

ÁLGEBRA Y ANÁLISIS

OPCIÓN A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ a & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) Calcula el valor del parámetro a para que la matriz A no tenga inversa. (0,5 pt.)
- b) Para $a = 1$, calcula la matriz inversa de A . (1,25 pt.)
- c) Para $a = 1$ despeja y calcula X en la ecuación matricial: $B^T - A \cdot X = B$ (1,25 pt.)

2. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 1$. (1 pt.)
- b) Con los valores de a y b que has calculado, halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 5$. (0,5 pt.)

3. Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

Calcula el dominio, los intervalos de monotonía, los extremos locales y sus coordenadas. (2 pt)

4. El precio en *euros* de las acciones de un grupo empresarial a lo largo de un año se estimó con la función siguiente:

$$P(t) = \begin{cases} 15 + 2 \cdot t - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{1}{3} \cdot t + 11 & \text{si } 3 < t \leq 12 \end{cases} \quad (t \text{ es el tiempo transcurrido en meses}).$$

- a) Determina los períodos en los que aumentó y en los que disminuyó el precio de las acciones y calcula su precio máximo y su precio mínimo a lo largo del año. (1,5 pt.)
- b) Representa la gráfica de la función $P(t)$. (0,5 pt.)
- c) Determina el período en el que el precio de las acciones fue inferior a 13,75 *euros*. (0,5 pt.)

5. Calcula la integral indefinida: $\int \left(x^2 - \frac{5}{x^2} + 2 \right) dx$ y la constante C para que la primitiva verifique la igualdad: $F(1) = 7$. (1 pt.)

OPCIÓN B

1. Una empresa fabrica lunas para coches. Cada luna delantera (tipo A) requiere $2,5 m^2$ de cristal, mientras que cada luna trasera (tipo B) requiere $2 m^2$. La producción de una luna delantera precisa $0,3 horas$ de máquina de corte y cada luna trasera $0,2 horas$. La empresa dispone de $1750 m^2$ de cristal por semana y $260 horas$ semanales de máquina de corte. Para adaptarse a la demanda habitual, la empresa fabrica siempre, como mínimo, el doble de lunas delanteras (A) que de lunas traseras (B) .
- a) Formula el sistema de inecuaciones. Representa la región factible y calcula sus vértices.
- b) Determina cuántas lunas de cada tipo debe fabricar semanalmente la empresa para que el número total de lunas producidas sea máximo. (Total: 3 pt.)

2. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 1$. (1 pt.)
- b) Con los valores de a y b que has calculado, halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 5$. (0,5 pt.)

3. Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

Calcula el dominio, los intervalos de monotonía, los extremos locales y sus coordenadas. (2 pt)

4. El precio en *euros* de las acciones de un grupo empresarial a lo largo de un año se estimó con la función siguiente:

$$P(t) = \begin{cases} 15 + 2 \cdot t - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{1}{3} \cdot t + 11 & \text{si } 3 < t \leq 12 \end{cases} \quad (t \text{ es el tiempo transcurrido en meses}).$$

- a) Determina los períodos en los que aumentó y en los que disminuyó el precio de las acciones y calcula su precio máximo y su precio mínimo a lo largo del año. (1,5 pt.)
- b) Representa la gráfica de la función $P(t)$. (0,5 pt.)
- c) Determina el período en el que el precio de las acciones fue inferior a $13,75 euros$. (0,5 pt.)

5. Calcula la integral indefinida: $\int \left(x^2 - \frac{5}{x^2} + 2 \right) dx$ y la constante C para que la primitiva verifique la igualdad: $F(1) = 7$. (1 pt.)

OPCIÓN A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ a & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula el valor del parámetro a para que la matriz A no tenga inversa. (0,5 pt.)

b) Para $a = 1$, calcula la matriz inversa de A . (1,25 pt.)

c) Para $a = 1$ despeja y calcula X en la ecuación matricial: $B^T - A \cdot X = B$ (1,25 pt.)

$$a) |A| = \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ a & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ a & 2 \end{vmatrix} = -(2a - a^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

Si $a = 0$ ó $a = 2$ la matriz A no tiene inversa.

b) Si $a = 1$, calcula A^{-1} ; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 - 1) = -1 \neq 0 \text{ luego tiene inversa.}$$

Para calcular la inversa: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\text{Adj}(A)]^t$, La matriz adjunta:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Comprobación: $A \cdot A^{-1} = I$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Q.E.D

$$\begin{array}{l|l} \beta^t - A \cdot X = \beta & A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} (\beta^t - \beta) \Rightarrow X = A^{-1} (\beta^t - \beta) \\ A \cdot X = \beta^t - \beta & \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \end{array}$$

$$\beta^t - \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} (\beta^t - \beta) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

OPCIÓN B

1. Una empresa fabrica lunas para coches. Cada luna delantera (tipo A) requiere $2,5 m^2$ de cristal, mientras que cada luna trasera (tipo B) requiere $2 m^2$. La producción de una luna delantera precisa $0,3$ horas de máquina de corte y cada luna trasera $0,2$ horas. La empresa dispone de $1750 m^2$ de cristal por semana y 260 horas semanales de máquina de corte. Para adaptarse a la demanda habitual, la empresa fabrica siempre, como mínimo, el doble de lunas delanteras (A) que de lunas traseras (B).

- a) Formula el sistema de inecuaciones. Representa la región factible y calcula sus vértices.
b) Determina cuántas lunas de cada tipo debe fabricar semanalmente la empresa para que el número total de lunas producidas sea máximo. (Total: 3 pt.)

Llamaremos :

$x \equiv$ lunas delanteras }
 $y \equiv$ lunas traseras }

Función objetivo :

$$f(x,y) = \underbrace{x}_1 + \underbrace{y}_2$$

Restricciones :

(No negatividad)

$$\left. \begin{array}{l} 2,5x + 2y \leq 1750 \\ 0,3x + 0,2y \leq 260 \end{array} \right\} x \geq 2y \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$.

$$2,5x + 2y = 1750$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = 875 \Rightarrow (0, 875) A$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = 700 \Rightarrow (700, 0) B$$

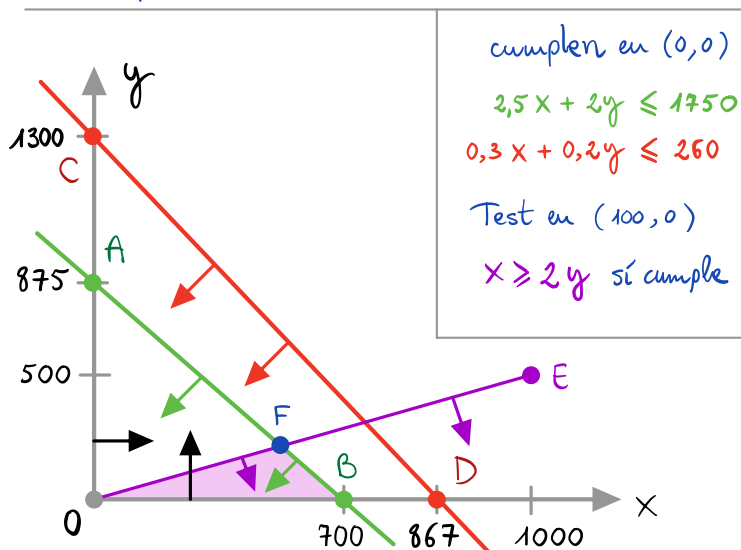
$$0,3x + 0,2y = 260$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = 1300 \Rightarrow (0, 1300) C$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x \approx 867 \Rightarrow (867, 0) D$$

$$x = 2y \Rightarrow (0, 0) \text{ y por ejemplo } (1000, 500) E$$

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:



Región factible de vértices OFB

Tipo de luna	Superficie(m^2)	Tiempo (h)
Delantera (x)	2,5	0,3
Trasera (y)	2	0,2
Máximo	1750	260

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2,5x + 2y = 1750 \\ x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow F$$

$$2,5 \cdot 2y + 2y = 1750 \Rightarrow 7y = 1750$$

$$y = \frac{1750}{7} = 250 \Rightarrow x = 500 \quad (500, 250) F$$

La **función objetivo** es: $f(x,y) = x + y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo : O, F, B,

$$O, f(0,0) = 0$$

$$F, f(500,250) = 500 + 250 = 750$$

$$B, f(700,0) = 700$$

Obtenemos la máxima cantidad en el vértice F, es decir, fabricando 500 lunas delanteras y 250 lunas traseras.

2. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 1$. (1 pt.)

b) Con los valores de a y b que has calculado, halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 5$. (0,5 pt.)

a) Para que sea derivable, es condición necesaria que sea **continua** en $x=1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 + 1 = a + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + bx + 3 = 4 + b = f(1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Para que } f(x) \text{ sea continua en } x=1, \\ \text{deberán coincidir los límites laterales.} \end{array}$$

$$a + 1 = 4 + b \Rightarrow a - b = 3 \quad [1] \quad \text{Condición de continuidad}$$

La condición de **derivabilidad** es: $f'(1^-) = f'(1^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si } x < 1 \\ 2x + b & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2ax = 2x + b \text{ en } x=1 \\ 2a = 2 + b \Rightarrow 2a - b = 2 \quad [2] \end{array}$$

Condición de derivabilidad

$$\text{Resolvemos el sistema: } \left. \begin{array}{l} a - b = 3 \\ 2a - b = 2 \end{array} \right\} \text{Restamos} \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = -4$$

$f(x)$ es derivable en $x=1$ si $a=-1$ y $b=-4$

b) Calcula la recta tangente en $x_0 = 5$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

 Ecuación punto-pendiente

$x = 5$ pertenece al **segundo intervalo** donde $f(x) = x^2 + bx + 3 = x^2 - 4x + 3$

$$\left. \begin{array}{l} f(x_0) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow f(5) = 25 - 20 + 3 = 8 \\ f'(x_0) = 2x - 4 \Rightarrow f'(5) = 10 - 4 = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y - 8 = 6 \cdot (x - 5) \end{array} \quad \text{recta tangente}$$

3. Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

Calcula el dominio, los intervalos de monotonía, los extremos locales y sus coordenadas. (2 pt)

$y = \frac{x^2}{x-1}$, $x-1=0 \Rightarrow x=1$, $D = \mathbb{R} - \{1\}$, luego $x=1$ es un punto crítico.

$y' = 0$ Condición de extremo.

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $y' = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

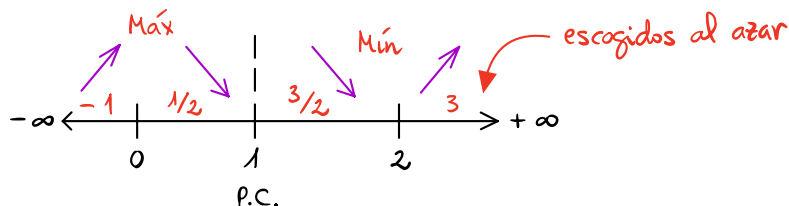
$y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$ Posibles extremos
↗ se cancela el denominador

Hay un punto crítico en $x=1$

Tenemos que estudiar lo que ocurre a su izquierda y a su derecha.

Método de la 1ª derivada

$y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ Evaluamos puntos al azar en cada intervalo



$y'(-1) = \frac{-(-)}{+} > 0 \nearrow$

$y'(1/2) = \frac{+(-)}{+} < 0 \searrow$

$y'(3/2) = \frac{+(-)}{+} < 0 \searrow$

$y'(3) = \frac{+(+)}{+} > 0 \nearrow$

Crece $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decrece $(0, 1) \cup (1, 2)$

Intervalos de Monotonía

En $x=0$ hay un máximo relativo

En $x=2$ hay un mínimo relativo

En $x=1$ hay un punto crítico

b) Coordenadas de los extremos: $y = \frac{x^2}{x-1}$

Si $x=0$, $y = \frac{0^2}{0-1} = 0$,

Si $x=2$, $y = \frac{2^2}{2-1} = 4$,

máximo relativo $(0, 0)$

mínimo relativo $(2, 4)$

4. El precio en euros de las acciones de un grupo empresarial a lo largo de un año se estimó con la función siguiente:

$$P(t) = \begin{cases} 15 + 2 \cdot t - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{1}{3} \cdot t + 11 & \text{si } 3 < t \leq 12 \end{cases} \quad (t \text{ es el tiempo transcurrido en meses}).$$

- a) Determina los períodos en los que aumentó y en los que disminuyó el precio de las acciones y calcula su precio máximo y su precio mínimo a lo largo del año. (1,5 pt.)
- b) Representa la gráfica de la función $P(t)$. (0,5 pt.)
- c) Determina el período en el que el precio de las acciones fue inferior a 13,75 euros. (0,5 pt.)

a) Monotonía y extremos absolutos de la función $P(t)$.

Trozo 1 $P(t) = 15 + 2t - t^2 \quad [0, 3]$

$$P'(t) = 2 - 2t = 0, \text{ condición de extremo} \Rightarrow t = \frac{2}{2} = 1 \in [0, 3]$$

$$P''(t) = -2 < 0, \quad P''(1) < 0 \Rightarrow t = 1 \text{ es un máximo local}$$

$$P(0) = 15 + 2 \cdot 0 - 0^2 = 15 \in$$

$$P(1) = 15 + 2 \cdot 1 - 1^2 = 16 \in \text{ es un máximo local en } [0, 3]$$

$$P(3) = 15 + 2 \cdot 3 - 3^2 = 12 \in \text{ (inferior)}$$

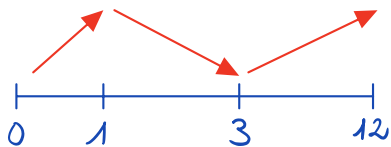
Trozo 2 $P(t) = \frac{1}{3}t + 11 \quad (3, 12]$

$$P'(t) = \frac{1}{3} \neq 0, \text{ condición de extremo} \Rightarrow \text{No tiene solución, luego no hay extremos.}$$

$$P'(t) = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow \text{la función crece todo el tiempo}$$

$$P(3^+) = \lim_{t \rightarrow 3^+} \frac{1}{3}t + 11 = 12 \in ; P(t) \text{ es continua en } t = 3 \text{ (mínimo absoluto)}$$

$$P(12) = \frac{1}{3} \cdot 12 + 11 = 15 \in \Rightarrow t = 12 \text{ es un máximo local en este intervalo } (3, 12]$$



El precio mínimo absoluto es de 12 € a los 3 meses

El precio máximo absoluto es de 16 € al primer mes.

El precio crece en los períodos $[0, 1) \cup (3, 12]$ meses.

El precio disminuye en el período $(1, 3)$ meses.

b) Gráfica de $P(t)$

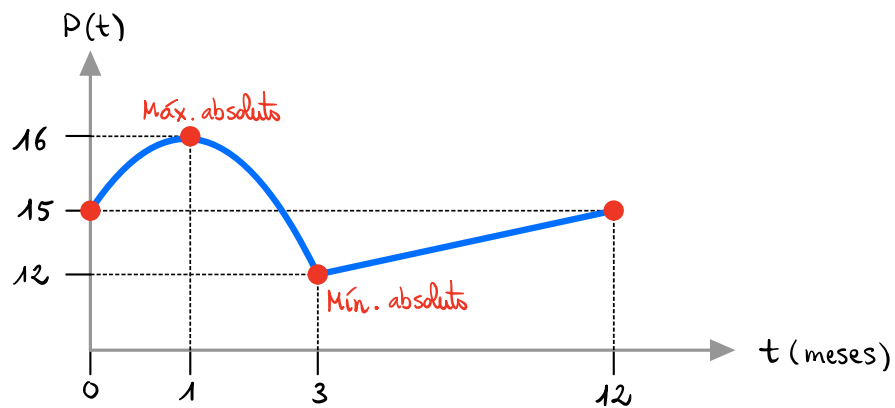
Puntos:

$(0, 15)$

$(1, 16)$

$(3, 12)$

$(12, 15)$



c) $P(t) < 13,75 \text{ €}$

Trozo 1 $15 + 2t - t^2 < 13,75$, $[0, 3]$ inecuación. Calculamos las raíces.

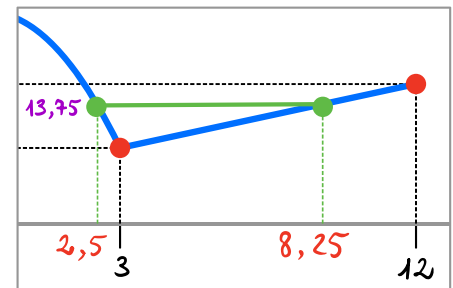
$$(15 - 13,75) + 2t - t^2 < 0 \Rightarrow t^2 - 2t - 1,25 > 0$$

$$t^2 - 2t - 1,25 = 0 \Rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1,25)}}{2} = \frac{2 \pm 3}{2} < \begin{matrix} 2,5 \\ -0,5 \end{matrix} \text{ No válida}$$

$P(t) < 13,75 \text{ €}$ entre $(2,5; 3]$

Trozo 2 $\frac{1}{3}t + 11 < 13,75$, $(3, 12]$ inecuación.

$$\frac{1}{3}t < 2,75 \Rightarrow t < 8,25 \text{ entre } (3; 8,25)$$



El precio de las acciones es inferior a 13,75 € en el intervalo $(2,5; 8,25)$ meses.

5. Calcula la integral indefinida: $\int \left(x^2 - \frac{5}{x^2} + 2 \right) dx$ y la constante C para que la primitiva verifique la

igualdad: $F(1) = 7$.

(1 pt.)

$$\int \left(x^2 - \frac{5}{x^2} + 2 \right) dx = \int \left(x^2 - 5x^{-2} + 2 \right) dx = \frac{x^3}{3} - 5 \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 2x + C = \frac{x^3}{3} - 5 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + 2x + C$$

La primitiva $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{x} + 2x + C$

Si $F(1) = 7 \Rightarrow \frac{1^3}{3} + \frac{5}{1} + 2 \cdot 1 + C = 7$

$C = 7 - \frac{1}{3} - 5 - 2 = -\frac{1}{3}$; $C = -\frac{1}{3}$ Constante de integración