

ÁLGEBRA Y ANÁLISIS

OPCIÓN A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro a . (0,5 pt.)

b) Para $a = 3$, calcula la matriz inversa de $A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 (1 pt.)

c) Calcula X en la ecuación matricial $A \cdot X = B + X$. (1 pt.)

2. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + ax + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2 + 2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 0$. (1,25 pt.)

3. Sea $P(t) = 1.000 \cdot \left(15 + \frac{t}{100 + t^2}\right)$ una función que representa el número de habitantes de cierta población, siendo t el número de años transcurridos desde el año 2000.

a) Calcula el tamaño de la población en un horizonte infinito de tiempo. (0,5 pt.)

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la población. ¿En qué momento la población es máxima? ¿Cuántos habitantes tiene la población en ese momento? (1,75 pt.)

c) ¿Cuándo es la población mayor que 15.040 individuos? (0,75 pt.)

d) Representa la gráfica de $P(t)$. (0,5 pt.)

4. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ tiene las siguientes características: tiene un punto de inflexión en $(2, -5)$ y la pendiente de la recta tangente en ese punto es $f'(2) = -12$. Obtén el valor de los parámetros a , b y c . (1,25 pt.)

5. Sea la función $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 5$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$. (0,5 pt.)

b) Calcula la primitiva de la función para que $F(2) = 4$. (1 pt.)

OPCIÓN B

1. Un producto se compone de la mezcla de otros dos A y B . Se dispone de 500 kg de A y 500 kg de B . En la mezcla, el peso de B tiene que ser menor o igual que $1,5$ veces el de A . Para satisfacer la demanda, la producción debe ser mayor o igual a 600 kg .

- a) Formula el sistema de inecuaciones. Representa la región factible y calcula sus vértices. (1,75 pt.)
- b) Sabiendo que cada kilogramo de A cuesta 5 euros y cada kilogramo de B cuesta 4 euros, calcula los kilogramos de A y B que deben emplearse para hacer una mezcla de coste mínimo, que cumpla los requisitos anteriores. Obtén dicho coste mínimo. (0,75 pt.)

2. Sea la función definida a trozos:
$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} + ax + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2 + 2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 0$. (1,25 pt.)

3. Sea $P(t) = 1.000 \cdot \left(15 + \frac{t}{100 + t^2}\right)$ una función que representa el número de habitantes de cierta población, siendo t el número de años transcurridos desde el año 2000.

- a) Calcula el tamaño de la población en un horizonte infinito de tiempo. (0,5 pt.)
- b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la población. ¿En qué momento la población es máxima? ¿Cuántos habitantes tiene la población en ese momento? (1,75 pt.)
- c) ¿Cuándo es la población mayor que 15.040 individuos? (0,75 pt.)
- d) Representa la gráfica de $P(t)$. (0,5 pt.)

4. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ tiene las siguientes características: tiene un punto de inflexión en $(2, -5)$ y la pendiente de la recta tangente en ese punto es $f'(2) = -12$. Obtén el valor de los parámetros a , b y c . (1,25 pt.)

5. Sea la función $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 5$.

- a) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$. (0,5 pt.)
- b) Calcula la primitiva de la función para que $F(2) = 4$. (1 pt.)

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro a . (0,5 pt.)

b) Para $a = 3$, calcula la matriz inversa de $A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 (1 pt.)

c) Calcula X en la ecuación matricial $A \cdot X = B + X$. (1 pt.)

$$a) |A| = \begin{vmatrix} 2 & a & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a & 2 \\ a & 2 \end{vmatrix}}_0 = 2(4 - a) = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$\text{Si } a \neq 4 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A = 3$$

$$\text{Si } a = 4 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{Rango } A < 3$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{El menor de orden 2: } \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A = 2 \text{ si } a = 4$$

b) Si $a = 3$, calcula $(A - I)^{-1}$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = C \quad \text{Lo renombramos por comodidad.}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - F_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{luego tiene inversa.}$$

Para calcular la inversa: $C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot [\text{Adj}(C)]^t$, La matriz adjunta:

$$\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Adj}(C)]^t = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}} = C^{-1}$$

$$\text{Comprobación: } C \cdot C^{-1} = I, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Q.E.D.}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{c)} & (A-I)^{-1} \cdot (A-I) \cdot X = (A-I)^{-1} \cdot \beta \\ A \cdot X = \beta + X & \underbrace{\hspace{1cm}}_I \\ A \cdot X - X = \beta & \Rightarrow \boxed{X = (A-I)^{-1} \cdot \beta} \\ (A-I) \cdot X = \beta & \end{array}$$

$$X = (A-I)^{-1} \cdot \beta = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

1. Un producto se compone de la mezcla de otros dos A y B. Se dispone de 500 kg de A y 500 kg de B. En la mezcla, el peso de B tiene que ser menor o igual que 1,5 veces el de A. Para satisfacer la demanda, la producción debe ser mayor o igual a 600 kg.

- a) Formula el sistema de inecuaciones. Representa la región factible y calcula sus vértices. (1,75 pt.)
- b) Sabiendo que cada kilogramo de A cuesta 5 euros y cada kilogramo de B cuesta 4 euros, calcula los kilogramos de A y B que deben emplearse para hacer una mezcla de coste mínimo, que cumpla los requisitos anteriores. Obtén dicho coste mínimo. (0,75 pt.)

Llamaremos: Coste
 $x \equiv \text{tipo A} \left\{ \begin{array}{l} 5 \text{€} \\ 4 \text{€} \end{array} \right.$
 $y \equiv \text{tipo B}$

Función objetivo:

$$f(x, y) = \underbrace{5x}_A + \underbrace{4y}_B$$

(coste mínimo)

Restricciones:

$$\begin{array}{l} \text{Máximos} \\ x \leq 500 \\ y \leq 500 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y \leq 1,5x \Rightarrow \\ 2y \leq 3x \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x + y \geq 600 \\ x \geq 0 ; y \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{No negatividad})$$

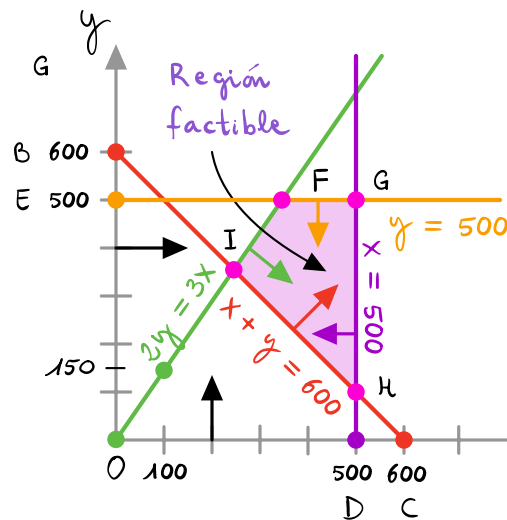
Para encontrar la región factible, graficamos las rectas que delimitan las restricciones.
 Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2y = 3x \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=0 \quad (0,0) O \\ \text{Si } x=100 \Rightarrow y=150 \quad (100,150) A \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 600 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=600 \quad (0,600) B \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=600 \quad (600,0) C \end{array} \right.$$

$$x = 500 \Rightarrow (500,0) D$$

$$y = 500 \Rightarrow (0,500) E$$



Pruebo el punto (0,0)
 $0 + 0 \geq 600$ No cumple
 $0 \leq 500$ cumple
 $0 \leq 500$ cumple
 Pruebo el punto (0,1)
 $2y \leq 3x \Rightarrow 2 \leq 0$ No cumple

Vértices: F, G, H, I

Por último, busco la intersección entre las restricciones: F, G, H, I

$$\left\{ \begin{array}{l} 2y = 3x \\ y = 500 \end{array} \right\} \Rightarrow 1000 = 3x \Rightarrow \text{Luego } \left(\frac{1000}{3}, 500 \right) F ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 500 \\ y = 500 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Luego } (500, 500) G$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 500 \\ x + y = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 100 \text{ Luego } (500, 100) H ; \quad \left\{ \begin{array}{l} 2y = 3x \\ x + y = 600 \end{array} \right\} \cdot 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2y - 3x = 0 \\ 2x + 2y = 1200 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x = 1200 \Rightarrow x = 240 \\ y = 360 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Luego } (240, 360) I$$

La función objetivo es: $f(x, y) = 5x + 4y$ (coste mínimo)

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: F, G, H, I

$$\left\{ \begin{array}{l} F, f\left(\frac{1000}{3}, 500\right) \simeq 3667 \text{€} \\ G, f(500, 500) = 4500 \text{€} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} H, f(500, 100) = 2900 \text{€} \\ I, f(240, 360) = 2640 \text{€} \end{array} \right\}$$

Lograremos un coste mínimo de 2640€ empleando 240 kg de tipo A y 360 kg de tipo B.

2. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + ax + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2 + 2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 0$.

Para que sea derivable, es condición necesaria que sea **continua** en $x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{2x} + ax + b = 1 + b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 = f(0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Para que } f(x) \text{ sea continua en } x = 0, \\ \text{deberán coincidir los límites laterales.} \end{array}$$

$1 + b = 1 \Rightarrow b = 0$ [1] Condición de continuidad ; sustituimos $b = 0$

La condición de **derivabilidad** es: $f'(0^-) = f'(0^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{2x} + a & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 2x = x & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 \cdot e^{2x} + a = x \text{ en } x = 0 \\ 2 + a = 0 \Rightarrow a = -2 \end{array} \quad [2] \text{ Condición de derivabilidad}$$

$f(x)$ es derivable en $x = 0$ si $a = -2$ y $b = 0$

3. Sea $P(t) = 1.000 \cdot \left(15 + \frac{t}{100 + t^2}\right)$ una función que representa el número de habitantes de cierta población, siendo t el número de años transcurridos desde el año 2000.

- Calcula el tamaño de la población en un horizonte infinito de tiempo. (0,5 pt.)
- Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la población. ¿En qué momento la población es máxima? ¿Cuántos habitantes tiene la población en ese momento? (1,75 pt.)
- ¿Cuándo es la población mayor que 15.040 individuos? (0,75 pt.)
- Representa la gráfica de $P(t)$. (0,5 pt.)

$$a) \lim_{t \rightarrow \infty} 1000 \cdot \left(15 + \frac{t}{100 + t^2}\right) = 15000 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1000t}{100 + t^2} = 15000 + 0 = \boxed{15000 \text{ habitantes}}$$

$\uparrow$
 $\frac{\infty}{\infty}$ IND

$$b) P(t) = 15000 + \frac{1000t}{100 + t^2} ; 100 + t^2 = 0 \text{ no tiene solución} \Rightarrow D P(t) = \mathbb{R}^+, t \geq 0$$

$$D P(t) = [0, \infty)$$

$$P'(t) = 0 \quad \text{Condición de extremo.}$$

Empieza en el año 2000

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad P'(t) = \frac{1000(100 + t^2) - 1000t \cdot 2t}{(100 + t^2)^2} = 0$$

se cancela el denominador

$$\Rightarrow 1000(100 + t^2) - 1000t \cdot 2t = 0$$

$$\Rightarrow (100 + t^2) = 2t^2 \Rightarrow t^2 = 100 \Rightarrow t = \pm 10 \quad \text{Posible extremo, sólo } t = 10 \in [0, \infty)$$

Método de la 1ª derivada

Evaluamos puntos al azar en cada intervalo

$$P'(0) = \frac{+}{+} > 0 \quad \nearrow$$

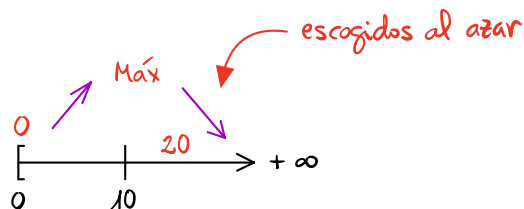
$$P'(20) = \frac{-}{+} < 0 \quad \searrow$$

En $t = 10$ hay un máximo relativo

$$P(0) = 15000$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 15000$$

Tenemos que estudiar lo que ocurre a su izquierda y a su derecha.



Intervalos de Monotonía

Crece $(0, 10)$ del 2000 al 2010.

Decrece $(10, \infty)$ del 2010 en adelante.

$$P(10) = 15050 \text{ habitantes luego el máximo se alcanza en el 2010.}$$

c) $P(t) = 15000 + \frac{1000t}{100+t^2}$; ¿Cuándo es mayor que 15040?

$$15000 + \frac{1000t}{100+t^2} > 15040 \Rightarrow \frac{1000t}{100+t^2} > 40 \quad ; \text{ resolvemos las raíces:}$$

$$\frac{1000t}{100+t^2} = 40 \Rightarrow 1000t = 4000 + 40t^2 \quad \div 40 \Rightarrow 25t = 100 + t^2$$

$$t^2 - 25t + 100 = 0 \Rightarrow t = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 4 \cdot 1 \cdot 100}}{2} = \frac{25 \pm 15}{2} = \begin{cases} 20 \\ 5 \end{cases}$$

La población será superior a 15040 habitantes entre el 2005 y el 2020.

d) Gráfica de $P(t)$

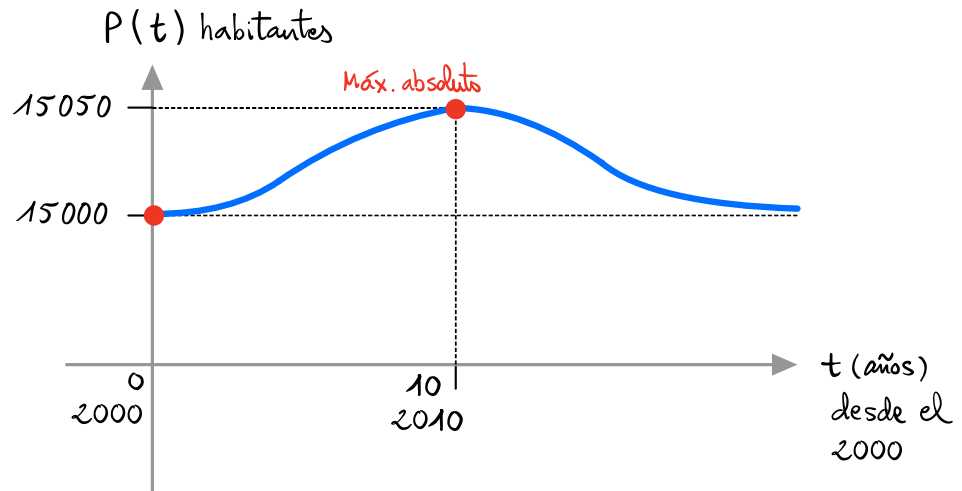
Puntos:

$(0, 15000)$

$(10, 15050)$

Asíntota horizontal en:

$$P(t) = 15000$$



4. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ tiene las siguientes características: tiene un punto de inflexión en $(2, -5)$ y la pendiente de la recta tangente en ese punto es $f'(2) = -12$. Obtén el valor de los parámetros a , b y c . (1,25 pt.)

$$f(x) \text{ pasa por el p.i.} \Rightarrow f(2) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c = -5 \Rightarrow 8a + 4b + c = -5$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{Condición de punto de inflexión.}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 3ax^2 + 2bx &\Rightarrow f'(2) = -12 \Rightarrow 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 = -12 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 12a + 4b = -12 \Rightarrow 3a + b = -3 \end{aligned}$$

$$f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow 6a(2) + 2b = 0 \Rightarrow 12a + 2b = 0 \Rightarrow 6a + b = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Resolvemos el sistema: } \left. \begin{array}{l} 3a + b = -3 \\ 6a + b = 0 \end{array} \right\} \text{Restamos} \quad & 3a = 3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \\ & b = -6a = -6 \Rightarrow b = -6 \end{aligned}$$

$$\text{Finalmente } 8a + 4b + c = -5 \Rightarrow c = -5 - 8a - 4b = -5 - 8 - 4(-6) = 11 \Rightarrow c = 11$$

$$\text{La función queda así: } f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 11$$

5. Sea la función $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 5$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$.

b) Calcula la primitiva de la función para que $F(2) = 4$.

a) Calcula la recta tangente en $x_0 = 1$;

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{Ecuación punto-pendiente}$$

$$f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 5 \Rightarrow f(1) = 3 - 6 + 5 = 2$$

$$f'(x) = 9x^2 - 12x \Rightarrow f'(1) = -3$$

recta tangente

$$y - 2 = -3(x - 1)$$

$$b) \quad I = \int (3x^3 - 6x^2 + 5) dx = 3 \frac{x^4}{4} - 6 \frac{x^3}{3} + 5x + C = \frac{3x^4}{4} - 2x^3 + 5x + C$$

$$F(2) = 4 \Rightarrow \frac{3 \cdot 2^4}{4} - 2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2 + C = 4 \Rightarrow 12 - 16 + 10 + C = 4 \Rightarrow C = -2$$