

ÁLGEBRA Y ANÁLISIS

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Si $a = \frac{7}{2} \Rightarrow R_g(A) = 2$
Si $a \neq \frac{7}{2} \Rightarrow R_g(A) = 3$

a) Calcula el rango de la matriz A en función del valor del parámetro a . (0,5 pt.)

b) En el caso $a = 3$ despeja y calcula X en la ecuación matricial:

$X \cdot A - I_3 = B$ donde I_3 es la matriz identidad de orden 3. (2,5 pt.)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -9 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Sea la función: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + b & \text{si } x < 1 \\ ax^2 - bx + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea derivable en $x = 1$. (1,5 pt.)

Es derivable en $x=1$ si $a = 7/4$ y $b = 5/4$

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$. (0,5 pt.)

$$y - \frac{11}{2} = \frac{23}{4} \cdot (x - 2)$$

3. Estudia el dominio, la monotonía (crecimiento, decrecimiento) y los extremos de la función:

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1 \quad \begin{cases} \text{Crece en } (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, +\infty) \\ \text{Decrece en } (-1, \frac{1}{3}) \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Mínimo } (\frac{1}{3}, \frac{22}{7}) \\ \text{Máximo } (-1, 2) \end{cases}$$

Dom $f(x) = \mathbb{R}$ (2 pt.)

4. Un artículo de consumo estuvo a la venta durante 8 años, y su precio $P(t)$ (en miles de euros) varió con el tiempo t (en años) que llevaba en el mercado, según la función siguiente:

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -\frac{5}{2}t + 25 & \text{si } 2 < t \leq 8 \end{cases}$$

siendo la variable t el número de años transcurridos desde que se pone en marcha.

a) ¿Es el precio una función continua del tiempo? Sí es continua. (0,5 pt.)

b) Averigua en qué momentos se alcanzaron los precios máximo y mínimo, y cuáles fueron esos precios.

$\begin{cases} \text{mínimo absoluto } t = 0 \text{ años } 4000 \text{ €} \\ \text{máximo absoluto } t = 2 \text{ años } 20.000 \text{ €} \end{cases}$ (1,5 pt.)

5. Calcula la derivada de $f(x) = \frac{3}{(2x-5)^2} + \ln(1-x)$ (1 pt.)

$$f'(x) = -\frac{12}{(2x-5)^3} - \frac{1}{1-x}$$

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de la matriz A en función del valor del parámetro a .

(0,5 pt.)

b) En el caso $a = 3$ despeja y calcula X en la ecuación matricial:

$$X \cdot A - I_3 = B \text{ donde } I_3 \text{ es la matriz identidad de orden 3.}$$

(2,5 pt.)

$$a) |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 16 - 9 - (4a - 3a) + (3a - 4a) = 7 - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{7}{2}$$

$$\text{Si } a = \frac{7}{2} \Rightarrow Rg(A) < 3, \text{ Como } \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rg(A) = 2$$

$$\text{Si } a \neq \frac{7}{2} \Rightarrow Rg(A) = 3$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ Ecuación } X \cdot A - I = B$$

$$X \cdot A = B + I$$

$$X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_I = (B + I) \cdot A^{-1}$$

$$X = (B + I) \cdot A^{-1}$$

$$B + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la inversa: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\text{Adj}(A)]^t$,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 - 2a = 7 - 6 = 1 \neq 0, \text{ luego tiene inversa.}$$

Para hallar la inversa, vamos a calcular la matriz adjunta.

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\text{Adj}(A)]^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (B + I) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -9 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Sea la función: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + b & \text{si } x < 1 \\ ax^2 - bx + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea derivable en $x=1$. (1,5 pt.)

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=2$. (0,5 pt.)

a) Para que sea derivable, es condición necesaria que sea continua en $x=1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 - ax + b = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 - bx + 1 = f(1) \quad \text{límites laterales iguales}$$

$$2 \cdot 1^2 - a \cdot 1 + b = a \cdot 1^2 - b \cdot 1 + 1 \Rightarrow 2 - a + b = a - b + 1$$

$$2a - 2b = 1 \quad [1]$$

La condición de derivabilidad es: $f'(1^-) = f'(1^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - a & \text{si } x < 1 \\ 2ax - b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 4 \cdot 1 - a = 2 \cdot a \cdot 1 - b \Rightarrow 3a - b = 4 \quad [2]$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 2a - 2b = 1 \\ 3a - b = 4 \end{cases} \cdot (-2)$$

$$-4a = -7 \Rightarrow a = 7/4$$

$$b = 3a - 4 = 3 \cdot \frac{7}{4} - 4 = 5/4$$

Es derivable en $x=1$ si $a = 7/4$ y $b = 5/4$

b) Calcular la recta tangente en $x=2$

$x=2$ pertenece al **segundo intervalo** donde $f(x) = ax^2 - bx + 1 = \frac{7}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + 1$

$$f(2) = \frac{7}{4} \cdot 4 - \frac{5}{4} \cdot 2 + 1 = 7 - \frac{5}{2} + 1 = \frac{11}{2}$$

$$f'(x) = \frac{7}{4} \cdot 2x - \frac{5}{4} \Rightarrow f'(2) = \frac{7}{4} \cdot 4 - \frac{5}{4} = \frac{23}{4}$$

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Rightarrow y - \frac{11}{2} = \frac{23}{4} \cdot (x - 2)$$

3. Estudia el dominio, la monotonía (crecimiento, decrecimiento) y los extremos de la función:

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$$

(2 pt.)

$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, La función no tiene puntos críticos, luego **Dom $f(x) = \mathbb{R}$**

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

$$f''(x) = 6x + 2$$

La condición de extremo es $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0$,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 4}{6} < \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

, caracterizamos los extremos con la 2ª derivada

$$f''(x) = 6x + 2$$

$f''(\frac{1}{3}) = 6 \cdot \frac{1}{3} + 2 = 4 > 0$ luego en **$x = \frac{1}{3}$ hay un mínimo**

$f''(-1) = 6(-1) + 2 = -4 < 0$ luego en **$x = -1$ hay un máximo**

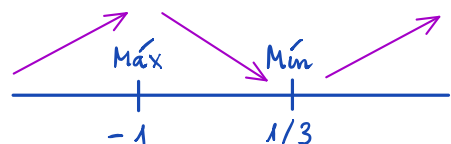
Calculamos las coordenadas de los extremos.

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$$

$$f(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^3 + (\frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{22}{27}, \text{ Mínimo } (\frac{1}{3}, \frac{22}{27})$$

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) + 1 = 2, \text{ Máximo } (-1, 2)$$

Estudiamos la monotonía entre los extremos (máximo y mínimo) y los puntos críticos (no hay).



$$\begin{cases} \text{Crece en } (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, +\infty) \\ \text{Decrece en } (-1, \frac{1}{3}) \end{cases}$$

4. Un artículo de consumo estuvo a la venta durante 8 años, y su precio $P(t)$ (en miles de euros) varió con el tiempo t (en años) que llevaba en el mercado, según la función siguiente:

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -\frac{5}{2}t + 25 & \text{si } 2 < t \leq 8 \end{cases}$$

siendo la variable t el número de años transcurridos desde que se pone en marcha.

- a) ¿Es el precio una función continua del tiempo? (0,5 pt.)
- b) Averigua en qué momentos se alcanzaron los precios máximo y mínimo, y cuáles fueron esos precios. (1,5 pt.)

- a) No hay puntos críticos y el único punto de frontera es $t = 2$.

$$P(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 4t^2 + 4 = \lim_{x \rightarrow 2^+} -\frac{5}{2} \cdot t + 25 \quad \text{límites laterales iguales}$$

$$20 = -\frac{5}{2} \cdot 2 + 25 = 20, \text{ Sí cumple luego } P(t) \text{ es una función continua.}$$

- b) Veamos los extremos de cada intervalo, y calculemos los extremos absolutos:

$$P(t) = 4t^2 + 4, \quad t \in [0, 2]$$

$$P'(t) = 8t = 0 \quad \text{si } t = 0$$

$$P''(t) = 8 > 0$$

Luego $t = 0$ es un mínimo

$$P(0) = 4 \Rightarrow 4000 \text{ €}$$

Fronteras del intervalo:

$$P(2) = 20 \Rightarrow 20.000 \text{ €}$$

$$P(t) = -\frac{5}{2} \cdot t + 25, \quad t \in (2, 8]$$

$$P'(t) = -\frac{5}{2} = 0 \Rightarrow \text{No hay extremos}$$

Fronteras del intervalo:

$$P(2) = 20 \Rightarrow 20.000 \text{ €}$$

$$P(8) = -\frac{5}{2} \cdot 8 + 25 = -20 + 25 = 5 \Rightarrow 5.000 \text{ €}$$

El **mínimo absoluto** se produce al principio: $t = 0$ años con un precio de 4000 €

El **máximo absoluto** se produce para $t = 2$ años con un precio de 20.000 €

5. Calcula la derivada de $f(x) = \frac{3}{(2x-5)^2} + \ln(1-x) = 3(2x-5)^{-2} + \ln(1-x)$

$$f'(x) = -2 \cdot 3 \cdot (2x-5)^{-3} \cdot 2 + \frac{(-1)}{1-x} = -\frac{12}{(2x-5)^3} - \frac{1}{1-x}$$