuadrada comprobamos la bondad de la solución obtenida.



APARTADO 4 (a elegir una cuestión):**CUESTIÓN 1:**

[2,5 puntos] Un grupo de investigadores de la Universidad de Murcia realizó una encuesta en la que se preguntó a 1000 personas adultas su opinión sobre establecer una edad legal para que los niños tengan teléfono móvil. Según los resultados, 560 personas, de las que 390 eran mujeres, opinaron a favor de esta medida. De las 440 personas que opinaron en contra, 280 eran hombres. Si se selecciona una persona al azar:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de esta medida? **[0,25 puntos]**
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona encuestada sea mujer? **[0,75 puntos]**
 c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona sea mujer o esté a favor de esta medida? **[0,75 puntos]**
 d) Si esa persona seleccionada al azar es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que esté a favor de esta medida? **[0,75 puntos]**

Realizamos una tabla de contingencia para colocar de forma ordenada los datos proporcionados y obtener los datos que vienen implícitos en la información proporcionada.

	Mujer	Hombre	
A favor	390		560
En contra		280	440
			1000

Completamos la tabla.

	Mujer	Hombre	
A favor	390	170	560
En contra	160	280	440
	550	450	1000

Con toda esta información y aplicando la regla de Laplace respondemos a las preguntas planteadas.

- a) De las 1000 personas encuestadas hay 560 a favor la probabilidad de que la persona elegida al azar esté a favor de esta medida vale $\frac{560}{1000} = 0.56$.
- b) De las 1000 personas encuestadas hay 550 mujeres la probabilidad de que la persona elegida al azar sea mujer vale $\frac{550}{1000} = 0.55$.
- c) De las 1000 personas encuestadas hay 550 mujeres y 170 hombres que están a favor de la medida, por lo que la probabilidad de que la persona elegida al azar sea mujer o esté a favor de esta medida vale $\frac{550+170}{1000} = 0.72$.
- d) De los 450 hombres encuestados hay 170 a favor, por lo que la probabilidad de que al elegir un hombre al azar esté a favor de esta medida vale $\frac{170}{450} = \frac{17}{45} \approx 0.3778$.

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] El peso, en kg, de los jugadores de fútbol de la Liga Nacional juvenil de la Región de Murcia sigue una distribución normal con media μ y desviación típica igual a 12 kg.

- a) Si en una muestra de 64 jugadores el peso medio ha sido de 70 kg, calcula un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media de los pesos de los jugadores de fútbol de la Liga Nacional juvenil de la Región de Murcia. **[1 punto]**
- b) Determina el tamaño mínimo que debe tener una muestra de jugadores para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 4 kg con un nivel de confianza del 98%. **[0,75 puntos]**
- c) Si $\mu = 71$ y se elige a un jugador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 75 kg? **[0,75 puntos]**

- a) Sea X la variable aleatoria que da el peso, en kg, de los jugadores de fútbol de la Liga Nacional juvenil de la Región de Murcia. Sabemos que sigue una distribución normal: $N(\mu, 12)$.

La muestra es de 64 jugadores y la media muestral es 70 kilos $\rightarrow n = 64, \bar{x} = 70$ kg

Para un nivel de confianza del 95% calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750

El error del intervalo viene dado por la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{12}{\sqrt{64}} = 2.94$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (70 - 2.94, 70 + 2.94) = (67.06, 72.94)$$

La media de los pesos con un nivel de confianza del 95 % se sitúa entre 67.06 y 72.94 kilos.

b) Para un nivel de confianza del 98% calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,98 \rightarrow \alpha = 0,02 \rightarrow \alpha/2 = 0,01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.32 + 2.33}{2} = 2.325$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901

Igualemos el error del intervalo a 4 kg y despejamos n .

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 4 = 2.325 \cdot \frac{12}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{12 \cdot 2.325}{4} \Rightarrow n = \left(\frac{12 \cdot 2.325}{4} \right)^2 \approx 48.65$$

El tamaño de la muestra es un valor entero superior al obtenido. 49 es el tamaño mínimo que debe tener una muestra de jugadores para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 4 kg con un nivel de confianza del 98%.

c) Si $\mu = 71$ la distribución es $N(71, 12)$. Nos piden calcular $P(X > 75)$.

$$P(X > 75) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{75 - 71}{12}\right) = P(Z > 0.333) = 1 - P(Z \leq 0.33) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.6293 = 0.3707$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664