

ÁLGEBRA Y ANÁLISIS

OPCIÓN A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ m & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

- a) Calcula el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro m . (0,75 pt.)
- b) Para $m = 5$, calcula la matriz inversa de A . (1,25 pt.)
- c) Para $m = 5$ despeja y calcula X en la ecuación matricial: $X \cdot A - B = 2 \cdot I$, siendo I la matriz identidad de orden 3. (1 pt.)

2. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ x^3 - x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 1$. (1,25 pt.)

3. El rendimiento de una máquina (en una escala de 0 a 100, sin unidades) viene dado por la función:

$$R(t) = \frac{380 \cdot t}{t^2 + 4}, \text{ siendo } t > 0 \text{ el tiempo en horas que lleva funcionando.}$$

- a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento del rendimiento de la máquina durante las primeras 7 horas de funcionamiento. (1 pt.)
- b) Calcula el momento en el que se consigue el rendimiento máximo. ¿Cuál es su valor? (0,75 pt.)

4. Una enfermedad se propaga de tal modo que, después de t semanas, afectó a $N(t)$ cientos de personas siendo la función:

$$N(t) = \begin{cases} 5 - t^2(t - 6) & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ -\frac{5}{4}(t - 10) & \text{si } 6 < t \leq 10 \end{cases} \quad (t \text{ es el tiempo transcurrido en semanas}).$$

- a) Determina los períodos en los que aumentó y en los que disminuyó el número de personas afectadas y la semana en la que se produce el máximo de personas afectadas. (1,5 pt.)
- b) Calcula la semana en la que se produce un punto de inflexión de $N(t)$. (0,5 pt.)
- c) ¿A partir de qué semana la enfermedad afecta a 250 personas como máximo? (0,5 pt.)

5. Sea la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

- a) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$. (0,5 pt.)
- b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje X . (1 pt.)



COLEGIO SANTA MARÍA DEL MAR. JESUITAS. A CORUÑA. DPTO: MAT
EXAMEN DE MATEMÁTICAS CCSS - 2º BACHILLERATO **23/02/2023**
CONTROL GLOBAL (ÁLGEBRA Y ANÁLISIS)

NOMBRE:

OPCIÓN B

1. Un vivero elabora dos tipos de sustratos. Para elaborar 1 m^3 del tipo A necesita 60 kg de tierra vegetal y 30 horas de trabajo. Para elaborar 1 m^3 del tipo B necesita 50 kg de tierra vegetal y 50 horas de trabajo. El vivero dispone como máximo de 21000 kg de tierra vegetal y 15000 horas de trabajo. Además, la cantidad de metros cúbicos que elabora de tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B . Por la venta de cada metro cúbico de tipo A obtiene un beneficio de 50 € y de 60 € por cada metro cúbico de tipo B .
 - a) Formula el sistema de inecuaciones. Representa la región factible y calcula sus vértices.
 - b) Determine cuántos metros cúbicos de cada tipo deben elaborarse para, respetando las restricciones anteriores, maximizar el beneficio. Obtenga el valor del beneficio máximo. (Total: 3 pt.)
2. Sea la función definida a trozos:
$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ x^3 - x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 1$. (1,25 pt.)
3. El rendimiento de una máquina (en una escala de 0 a 100, sin unidades) viene dado por la función:
$$R(t) = \frac{380 \cdot t}{t^2 + 4}, \text{ siendo } t > 0 \text{ el tiempo en horas que lleva funcionando.}$$
 - a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento del rendimiento de la máquina durante las primeras 7 horas de funcionamiento. (1 pt.)
 - b) Calcula el momento en el que se consigue el rendimiento máximo. ¿Cuál es su valor? (0,75 pt.)
4. Una enfermedad se propaga de tal modo que, después de t semanas, afectó a $N(t)$ cientos de personas siendo la función:
$$N(t) = \begin{cases} 5 - t^2(t - 6) & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ -\frac{5}{4}(t - 10) & \text{si } 6 < t \leq 10 \end{cases} \quad (t \text{ es el tiempo transcurrido en semanas}).$$
 - a) Determina los períodos en los que aumentó y en los que disminuyó el número de personas afectadas y la semana en la que se produce el máximo de personas afectadas. (1,5 pt.)
 - b) Calcula la semana en la que se produce un punto de inflexión de $N(t)$. (0,5 pt.)
 - c) ¿A partir de qué semana la enfermedad afecta a 250 personas como máximo? (0,5 pt.)
5. Sea la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.
 - a) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$. (0,5 pt.)
 - b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje X . (1 pt.)

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ m & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

- a) Calcula el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro m . (0,75 pt.)
- b) Para $m = 5$, calcula la matriz inversa de A . (1,25 pt.)
- c) Para $m = 5$ despeja y calcula X en la ecuación matricial: $X \cdot A - B = 2 \cdot I$, siendo I la matriz identidad de orden 3. (1 pt.)

$$a) |A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ m & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ m & -4 \end{vmatrix} = -(-16 + 3m) = 0 \Rightarrow m = \frac{16}{3}$$

$$\text{Si } m \neq \frac{16}{3} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A = 3$$

$$\text{Si } m = \frac{16}{3} \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{Rango } A < 3$$

$$\text{El menor de orden 2: } \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A = 2 \text{ si } m = \frac{16}{3}$$

b) Si $m = 5$, calcula A^{-1} ; $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $|A| = -(-16 + 3 \cdot 5) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ luego tiene inversa.

Para calcular la inversa: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\text{Adj}(A)]^t$, La matriz adjunta:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Comprobación: $A \cdot A^{-1} = I$, $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Q.E.D

b) $X \cdot A - B = 2 \cdot I$
 $X \cdot A = 2 \cdot I + B$ $\left| \begin{array}{l} X \cdot \underbrace{A^{-1} \cdot A}_I = (2 \cdot I + B) \cdot A^{-1} \Rightarrow \boxed{X = (2 \cdot I + B) \cdot A^{-1}} \end{array} \right.$

$$2 \cdot I + B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = (2 \cdot I + B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 27 & -20 & 3 \\ 17 & -13 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = X}$$

1. Un vivero elabora dos tipos de sustratos. Para elaborar 1 m^3 del tipo A necesita 60 kg de tierra vegetal y 30 horas de trabajo. Para elaborar 1 m^3 del tipo B necesita 50 kg de tierra vegetal y 50 horas de trabajo. El vivero dispone como máximo de 21000 kg de tierra vegetal y 15000 horas de trabajo. Además, la cantidad de metros cúbicos que elabora de tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B. Por la venta de cada metro cúbico de tipo A obtiene un beneficio de 50 € y de 60 € por cada metro cúbico de tipo B.

- a) Formula el sistema de inecuaciones. Representa la región factible y calcula sus vértices.
- b) Determine cuántos metros cúbicos de cada tipo deben elaborarse para, respetando las restricciones anteriores, maximizar el beneficio. Obtenga el valor del beneficio máximo. (Total: 3 pt.)

	kg Tierra	Horas	Benef.
A(x)	60	30	50 €
B(y)	50	50	60 €
Máx.	21.000	15.000	

Función objetivo: Beneficio máximo

$$f(x, y) = 50x + 60y$$

Restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} 60x + 50y \leq 21.000 \\ 30x + 50y \leq 15.000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 5y \leq 2100 \\ 3x + 5y \leq 1500 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x \leq 5y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{No} \\ \text{negatividad} \end{array}$$

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$.

$$6x + 5y = 2100$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = \frac{2100}{5} = 420 \Rightarrow (0, 420) A$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = \frac{2100}{6} = 350 \Rightarrow (350, 0) B$$

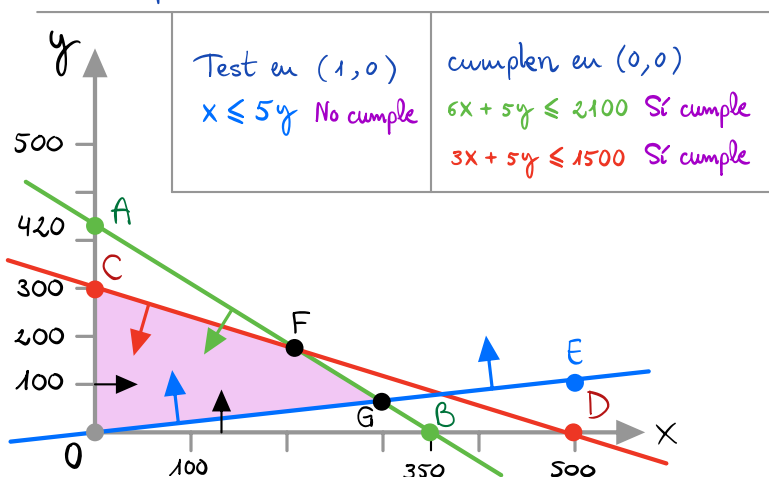
$$3x + 5y = 1500$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = \frac{1500}{5} = 300 \Rightarrow (0, 300) C$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = \frac{1500}{3} = 500 \Rightarrow (500, 0) D$$

$$x = 5y \Rightarrow (0, 0) \text{ y por ejemplo } (500, 100) E$$

Para encontrar la región factible, graficamos las rectas que delimitan las restricciones:



Región factible de vértices OCFG

Por último, busco la intersección entre las restricciones

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 5y = 2100 \\ 3x + 5y = 1500 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 3x = 600 \Rightarrow x = 200 \\ \text{resto } y = \frac{1500 - 3 \cdot 200}{5} = 180 \end{array} \Rightarrow (200, 180) F$$

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 5y = 2100 \\ x = 5y \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 6x + x = 7x = 2100 \\ x = 300 \Rightarrow y = \frac{300}{5} = 60 \end{array} \Rightarrow (300, 60) G$$

La función objetivo es: $f(x, y) = 50x + 60y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: O, C, F, G

$$O, f(0, 0) = 0 \text{ €}$$

$$C, f(0, 300) = 18.000 \text{ €}$$

$$F, f(200, 180) = 20.800 \text{ €}$$

$$G, f(300, 60) = 18.600 \text{ €}$$

Obtenemos un beneficio máximo de 20.800 € en el vértice F produciendo 200 m^3 de sustrato tipo A y 180 m^3 de sustrato tipo B.

2. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ x^3 - x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 1$.

Para que sea derivable, es condición necesaria que sea continua en $x = 1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} ax + b &= a + b = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x^3 - x^2 + 1 &= +1 - 1 + 1 = 1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Para que } f(x) \text{ sea continua en } x = 1, \\ \text{deberán coincidir los límites laterales.} \end{array}$$

$a + b = 1$ [1] Condición de continuidad

La condición de derivabilidad es: $f'(1^-) = f'(1^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 1 \\ 3x^2 - 2x & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 3x^2 - 2x \text{ en } x = 1 \\ a = 3 - 2 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{[2]} \text{ Condición de} \\ \text{derivabilidad} \end{array}$$

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} a + b = 1 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow b = 0$

$f(x)$ es derivable en $x = 1$ si $a = 1$ y $b = 0$

3. El rendimiento de una máquina (en una escala de 0 a 100, sin unidades) viene dado por la función:

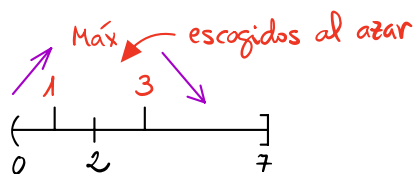
$R(t) = \frac{380 \cdot t}{t^2 + 4}$, siendo $t > 0$ el tiempo en horas que lleva funcionando.

- a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento del rendimiento de la máquina durante las primeras 7 horas de funcionamiento. (1 pt.)
- b) Calcula el momento en el que se consigue el rendimiento máximo. ¿Cuál es su valor? (0,75 pt.)

a) $R(t) = \frac{380 \cdot t}{t^2 + 4}$; $t^2 + 4 = 0$ X Sin solución. No tiene puntos críticos. Monotonía en $(0, 7]$

$R'(t) = \frac{380 \cdot (t^2 + 4) - 380 \cdot t \cdot 2t}{(t^2 + 4)^2} = \frac{380 \cdot (t^2 + 4) - 2 \cdot 380 \cdot t^2}{(t^2 + 4)^2} = \frac{380 \cdot (4 - t^2)}{(t^2 + 4)^2} = 0$ Condición de extremo.

$4 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2$, sólo $2 \in (0, 7]$; usamos la primera derivada:



$R'(1) = \frac{+}{+} > 0$

$R'(3) = \frac{-}{+} < 0$

Crece $(0, 2)$

Decrece $(2, 7)$

Intervalos de Monotonía

En $x = 2$ hay un máximo relativo

$R(0) = 0$

$R(2) = 95$

$R(7) = 50,19$

b) El máximo rendimiento se alcanza a $t = 2$ horas con un índice:

$R(2) = 95$

A partir de $t = 2$ horas el índice decrece.

4. Una enfermedad se propaga de tal modo que, después de t semanas, afectó a $N(t)$ cientos de personas siendo la función:

$$N(t) = \begin{cases} 5 - t^2(t - 6) & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ -\frac{5}{4}(t - 10) & \text{si } 6 < t \leq 10 \end{cases} \quad (t \text{ es el tiempo transcurrido en semanas}).$$

- a) Determina los períodos en los que aumentó y en los que disminuyó el número de personas afectadas y la semana en la que se produce el máximo de personas afectadas. (1,5 pt.)
b) Calcula la semana en la que se produce un punto de inflexión de $N(t)$. (0,5 pt.)
c) ¿A partir de qué semana la enfermedad afecta a 250 personas como máximo? (0,5 pt.)

a) Monotonía y extremos absolutos de la función $N(t)$.

Trozo 1 $N(t) = 5 - t^3 + 6t^2 \quad [0, 6]$

$$N'(t) = -3t^2 + 12t = 0, \text{ condición de extremo} \Rightarrow$$

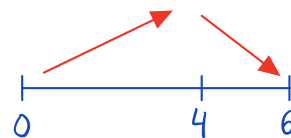
$$\Rightarrow 12t = 3t^2 \Rightarrow t = 0 ; t = 4 ; \text{ dos posibles extremos.}$$

$$N''(t) = -6t + 12 \Rightarrow \begin{cases} N''(0) > 0, t = 0 \text{ es un mínimo local} \\ N''(4) < 0, t = 4 \text{ es un máximo local} \end{cases}$$

$$N(0) = 5$$

$$N(4) = 5 - 4^3 + 6 \cdot 4^2 = 37 \Rightarrow \text{es un máximo local en } [0, 6]$$

$$N(6) = 5 - 6^3 + 6 \cdot 6^2 = 5$$



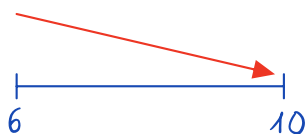
Trozo 2 $N(t) = -\frac{5}{4}t + \frac{50}{4} \quad (6, 10]$

$$N'(t) = -\frac{5}{4} \neq 0, \text{ condición de extremo} \Rightarrow \text{No tiene solución, luego no hay extremos.}$$

$$N'(t) = -\frac{5}{4} < 0 \Rightarrow \text{la función decrece todo el tiempo en } (6, 10].$$

$$N(6^+) = \lim_{t \rightarrow 6^+} -\frac{5}{4} \cdot 6 + \frac{50}{4} = \frac{20}{4} = 5 ; N(t) \text{ es continua en } t = 6$$

$$N(10) = -\frac{5}{4} \cdot 10 + \frac{50}{4} = 0 \Rightarrow t = 10 \text{ es un mínimo local en este intervalo } (6, 10].$$



El máximo absoluto de personas afectadas es de 3.700 personas a las 4 semanas.

El número de personas afectadas crece en el período de $[0, 4)$ semanas.

El número de personas afectadas disminuye en el período de $(4, 10]$ semanas.

b) Veamos cuándo tiene un punto de inflexión.

Trozo 1 $N(t) = 5 - t^3 + 6t^2 \quad [0, 6]$

$$N'(t) = -3t^2 + 12t$$

$$N''(t) = -6t + 12 = 0,$$

condición de punto de inflexión

$$12 = 6t \Rightarrow t = 2 \in [0, 6]$$

$$N''(t) = -6 \neq 0$$

luego es un punto de inflexión

Trozo 2 $N(t) = -\frac{5}{4}t + \frac{50}{4} \quad (6, 10]$

$$N'(t) = -\frac{5}{4}$$

$$N''(t) = 0,$$

No hay puntos de inflexión

Solución: Se produce un punto de inflexión en $t = 2$ semanas.

c) Menos de 250 afectados $\Rightarrow N(t) \leq 2,5$

En el primer trozo no ocurre porque el mínimo es 5 (500 afectados).

En el segundo trozo $N(t) = -\frac{5}{4}t + \frac{50}{4} \leq 2,5$ (multiplicamos $\cdot 4$)

$$-5t + 50 \leq 10 \Rightarrow -5t \leq -40 \Rightarrow t \geq \frac{40}{5} = 8$$

A partir de la 8ª semana, el número de afectados es como máximo de 250 personas.

5. Sea la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje X .

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, tangente en $x = -1$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ Ecuación punto-pendiente,

$$f(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) = -4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 4(-1) + 1 = 8$$

$$y + 4 = 8(x + 1)$$

Ecuación de la recta tangente

b) Área $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ y $g(x) = 0$ (eje X).

El área $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$;

Primero calculamos los puntos de corte para saber si hay que fragmentar la integral definida y conocer los límites de integración.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 2x^2 + x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 2x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ doble}$$

Hay 2 intersecciones luego tenemos que calcular 1 área.

$$A = \int_0^1 |x^3 - 2x^2 + x| dx = \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right| = \text{Regla de Barrow}$$

$$A = \left| \left(\frac{1^4}{4} - 2 \cdot \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} \right) - 0 \right| = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3 - 8 + 6}{12} = \frac{1}{12} u^2$$