

MATRICES, DETERMINANTES, PROGRAMACIÓN LINEAL Y FUNCIONES

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de la matriz en función de los valores del parámetro a . (0,5 pt.)

b) Para $a = 2$, despeja y calcula X en la ecuación matricial $A \cdot X - A^2 = A^t$ donde A^t es la matriz traspuesta. (1,5 pt.)

2. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ x + y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices. (1,5 pt.)

b) Calcula en qué puntos de la región factible la función $f(x, y) = 5x + 5y$ alcanza sus valores máximos y mínimos. (0,5 pt.)

3. En un depósito se almacenan bidones de dos tipos, de petróleo y de gasolina. Para atender la demanda se han de tener almacenados un mínimo de 10 bidones de petróleo y un mínimo de 20 de gasolina. Siempre debe haber más bidones de gasolina que de petróleo. La capacidad máxima del depósito es de 200 bidones entre los dos tipos. Por razones comerciales debe mantenerse almacenado un mínimo de 50 bidones entre los dos tipos.

a) Formula las restricciones. Representa la región factible y calcula sus vértices. (2,25 pt.)

b) El gasto de almacenaje de un bidón de petróleo es de 20 céntimos y el de uno de gasolina es de 30 céntimos. Se desea saber cuántos bidones de cada tipo han de almacenarse para que el gasto de almacenaje sea mínimo. ¿A cuánto asciende dicho gasto?. (1,25 pt.)

4. La obsolescencia tecnológica implica una disminución del valor de un producto con el tiempo. En cierto dispositivo el valor $V(t) > 0$ viene dado por la siguiente función, siendo t los meses transcurridos desde la compra del dispositivo:

$$V(t) = \begin{cases} \frac{t^2 - 40t + 2000}{10} & \text{si } 0 \leq t \leq 20 \\ 200 - \frac{100t}{10 + 2t} & \text{si } t > 20 \end{cases}$$

a) ¿Es continuo el valor del dispositivo a los 20 meses? (0,75 pt.)

b) Calcula el valor inicial del producto y su valor en un horizonte infinito de tiempo. (0,75 pt.)

c) Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 2x + 1}$ (1 pt.)

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de la matriz en función de los valores del parámetro a .

b) Para $a = 2$, despeja y calcula X en la ecuación matricial $A \cdot X - A^2 = A^t$ donde A^t es la matriz traspuesta.

a) $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a^2 - 3$; $|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a = \pm \sqrt{3}$

Si $a \neq \sqrt{3}$ y $a \neq -\sqrt{3} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rg } A = 2$

Si $a = \sqrt{3}$ o $a = -\sqrt{3} \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{Rg } A = 1$

b) $a = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Ecuación matricial: $A \cdot X - A^2 = A^t \Rightarrow$
 $A \cdot X = A^t + A^2 \Rightarrow$ $\frac{A^{-1} \cdot A \cdot X}{I} = A^{-1} \cdot (A^t + A^2) \Rightarrow$
 $X = A^{-1} \cdot (A^t + A^2)$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$, luego tiene inversa. Para calcular la inversa:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\text{Adj}(A)]^t$, La matriz adjunta: $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow [\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ Solución

Comprobación: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Q.E.D.

Finalmente: $X = A^{-1} \cdot (A^t + A^2)$

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ Solución

2. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ x + y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices. (1,5 pt.)

b) Calcula en qué puntos de la región factible la función $f(x, y) = 5x + 5y$ alcanza sus valores máximos y mínimos. (0,5 pt.)

Restricciones:

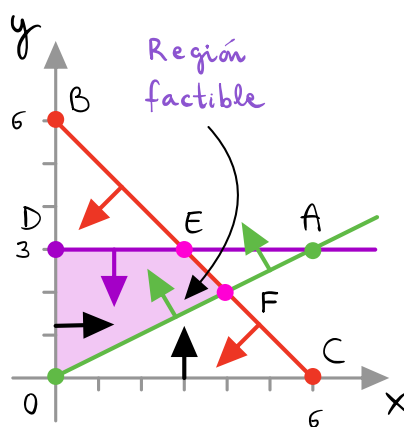
$$\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ x + y \leq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**.
Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$.

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=0 \quad (0,0) \text{ O} \\ \text{Si } y=3 \Rightarrow x=6 \quad (6,3) \text{ A al azar} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=6 \quad (0,6) \text{ B} \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=6 \quad (6,0) \text{ C} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow (0,0) \text{ O vertical} \\ y=3 \Rightarrow (0,3) \text{ D horizontal} \end{cases}$$



Pruebo el punto $(0,1)$

$$x - 2y \leq 0$$

$$0 - 2 \cdot 1 \leq 0 \quad \text{cumple}$$

Pruebo el punto $(0,0)$

$$x + y \leq 6$$

$$0 + 0 \leq 6 \quad \text{cumple}$$

$$y \leq 3$$

$$0 \leq 3 \quad \text{cumple}$$

Vértices: O, D, E, F

Por último, busco la intersección entre las restricciones. Vértices: E, F

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 - y \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow (3,3) \text{ E}$$

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + y = 6 \\ 3y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow (4,2) \text{ F}$$

La **función objetivo** es: $f(x, y) = 5x + 5y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: Vértices: O, D, E, F

$$\left. \begin{array}{l} O(0,0) \quad , \quad f(0,0) = 0 \\ D(0,3) \quad , \quad f(0,3) = 15 \\ E(3,3) \quad , \quad f(3,3) = 30 \\ F(4,2) \quad , \quad f(4,2) = 30 \end{array} \right\}$$

Alcanza el mínimo en el punto $(0,0)$ con un valor de 0.
Alcanza el máximo en todo el segmento que va de $(3,3)$ a $(4,2)$ con un valor de 30. $\overline{EF}$

3. En un depósito se almacenan bidones de dos tipos, de petróleo y de gasolina. Para atender la demanda se han de tener almacenados un mínimo de 10 bidones de petróleo y un mínimo de 20 de gasolina. Siempre debe haber más bidones de gasolina que de petróleo. La capacidad máxima del depósito es de 200 bidones entre los dos tipos. Por razones comerciales debe mantenerse almacenado un mínimo de 50 bidones entre los dos tipos.

- a) Formula las restricciones. Representa la región factible y calcula sus vértices. (2,25 pt.)
- b) El gasto de almacenaje de un bidón de petróleo es de 20 céntimos y el de uno de gasolina es de 30 céntimos. Se desea saber cuántos bidones de cada tipo han de almacenarse para que el gasto de almacenaje sea mínimo. ¿A cuánto asciende dicho gasto?. (1,25 pt.)

Llamaremos:

$$\begin{array}{l} x \equiv \text{bidones petróleo} \\ y \equiv \text{bidones gasolina} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 20 \text{ c.€} \\ 30 \text{ c.€} \end{array} \right.$$

Función objetivo:

$$f(x, y) = \underbrace{20x}_{\text{petróleo}} + \underbrace{30y}_{\text{gasolina}} \quad (\text{gasto mínimo})$$

$$\text{Restricciones: } \left\{ \begin{array}{l} x \geq 10 \\ y \geq 20 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} y \geq x \\ x + y \leq 200 \\ x + y \geq 50 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ (\text{No negatividad}) \end{array} \right\}$$

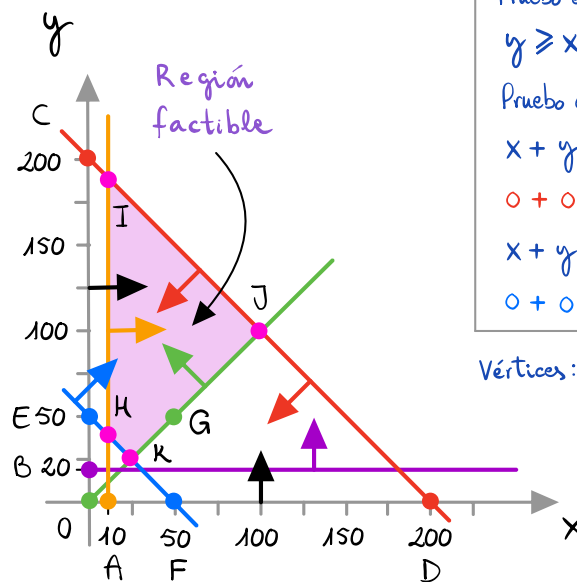
Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**.
Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 10 \Rightarrow (10, 0) \text{ A vertical} \\ y = 20 \Rightarrow (0, 20) \text{ B horizontal} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 200 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=200 \text{ (0, 200) C} \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=200 \text{ (200, 0) D} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 50 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=50 \text{ (0, 50) E} \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=50 \text{ (50, 0) F} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x \text{ elegimos dos puntos al azar} \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=0 \text{ (0, 0) O} \\ \text{Si } y=50 \Rightarrow x=50 \text{ (50, 50) G} \end{array} \right.$$



Pruebo el punto (0, 1)
 $y \geq x \Rightarrow 1 \geq 0$ cumple
 Pruebo el punto (0, 0)
 $x + y \leq 200$
 $0 + 0 \leq 200$ cumple
 $x + y \geq 50$
 $0 + 0 \not\geq 50$ no cumple

Vértices: H, I, J, K

Por último, busco la intersección entre las restricciones: H, I, J, K

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 50 \\ x = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 50 - 10 = 40 \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = 200 \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 200 \Rightarrow x = 100 = y$$

Luego (10, 40) H ; Luego (100, 100) J

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 200 \\ x = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 200 - 10 = 190 \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = 50 \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 50 \Rightarrow x = 25 = y$$

Luego (10, 190) I ; Luego (25, 25) K

La **función objetivo** es: $f(x, y) = 20x + 30y$ (gasto mínimo en céntimos de euro c.€)

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: H, I, J, K

$$\left\{ \begin{array}{l} H, f(10, 40) = 1400 \text{ c.€} \\ I, f(10, 190) = 5900 \text{ c.€} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} J, f(100, 100) = 5000 \text{ c.€} \\ K, f(25, 25) = 1250 \text{ c.€} \end{array} \right.$$

Lograremos un gasto mínimo de 1250 c.€ almacenando 25 bidones de cada tipo.

4. La obsolescencia tecnológica implica una disminución del valor de un producto con el tiempo. En cierto dispositivo el valor $V(t) > 0$ viene dado por la siguiente función, siendo t los meses transcurridos desde la compra del dispositivo:

$$V(t) = \begin{cases} \frac{t^2 - 40t + 2000}{10} & \text{si } 0 \leq t \leq 20 \\ 200 - \frac{100t}{10 + 2t} & \text{si } t > 20 \end{cases}$$

- a) ¿Es continuo el valor del dispositivo a los 20 meses? (0,75 pt.)
 b) Calcula el valor inicial del producto y su valor en un horizonte infinito de tiempo. (0,75 pt.)
 c) Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 2x + 1}$ (1 pt.)

a) Estudiemos el dominio de la función. Buscamos los puntos problemáticos.

En el primer trozo, la función es polinómica y no tiene ningún problema.

En el 2º trozo estudiamos las raíces del denominador.

$$10 + 2 \cdot t = 0 \Rightarrow t = -5 \notin [0, 20], \text{ luego no hay problema de dominio.}$$

El dominio $V(t) \in \mathcal{D}(0, \infty)$

Continuidad en los abiertos

$V(t)$ es continua en $(0, 20)$ por ser una función polinómica.

$V(t)$ es continua en $(20, \infty)$, porque el denominador no se anula.

El único punto problemático es $t = 20$, la frontera entre los intervalos.

Continuidad $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$; Puntos problemáticos $\{20\}$

Estudiamos $t = 20$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 20^-} \frac{t^2 - 40t + 2000}{10} &= 160 = V(20) \\ \lim_{x \rightarrow 20^+} 200 - \frac{100t}{10 + 2t} &= 160 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$V(t)$ es continua en $t = 20$ meses

La continuidad $V(t) \in \mathcal{C}(0, \infty)$

b) $V(0) = \frac{0^2 - 40 \cdot 0 + 2000}{10} = 200$; A largo plazo, calculamos el límite en el 2º trozo.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 200 - \frac{100t}{10 + 2t} = 200 - \frac{100}{2} = 150$$

$\uparrow$
 $\frac{\infty}{\infty}$ IND

A largo plazo el valor tiende a 150.

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 2x + 1} \Rightarrow$ Factorizamos por Ruffini con la raíz común $x = 1$.

$\uparrow$
 $\frac{0}{0} \text{ IND}$

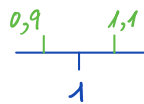
$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 1 & -2 & 1 \\ & & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x^2 - x - 2)}{(x-1) \cdot (x-1)} = \frac{-2}{0} = \infty \text{ IND}$$

Estudiamos los límites laterales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} = -\infty \end{array} \right\}$$



Nos aproximamos por la izquierda y por la derecha