

ÁLGEBRA Y ANÁLISIS

OPCIÓN A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & a & -a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -10 \end{pmatrix}$.

- a) Calcula el parámetro a para que la matriz A no tenga inversa. (0,5 pt.)
- b) Para $a = 1$, calcula $(A - I)^{-1}$. (1,5 pt.)
- c) Para $a = 1$ despeja y calcula X en la ecuación matricial: $A \cdot X = X + B^t$ (1 pt.)

2. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + b & \text{si } x < 1 \\ ax^2 - bx + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 1$. (1 pt.)
- b) Con los valores de a y b que has calculado, halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$. (0,5 pt.)

3. Sea la función $f(x) = x^4 - 2x^2$

Calcula los intervalos de curvatura, los puntos de inflexión y sus coordenadas. (2 pt)

4. El número de unidades vendidas (en miles) por una empresa del sector editorial durante su primer año de existencia, se estimó con la función :

$$V(t) = \begin{cases} 12 \cdot t - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 7 \\ t^2 - 18 \cdot t + 112 & \text{si } 7 < t \leq 12 \end{cases} \quad (t \text{ es el tiempo transcurrido en meses desde la creación de la empresa}).$$

- a) Calcula los períodos en los que aumentan o disminuyen las ventas. En los primeros siete meses, calcula las ventas máximas y el mes en el que se alcanzaron. Justifica si éstas fueron las máximas ventas (absolutas) alcanzadas por la empresa en ese año. (1,5 pt.)
- b) Representa la gráfica de $V(t)$. (0,5 pt.)
- c) A partir del séptimo mes, ¿en qué período de tiempo el número de ventas fue menor o igual a las 32.000 unidades? (0,5 pt.)

5. Calcula la integral indefinida: $\int \left(x^3 - \frac{1}{x^2} + \sqrt{x} \right) dx$ y la constante C para que la primitiva verifique

la igualdad: $F(1) = 2$. (1 pt.)

OPCIÓN B

1. Para seguir una dieta de adelgazamiento, se recomienda un preparado dietético, mezclando dos productos A y B , con las siguientes condiciones: La cantidad de producto B no debe superar a la cantidad de producto A . La cantidad de mezcla ingerida no debe superar los 200 *gramos*. La cantidad de producto A no debe superar los 150 *gramos*. Si, en cada *gramo*, el producto A contiene 0,4 *gramos* de vitaminas y el producto B contiene 0,3 *gramos* de vitaminas:

- a) Formula el sistema de inecuaciones. Representa la región factible y calcula sus vértices.
- b) ¿Cuántos gramos de cada producto hay que incluir en la mezcla para maximizar su contenido vitamínico? (Total: 3 pt.)

2. Sea la función definida a trozos:
$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + b & \text{si } x < 1 \\ ax^2 - bx + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 1$. (1 pt.)
- b) Con los valores de a y b que has calculado, halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$. (0,5 pt.)

3. Sea la función $f(x) = x^4 - 2x^2$

Calcula los intervalos de curvatura, los puntos de inflexión y sus coordenadas. (2 pt)

4. El número de unidades vendidas (en miles) por una empresa del sector editorial durante su primer año de existencia, se estimó con la función :

$$V(t) = \begin{cases} 12 \cdot t - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 7 \\ t^2 - 18 \cdot t + 112 & \text{si } 7 < t \leq 12 \end{cases} \quad (t \text{ es el tiempo transcurrido en meses desde la creación de la empresa}).$$

- a) Calcula los períodos en los que aumentan o disminuyen las ventas. En los primeros siete meses, calcula las ventas máximas y el mes en el que se alcanzaron. Justifica si éstas fueron las máximas ventas (absolutas) alcanzadas por la empresa en ese año. (1,5 pt.)
- b) Representa la gráfica de $V(t)$. (0,5 pt.)
- c) A partir del séptimo mes, ¿en qué período de tiempo el número de ventas fue menor o igual a las 32.000 unidades? (0,5 pt.)

5. Calcula la integral indefinida: $\int \left(x^3 - \frac{1}{x^2} + \sqrt{x} \right) dx$ y la constante C para que la primitiva verifique la igualdad: $F(1) = 2$. (1 pt.)

OPCIÓN A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & a & -a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -10 \end{pmatrix}$.

a) Calcula el parámetro a para que la matriz A no tenga inversa. (0,5 pt.)

b) Para $a = 1$, calcula $(A - I)^{-1}$. (1,5 pt.)

c) Para $a = 1$ despeja y calcula X en la ecuación matricial: $A \cdot X = X + B^t$ (1 pt.)

2. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + b & \text{si } x < 1 \\ ax^2 - bx + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 1$. (1 pt.)

b) Con los valores de a y b que has calculado, halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$. (0,5 pt.)

$$\begin{aligned} a) \quad |A| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & a & -a \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ a & -a \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= -a - 3a - (-3 - 2) = -4a + 5 = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Si $a = \frac{5}{4}$ la matriz A no tiene inversa.

b) Si $a = 1$, calcula $(A - I)^{-1}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

llamemos $Z = A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$|Z| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \quad \text{luego tiene inversa.}$$

Para calcular la inversa: $z^{-1} = \frac{1}{|z|} \cdot [\text{Adj}(z)]^t$, La matriz adjunta:

$$\text{Adj}(z) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Adj}(z)]^t = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = (A-I)^{-1}$$

$$\text{Comprobación: } z \cdot z^{-1} = I, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Q.E.D}$$

$$\begin{array}{l|l} A \cdot X = X + \beta^t & (A-I) \cdot X = \beta^t \\ A \cdot X - X = \beta^t & \underbrace{(A-I)^{-1} \cdot (A-I)}_I \cdot X = (A-I)^{-1} \cdot \beta^t \end{array} \Rightarrow X = (A-I)^{-1} \cdot \beta^t$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 8 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

OPCIÓN B

1. MODIFICAR seguir una dieta de adelgazamiento, se recomienda un preparado dietético, mezclando dos productos A y B, con las siguientes condiciones: La cantidad de producto B no debe superar a la cantidad de producto A. La cantidad de mezcla ingerida no debe superar los 200 gramos. La cantidad de producto A no debe superar los 150 gramos. Si, en cada gramo, el producto A contiene 0,4 g de vitaminas y el producto B contiene 0,3 g de vitaminas:

a) Formula el sistema de inecuaciones. Representa la región factible y calcula sus vértices.

b) ¿Cuántos gramos de cada producto hay que incluir en la mezcla para maximizar su contenido vitamínico? (Total: 3 pt.)

Llamaremos :
 $x \equiv$ preparados de A
 $y \equiv$ preparados de B

Producto A	Producto B
0,4 g	0,3 g

Función objetivo :

$$f(x, y) = \underbrace{0,4x}_A + \underbrace{0,3y}_B \quad (\text{máximo de vitaminas})$$

Restricciones

$$\left. \begin{array}{l} y \leq x \\ x \leq 150 \\ x + y \leq 200 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \quad (\text{No negatividad})$$

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:

Para representar la gráfica, busco los **puntos de corte** con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$x + y = 200$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=200 \Rightarrow (200, 0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=200 \Rightarrow (0, 200) \text{ B}$$

$$x = 150 \Rightarrow (150, 0) \text{ C}$$

$$y = x$$

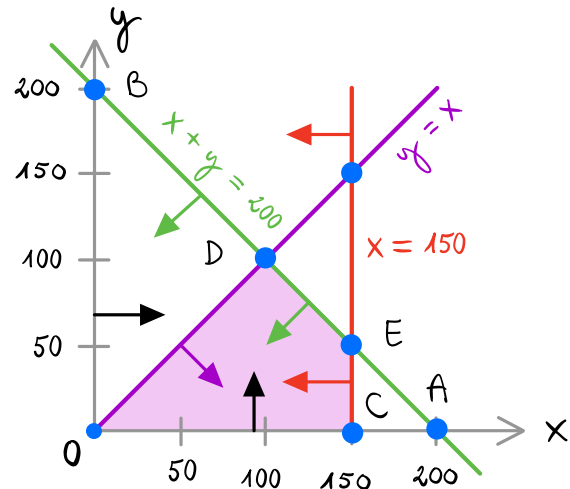
Evaluamos las restricciones con el punto (0,0)

$$x \leq 150 \Rightarrow 0 \leq 150 \quad \text{Cumple}$$

$$x + y \leq 200 \Rightarrow 0 \leq 200 \quad \text{Cumple}$$

$$y \leq x \quad \text{probamos con el punto } (1,0).$$

$$0 \leq 1 \quad \text{Cumple ; sombreamos del lado de este punto.}$$



Por último, busco la intersección entre las restricciones. Para ahorrar trabajo, me fijo sólo en las intersecciones que me hacen falta: D y E.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 200 \\ y = x \end{array} \right\} D \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 200 \\ x = 100 = y \end{array} \right| (100, 100) D$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 200 \\ x = 150 \end{array} \right\} E \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 200 - x \\ y = 50 \end{array} \right| (150, 50) E$$

La **función objetivo** es: $f(x, y) = 0,4x + 0,3y$

Sustituimos los vértices de la región

factible en la función objetivo : O, D, E, C

$$(100, 100) D \Rightarrow f(100, 100) = 40 + 30 = 70 \text{ g}$$

$$(150, 50) E \Rightarrow f(150, 50) = 60 + 15 = \boxed{75} \text{ g}$$

$$(150, 0) C \Rightarrow f(150, 0) = 60 \text{ g}$$

Conseguimos el máximo de vitaminas (75g) con 150 preparados tipo A y 50 preparados tipo B.

2. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + b & \text{si } x < 1 \\ ax^2 - bx + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 1$. (1 pt.)

b) Con los valores de a y b que has calculado, halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$. (0,5 pt.)

a) Para que sea derivable, es condición necesaria que sea continua en $x=1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 - ax + b = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 - bx + 1 = f(1), \text{ límites laterales iguales}$$

$$2 \cdot 1^2 - a \cdot 1 + b = a \cdot 1^2 - b \cdot 1 + 1 \Rightarrow 2 - a + b = a - b + 1$$

$$2a - 2b = 1 \quad [1] \quad \text{Condición de continuidad}$$

La condición de derivabilidad es: $f'(1^-) = f'(1^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - a & \text{si } x < 1 \\ 2ax - b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 4 \cdot 1 - a = 2 \cdot a \cdot 1 - b \Rightarrow 3a - b = 4 \quad [2] \quad \text{Condición de derivabilidad}$$

$$\text{Resolvemos el sistema: } \begin{cases} 2a - 2b = 1 \\ 3a - b = 4 \end{cases} \cdot (-2) \Rightarrow \begin{aligned} -4a &= -7 \Rightarrow a = 7/4 \\ b &= 3a - 4 = 3 \cdot \frac{7}{4} - 4 = 5/4 \end{aligned}$$

Es derivable en $x=1$ si $a = 7/4$ y $b = 5/4$

b) Calcular la recta tangente en $x=2$

$x=2$ pertenece al segundo intervalo donde $f(x) = ax^2 - bx + 1 = \frac{7}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + 1$

$$f(2) = \frac{7}{4} \cdot 4 - \frac{5}{4} \cdot 2 + 1 = 7 - \frac{5}{2} + 1 = \frac{11}{2}$$

$$f'(x) = \frac{7}{4} \cdot 2x - \frac{5}{4} \Rightarrow f'(2) = \frac{7}{4} \cdot 4 - \frac{5}{4} = \frac{23}{4}$$

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Rightarrow y - \frac{11}{2} = \frac{23}{4} \cdot (x - 2)$$

3. Sea la función $f(x) = x^4 - 2x^2$ $D = \mathbb{R}$; no hay puntos críticos.

Calcula los intervalos de curvatura, los puntos de inflexión y sus coordenadas.

(2 pt)

Curvatura. $y'' = 0$ Condición de punto de inflexión. $y = x^4 - 2x^2$

$$y' = 4x^3 - 4x$$

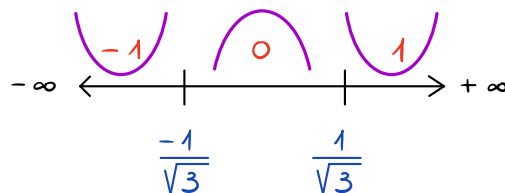
$$y'' = 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Posibles P.I. Evaluamos puntos al azar en cada intervalo

$$y''(-1) = 12 \cdot (-1)^2 - 4 > 0 \quad \text{convexa}$$

$$y''(0) = 12 \cdot (0)^2 - 4 < 0 \quad \text{cóncava}$$

$$y''(+1) = 12 \cdot (+1)^2 - 4 > 0 \quad \text{convexa}$$



$$\text{Convexa } \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$$

$$\text{Cóncava } \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Intervalos de curvatura

Efectivamente $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ son P.I.

porque cambia la curvatura.

Coordenadas de los puntos de inflexión.

$$y = x^4 - 2x^2 \Rightarrow y\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1-6}{9} = -\frac{5}{9}$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right) \quad \text{puntos de inflexión}$$

4. El número de unidades vendidas (en miles) por una empresa del sector editorial durante su primer año de existencia, se estimó con la función :

$$V(t) = \begin{cases} 12 \cdot t - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 7 \\ t^2 - 18 \cdot t + 112 & \text{si } 7 < t \leq 12 \end{cases} \quad (t \text{ es el tiempo transcurrido en meses desde la creación de la empresa}).$$

- a) Calcula los períodos en los que aumentan o disminuyen las ventas. En los primeros siete meses, calcula las ventas máximas y el mes en el que se alcanzaron. Justifica si éstas fueron las máximas ventas (absolutas) alcanzadas por la empresa en ese año. (1,5 pt.)
- b) Representa la gráfica de $V(t)$. (0,5 pt.)
- c) A partir del séptimo mes, ¿en qué período de tiempo el número de ventas fue menor o igual a las 32.000 unidades? (0,5 pt.)

a) Monotonía y extremos absolutos de la función $V(t)$.

Trozo 1 $V(t) = 12t - t^2 \quad [0, 7]$

$$V'(t) = 12 - 2t = 0, \text{ condición de extremo} \Rightarrow t = \frac{12}{2} = 6 \in [0, 7]$$

$$V''(t) = -2 < 0, \quad V''(6) < 0 \Rightarrow t = 6 \text{ es un máximo local}$$

$$V(0) = 0$$

$$V(6) = 12 \cdot 6 - 6^2 = 36 \text{ es un máximo local en } (6, 36)$$

$$V(7) = 12 \cdot 7 - 7^2 = 35 \text{ (inferior)}$$

Trozo 2 $V(t) = t^2 - 18t + 112 \quad (7, 12]$

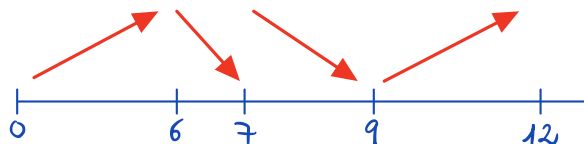
$$V'(t) = 2t - 18 = 0, \text{ condición de extremo} \Rightarrow t = \frac{18}{2} = 9 \in (7, 12]$$

$$V''(t) = 2 > 0, \quad V''(9) > 0 \Rightarrow t = 9 \text{ es un mínimo local}$$

$$V(7^+) = \lim_{t \rightarrow 7^+} t^2 - 18t + 112 = 7^2 - 18 \cdot 7 + 112 = 35; \quad V(t) \text{ es continua en } t = 7.$$

$$V(9) = 9^2 - 18 \cdot 9 + 112 = 31 \text{ (inferior) es un mínimo local en } (9, 31)$$

$$V(12) = 12^2 - 18 \cdot 12 + 112 = 40 \Rightarrow t = 12 \text{ es un máximo absoluto en } (12, 40)$$



Las ventas crecen en los períodos $[0, 6) \cup (9, 12]$ meses.

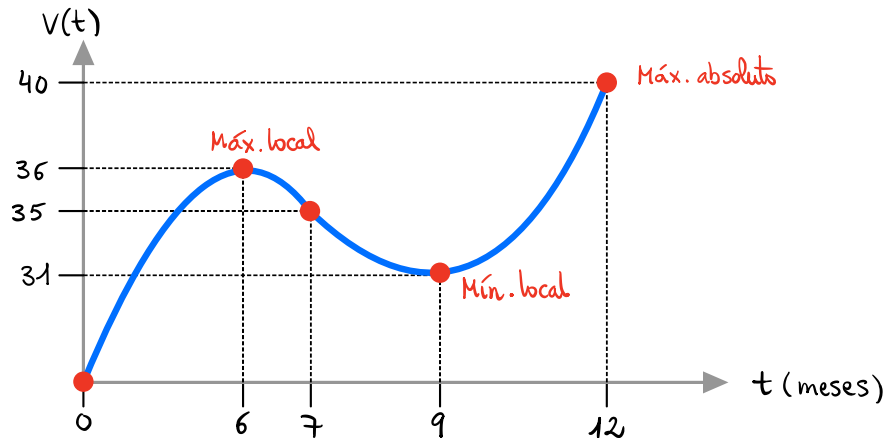
Las ventas disminuyen en el período $(6, 9)$ meses.

En los primeros 7 meses se alcanza una venta máxima de 36.000 ejemplares, pero el máximo absoluto de ventas se produce a los 12 meses con 40.000 ejemplares.

b) Gráfica de $V(t)$

Puntos:

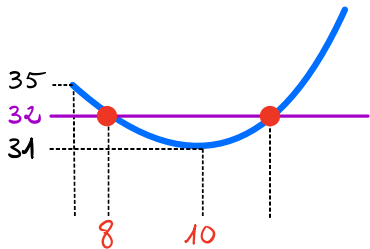
$(0,0)$
 $(6,36)$
 $(7,35)$
 $(9,31)$
 $(12,40)$



c) $V(t) \leq 32$ (miles de ejemplares)

$t^2 - 18t + 112 \leq 32 \Rightarrow t^2 - 18t + 80 \leq 0$, inecuación. Calculamos las raíces.

$$t^2 - 18t + 80 = 0 \Rightarrow t = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 1 \cdot 80}}{2} = \frac{18 \pm 2}{2} \begin{matrix} 10 \\ 8 \end{matrix}$$



La gráfica está por debajo en este intervalo. $[8, 10]$

Las ventas son inferiores o iguales a 32.000 ejemplares entre el 8º y 10º mes.

5. Calcula la integral indefinida: $\int \left(x^3 - \frac{1}{x^2} + \sqrt{x} \right) dx$ y la constante C para que la primitiva verifique

la igualdad: $F(1) = 2$.

(1 pt.)

$$\int \left(x^3 - \frac{1}{x^2} + \sqrt{x} \right) dx = \int \left(x^3 - x^{-2} + x^{1/2} \right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

La primitiva $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

Si $F(1) = 2 \Rightarrow \frac{1}{4} + 1 + \frac{2}{3} + C = 2$

$$C = 2 - \frac{1}{4} - 1 - \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{12-3-8}{12} = \frac{1}{12}$$

$$C = \frac{1}{12}$$

Constante de integración