

## ÁLGEBRA Y ANÁLISIS

**ÁLGEBRA: Escoge sólo uno de los dos ejercicios siguientes del bloque de álgebra (ej. 1 o 2)**

1. Se consideran las matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ m & 3 \end{pmatrix}$

a) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:  $\begin{cases} 3X + 2Y = A \\ -4X + Y = B \end{cases}$  (1 pt.)

b) ¿Para qué valores de  $m$  tiene inversa la matriz  $C$ ? (0,5 pt.)

c) Para  $m = 1$ , calcula la matriz inversa de  $C$ . (0,5 pt.)

2. Resuelve de forma analítica el siguiente problema de programación lineal: 
$$\begin{cases} 2x + y \leq 6 \\ 4x + y \leq 10 \\ -x + y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices. (1,25 pt.)

b) Justifica si el punto  $P(2,1)$  pertenece a la región. (0,25 pt.)

c) Calcula el punto o puntos de la región factible donde la función  $f(x,y) = 4x + 2y - 3$  alcanza su valor máximo. (0,5 pt.)

**ANÁLISIS: Escoge sólo uno de los dos ejercicios siguientes del bloque de análisis (ej. 3 o 4)**

3. La siguiente función modela el número de personas (en miles) que asisten a un evento social a lo largo del tiempo  $t$  (en días):

$$N(t) = \begin{cases} -t^2 + 4t & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{2t - 3}{t - 2} & \text{si } t > 3 \end{cases}$$

a) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento del número de asistentes. ¿En qué momento es máximo? ¿Cuántos asistentes tiene el evento en ese momento? (1,5 pt.)

b) ¿Cuándo es el número de asistentes superior a 3000? (0,5 pt.)

c) Representa la gráfica de  $N(t)$ . (0,5 pt.)

4. Ejercicio de análisis:

- a) Se considera la función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + 16x + c$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales. Determine sus valores para que la función  $f(x)$  tenga un punto de inflexión en  $P(1,10)$  y sabiendo que la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es 7. (1,25 pt.)
- b) Halla el área de la región limitada por la gráfica de las funciones:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \quad \text{y} \quad g(x) = x. \quad (1,25 \text{ pt.})$$

**PROBABILIDAD: En este bloque tienes que realizar TODOS los ejercicios**

5. Dados dos sucesos  $A$  y  $B$ , se sabe que:  $P(A) = 0,5$  ;  $P(B) = 0,4$  y  $P(A \cup B) = 0,8$ .

- a) Calcula  $P(A|B)$ . (0,5 pt.)
- b) Calcula  $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ . (0,5 pt.)
- c) ¿Son compatibles los sucesos  $A$  y  $B$ ? (0,25 pt.)

6. Un alumno va a hacer un examen de geografía que tiene 4 preguntas. Este alumno piensa que, en cada pregunta, la probabilidad que tiene de responderla correctamente es 0,7 y que cada pregunta es independiente de las demás.

- a) Calcula la probabilidad de que el alumno conteste correctamente todas las preguntas. (0,5 pt.)
- b) El alumno aprobará el examen si contesta, al menos, 2 preguntas correctamente. ¿Cuál es la probabilidad que tiene el alumno de aprobar el examen? (0,5 pt.)

7. En un hospital, se sabe que el 5 % de los pacientes tienen una enfermedad específica. Se dispone de una prueba diagnóstica para esta enfermedad. La prueba es positiva en el 90 % de los casos si el paciente tiene la enfermedad y es positiva en el 10 % de los casos si el paciente no tiene la enfermedad (se llama falso positivo). Denominaremos negativas a las pruebas que no son positivas.

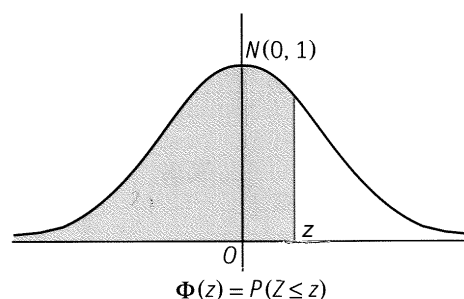
- a) Calcula la probabilidad de que un paciente, elegido al azar, dé negativo en una prueba. (1 pt.)
- b) Calcula la probabilidad de que un paciente tenga la enfermedad sabiendo que la prueba es positiva. (0,75 pt.)

8. Supongamos que el tiempo que un estudiante dedica a estudiar para un examen sigue una distribución normal con media de 10 horas y varianza de 4 horas cuadradas.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante dedique más de 12 horas a estudiar? (0,75 pt.)
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante dedique entre 8 y 14 horas a estudiar? (0,75 pt.)

## DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$-\infty < Z < +\infty$$

[illegible]

1. Se consideran las matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ m & 3 \end{pmatrix}$

a) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:  $\begin{cases} 3X + 2Y = A \\ -4X + Y = B \end{cases}$

b) ¿Para qué valores de  $m$  tiene inversa la matriz  $C$ ?

c) Para  $m = 1$ , calcula la matriz inversa de  $C$ .

a) Llamamos  $A = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$

Planteamos el sistema y lo resolvemos por reducción.

$$\begin{cases} 3X + 2Y = A \\ -4X + Y = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3X + 2Y = A \\ -8X + 2Y = 2B \end{cases} \Rightarrow 11X = A - 2B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{11} \cdot (A - 2B) = \frac{1}{11} \cdot \left[ \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -11 & 11 \\ 11 & -22 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = B + 4X = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:  $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ m & 3 \end{pmatrix}$ ;  $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ m & 3 \end{vmatrix} = 12 - 6m = 0 \Rightarrow m = \frac{12}{6} \Rightarrow m = 2$

Si  $m \neq 2 \Rightarrow |C| \neq 0 \Rightarrow C$  sí tiene inversa.

c) Si  $m = 1 \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = 12 - 6 = 6 \neq 0 \Rightarrow C$  sí tiene inversa.

Para calcular la inversa:  $C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot [\text{Adj}(C)]^t$ , La matriz adjunta:  $\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$C^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

2. Resuelve de forma analítica el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 6 \\ 4x + y \leq 10 \\ -x + y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices. (1,25 pt.)  
b) Justifica si el punto  $P(2,1)$  pertenece a la región. (0,25 pt.)  
c) Calcula el punto o puntos de la región factible donde la función  $f(x,y) = 4x + 2y - 3$  alcanza su valor máximo. (0,5 pt.)

a) **Restricciones:**  $\begin{cases} 2x + y \leq 6 \\ 4x + y \leq 10 \end{cases} \begin{cases} -x + y \leq 3 \\ x \geq 0 ; y \geq 0 \end{cases}$  La región factible se hallará en el primer cuadrante.

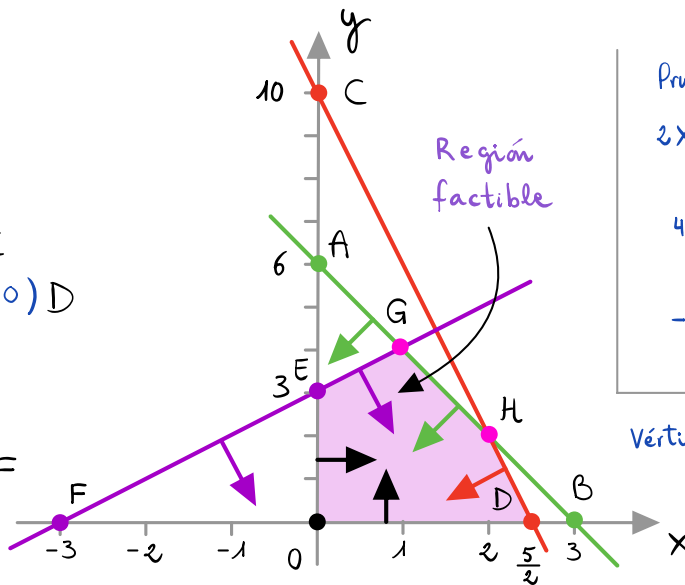
Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**.

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes  $x=0$  e  $y=0$ .

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=6 \quad (0,6) A \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=3 \quad (3,0) B \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y = 10 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=10 \quad (0,10) C \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=\frac{10}{4} = \frac{5}{2} \quad (\frac{5}{2}, 0) D \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=3 \quad (0,3) E \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=-3 \quad (-3,0) F \end{cases}$$



Pruebo el punto  $(0,0)$

$$2x + y \leq 6$$

$$0 + 0 \leq 6 \text{ cumple}$$

$$4x + y \leq 10$$

$$0 + 0 \leq 10 \text{ cumple}$$

$$-x + y \leq 3$$

$$0 + 0 \leq 3 \text{ cumple}$$

Vértices:  $O, E, G, H, D$

Por último, busco la intersección entre las restricciones. Vértices:  $G, H$

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Restamos: } \begin{cases} 3x = 3 \Rightarrow x=1 \\ y = 3 + x = 3 + 1 = 4 \end{cases} \quad (1,4) G$$

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 4x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow \text{Restamos: } \begin{cases} 2x = 4 \Rightarrow x=2 \\ y = 10 - 4x = 10 - 8 = 2 \end{cases} \quad (2,2) F$$

b) Punto  $(2,1)$ ,  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$2x + y \leq 6 \quad 4 + 1 \leq 6 \text{ cumple}$$

$$4x + y \leq 10 \quad 8 + 1 \leq 10 \text{ cumple}$$

$$-x + y \leq 3 \quad -2 + 1 \leq 3 \text{ cumple}$$

Verifica todas las condiciones, luego pertenece a la **región factible**.

c) La **función objetivo** es:  $f(x,y) = 4x + 2y - 3$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: Vértices:  $O, E, G, H, D$

$$\begin{matrix} O(0,0), f(0,0) = -3 \\ E(0,3), f(0,3) = 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} G(1,4), f(1,4) = 9 \\ F(2,2), f(2,2) = 9 \\ D(\frac{5}{2},0), f(\frac{5}{2},0) = 7 \end{matrix}$$

Alcanza el máximo en todo el segmento que va de  $(1,4)$  a  $(2,2)$ , con un valor de 9: segmento  $\overline{GF}$ .

3. La siguiente función modela el número de personas (en miles) que asisten a un evento social a lo largo del tiempo t (en días):

$$N(t) = \begin{cases} -t^2 + 4t & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{2t-3}{t-2} & \text{si } t > 3 \end{cases}$$

- a) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento del número de asistentes. ¿En qué momento es máximo? ¿Cuántos asistentes tiene el evento en ese momento? (1,5 pt.)  
b) ¿Cuándo es el número de asistentes superior a 3000? (0,5 pt.)  
c) Representa la gráfica de  $N(t)$ . (0,5 pt.)

a) Estudiemos el dominio. En el trozo 1: la función es polinómica y no hay problemas de dominio.

En el trozo 2:  $t-2=0 \Rightarrow t=2 \notin [3, \infty) \Rightarrow$  no es un problema

$$\text{Dom } N(t) = [0, \infty) \\ N(t) \in \mathcal{D}[0, \infty)$$

Monotonía: Trozo 1  $N(t) = -t^2 + 4t$   $[0, 3]$ ;  $y' = 0$  Condición de extremo.

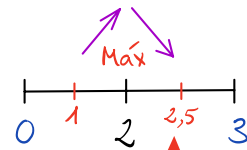
$$N'(t) = -2 \cdot t + 4 = 0, \text{ condición de extremo} \Rightarrow t = 2 \in [0, 3] \Rightarrow \text{posible extremo}$$

La monotonía se estudia en los intervalos entre los extremos y los puntos críticos

Método de la 1ª derivada

$$N'(1) > 0 \nearrow$$

$$N'(2,5) < 0 \searrow$$



Método de la 2ª derivada

$$N(0) = 0, N(2) = 4, N(3) = 3$$

$$N''(t) = -2 < 0 \Rightarrow t = 2 \text{ es un máximo local en este intervalo } [0, 3].$$

Monotonía: Trozo 2  $N(t) = \frac{2 \cdot t - 3}{t - 2}$   $(3, \infty)$ ;  $y' = 0$  Condición de extremo.

$$N'(t) = \frac{2 \cdot (t-2) - (2 \cdot t - 3) \cdot 1}{(t-2)^2} = \frac{2 \cdot t - 4 - 2 \cdot t + 3}{(t-2)^2} = \frac{-1}{(t-2)^2} \neq 0, \text{ condición de extremo} \Rightarrow$$

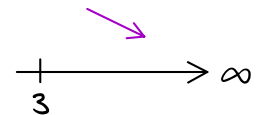
No tiene solución, luego no hay extremos.

$$N'(t) < 0 \Rightarrow \text{la función } N(t) \text{ decrece todo el tiempo en } (3, \infty).$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2 \cdot t - 3}{t - 2} = \frac{3}{1} = 3; \text{ la función es continua}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot t - 3}{t - 2} = 2; \text{ asíntota horizontal}$$

$\frac{\infty}{\infty}$  IND



El número de asistentes crece en  $[0, 2)$  días

Decrece en  $(2, \infty)$  días, es decir, del segundo día en adelante.

Intervalos de Monotonía

La asistencia máxima es de 4.000 y se produce a los 2 días; punto  $N(2) = 4$ .

b) Más de 3.000 asistentes.

Debemos comprobarlo sólo en el primer trozo.

$$N(t) > 3 \text{ (miles)}$$

Veamos el punto de corte  $N(t) = 3$

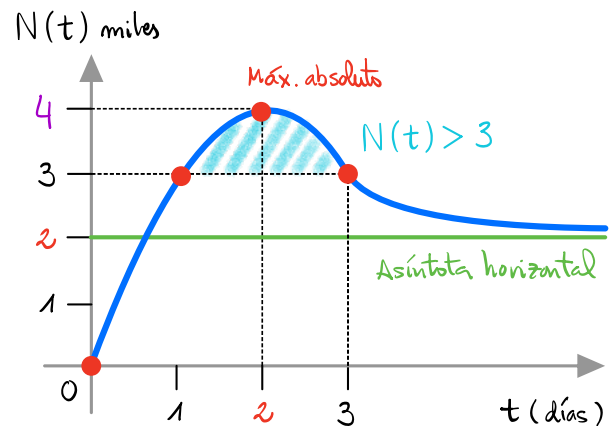
$$-t^2 + 4t = 3 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$\begin{cases} 1 \in [0, 3] \\ 3 \in [0, 3] \end{cases}$$

Los asistentes superan los 3.000 entre 1 y 3 días.

c) Esbozo de la gráfica de  $B(t)$ . Puntos:

$$\begin{array}{l|l} N(0) = 0 & N(3) = 3 \\ N(2) = 4 & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2t-3}{t-2} = 2 \end{array}$$



4. Ejercicio de análisis:

a) Se considera la función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + 16x + c$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales. Determine sus valores para que la función  $f(x)$  tenga un punto de inflexión en  $P(1,10)$  y sabiendo que la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es 7. (1,25 pt.)

b) Halla el área de la región limitada por la gráfica de las funciones:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \text{ y } g(x) = x. \quad (1,25 \text{ pt.})$$

$$f(x) \text{ pasa por el p.i. } (1, 10) \Rightarrow f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 16 \cdot 1 + c = 10 \Rightarrow a + b + c = -6$$

$$\text{Pendiente en } x=1 \text{ es } 7 \Rightarrow f'(1) = 7$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 16 \Rightarrow f'(1) = 7 \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + 16 = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a + 2b + 16 = 7 \Rightarrow 3a + 2b = -9$$

$$f''(x) = 0 \text{ Condición de punto de inflexión. } f''(1) = 0$$

$$f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow 6a(1) + 2b = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0 \Rightarrow 3a + b = 0$$

$$\text{Resolvemos el sistema: } \begin{cases} 3a + 2b = -9 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \quad \text{Restamos}$$

$$\begin{array}{l} b = -9 \\ 3a + b = 0 \Rightarrow a = \frac{-b}{3} \Rightarrow a = 3 \end{array}$$

$$\text{Finalmente } a + b + c = -6 \Rightarrow c = -6 - a - b = -6 - 3 + 9 = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\text{La función queda así: } f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 16x$$

b) Halla el área de la región limitada por la gráfica de las funciones:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \quad y \quad g(x) = x.$$

Primero calculamos los puntos de corte para saber si hay que fragmentar la integral definida y conocer los límites de integración.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x = x \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \quad [f(x) - g(x)] \Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Comprobación  $2 \cdot 1 = 2 = \frac{c}{a}$  (coeficientes) ✓

$$\swarrow x = 0$$

Hay 3 intersecciones luego tenemos que calcular 2 áreas.

El área  $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$  ;



$$A_1 = \int_0^1 |x^3 - 3x^2 + 2x| dx = \left| \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right]_0^1 \right|$$

$$A_1 = \left| \left[ \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 \right| \text{ Regla de Barrow} = \left| \frac{1}{4} - 1 + 1 \right| = \frac{1}{4} u^2$$

$$A_2 = \left| \left[ \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_1^2 \right| = \left| \left( \frac{4}{4} - 8 + 4 \right) - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4} u^2$$

El área total  $A_T = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} u^2 \Rightarrow A_T = \frac{1}{2} u^2$

5. Dados dos sucesos  $A$  y  $B$ , se sabe que:  $P(A) = 0,5$  ;  $P(B) = 0,4$  y  $P(A \cup B) = 0,8$ .

a) Calcula  $P(A|B)$ . (0,5 pt.)

b) Calcula  $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ . (0,5 pt.)

c) ¿ Son compatibles los sucesos  $A$  y  $B$  ? (0,25 pt.)

a)  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25 \Rightarrow P(A|B) = 0,25$

Sabemos que  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$$P(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,8 = 0,1$$

b) Por las leyes de Morgan  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \Rightarrow$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,8 = 0,2 \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,2$$

c) ¿ Son  $A$  y  $B$  compatibles ?

$$A \text{ y } B \text{ incompatibles} \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0$$

$P(A \cap B) = 0,1 \neq 0$ , luego son compatibles.  
 $\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

6. Un alumno va a hacer un examen de geografía que tiene 4 preguntas. Este alumno piensa que, en cada pregunta, la probabilidad que tiene de responderla correctamente es 0,7 y que cada pregunta es independiente de las demás.

- a) Calcula la probabilidad de que el alumno conteste correctamente todas las preguntas. (0,5 pt.)  
b) El alumno aprobará el examen si contesta, al menos, 2 preguntas correctamente. ¿Cuál es la probabilidad que tiene el alumno de aprobar el examen? (0,5 pt.)

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Distribución  
binomial

Combinaciones · (prob. éxito)<sup>nº éxitos</sup> · (prob. fracaso)<sup>nº fracasos</sup>

Se trata de un experimento binomial con  $p=0,7$  (llamamos éxito a que conteste correctamente).

$B(n=4, p=0,7)$ ,  $q=1-p=1-0,7=0,3$ ;  $X \equiv \{ \text{Suceso } n^\circ \text{ preguntas correctas} \}$

a) Media  $\mu = np = 4 \cdot 0,7 = 2,8$  preguntas correctas;  $X \sim B(4, 0,7)$

$k = n^\circ$  éxitos. Nos preguntan la probabilidad de 4 (todas) preguntas correctas.

$$P(X=4) = \binom{4}{4} \cdot (0,7)^4 \cdot (0,3)^0 = \frac{4!}{4!0!} \cdot (0,7)^4 \cdot (0,3)^0$$

$$P(X=4) = 1 \cdot (0,7)^4 \cdot (0,3)^0 = 0,2401$$

$$b) P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

$$P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot (0,7)^2 \cdot (0,3)^2 = \frac{4!}{2!2!} \cdot (0,7)^2 \cdot (0,3)^2$$

$$P(X=2) = 6 \cdot (0,7)^2 \cdot (0,3)^2 = 0,2646$$

$$P(X=3) = \binom{4}{3} \cdot (0,7)^3 \cdot (0,3)^1 = \frac{4!}{3!1!} \cdot (0,7)^3 \cdot (0,3)^1$$

$$P(X=3) = 4 \cdot (0,7)^3 \cdot (0,3)^1 = 0,4116$$

calculado antes

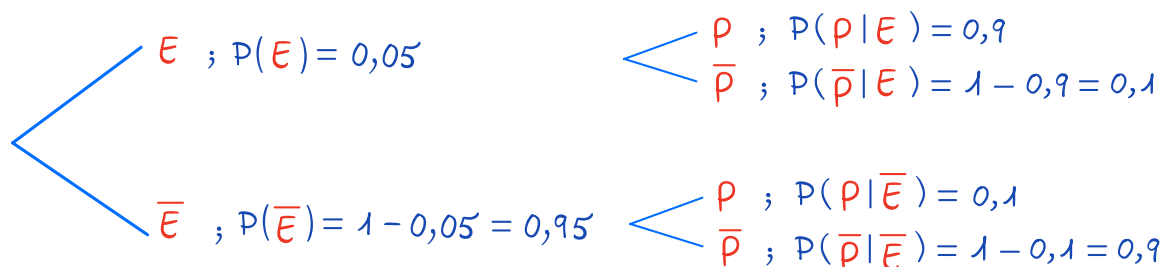
$$P(X \geq 2) = 0,2646 + 0,4116 + 0,2401 = 0,9163$$

$$P(X \geq 2) = 0,9163$$

7. En un hospital, se sabe que el 5 % de los pacientes tienen una enfermedad específica. Se dispone de una prueba diagnóstica para esta enfermedad. La prueba es positiva en el 90 % de los casos si el paciente tiene la enfermedad y es positiva en el 10 % de los casos si el paciente no tiene la enfermedad (se llama falso positivo). Denominaremos negativas a las pruebas que no son positivas.

- a) Calcula la probabilidad de que un paciente, elegido al azar, dé negativo en una prueba. (1 pt.)  
 b) Calcula la probabilidad de que un paciente tenga la enfermedad sabiendo que la prueba es positiva. (0,75 pt.)

a) Diagrama de árbol.  $E \equiv$  enfermo  $P \equiv$  positivo  $\bar{P} \equiv$  negativo



Probabilidad de que un paciente dé negativo. Probabilidad Total:

$$P(\bar{P}) = P(E) \cdot P(\bar{P}|E) + P(\bar{E}) \cdot P(\bar{P}|\bar{E})$$

$$P(\bar{P}) = 0,05 \cdot 0,1 + 0,95 \cdot 0,9 = 0,86 ; \text{ probabilidad de resultado negativo.}$$

b) Teorema de Bayes: Probabilidad de que un paciente tenga la enfermedad si la prueba es positiva.

$$P(E|P) = \frac{P(E \cap P)}{P(P)} = \frac{P(E) \cdot P(P|E)}{1 - P(\bar{P})} = \frac{0,05 \cdot 0,9}{1 - 0,86} = \frac{0,045}{0,14} = 0,32$$

Baja la probabilidad ; por esta razón , la mejor manera de comprobar que se tiene la enfermedad es realizar una segunda prueba consecutiva.

8. Supongamos que el tiempo que un estudiante dedica a estudiar para un examen sigue una distribución normal con media de 10 horas y varianza de 4 horas cuadradas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante dedique más de 12 horas a estudiar? (0,75 pt.)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante dedique entre 8 y 14 horas a estudiar? (0,75 pt.)

Llamamos  $X \equiv \{ \text{tiempo} \}$ ,  $\mu = 10h$ ,  $\sigma^2 = 4h^2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\sigma^2} = 2h$

Sigue una distribución normal  $X \sim N(\mu, \sigma) = N(10, 2)$

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}} \quad \text{Tipificación} \rightarrow Z \sim N(0, 1)$$

$$a) P(X > 12) = P\left(Z > \frac{12 - 10}{2}\right) = P(Z > 1) =$$

Tipificamos Redondeo a 2 decimales

$$1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = \boxed{0,1587}$$

Tabla 0,8413

$$b) P(8 \leq X \leq 14) = P\left(\frac{8 - 10}{2} \leq Z \leq \frac{14 - 10}{2}\right) = P(\underbrace{-1}_{\text{Redondeo a 2 decimales}} \leq Z \leq \underbrace{2}_{\text{Redondeo a 2 decimales}}) =$$

Tipificamos

$$= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 2) - [1 - P(Z \leq 1)] =$$

Tabla 0,9772 Tabla 0,8413

$$= 0,9772 - 1 + 0,8413 = \boxed{0,8185}$$