

ÁLGEBRA Y ANÁLISIS

1. El jefe de seguridad de un museo estudia combinar 2 nuevos sistemas antirrobo: cámaras de vigilancia en las salas y alarmas en puntos estratégicos del edificio. Se quiere utilizar un mínimo de 6 cámaras para cubrir con ellas las salas más importantes, y un máximo de 15 cámaras, con las que quedarían todas las salas cubiertas. Igualmente, se necesitan al menos 6 alarmas para cubrir las más importantes entradas y salidas del edificio. Finalmente, se tiene un presupuesto máximo de 36.000 € y cada cámara cuesta 1.000 € mientras que cada alarma cuesta 500 €.

a) Plantea el problema. Calcula y representa gráficamente la región factible.

¿Podría instalar 7 cámaras y 59 alarmas? (2 pt.)

b) Si el objetivo es colocar el mayor número de dispositivos entre cámaras y alarmas ¿cuántos dispositivos ha de colocar de cada modalidad? En ese caso ¿cuál sería el coste total? (1 pt.)

2. Sea la función:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - 1}{2} + bx + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ ax^3 + bx^2 - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 2$. (1 pt.)

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$. (0,5 pt.)

3. Sea la función $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x+2}$

Calcula los intervalos de monotonía, los extremos relativos y sus coordenadas. (1,5 pt.)

4. El número $N(t)$ de ejemplares vendidos (en miles) de una revista es estimado por la función:

$$N(t) = \begin{cases} 3t \cdot (10 - t) & \text{si } 0 \leq t \leq 8 \\ \frac{624t}{t^2 + 144} + 24 & \text{si } t > 8 \end{cases} \quad (t \text{ es el tiempo transcurrido en semanas})$$

a) Determina los períodos en los que aumentan y en los que disminuyen las ventas de la revista. Calcula cuándo se alcanza el mayor número de ventas y a cuánto ascienden las ventas. (1,75 pt.)

b) ¿A qué valor tiende el número de ventas a largo plazo? Razona la respuesta. (0,25 pt.)

c) Esboza la gráfica de la función $N(t)$. (0,5 pt.)

5. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2$, el eje X y las rectas verticales $x = 2$ y $x = 4$. (1,5 pt.)

1. El jefe de seguridad de un museo estudia combinar 2 nuevos sistemas antirrobo: cámaras de vigilancia en las salas y alarmas en puntos estratégicos del edificio. Se quiere utilizar un mínimo de 6 cámaras para cubrir con ellas las salas más importantes, y un máximo de 15 cámaras, con las que quedarían todas las salas cubiertas. Igualmente, se necesitan al menos 6 alarmas para cubrir las más importantes entradas y salidas del edificio. Finalmente, se tiene un presupuesto máximo de 36.000 € y cada cámara cuesta 1.000 € mientras que cada alarma cuesta 500 €.

a) Plantea el problema. Calcula y representa gráficamente la región factible.

¿Podría instalar 7 cámaras y 59 alarmas?

(2 pt.)

b) Si el objetivo es colocar el mayor número de dispositivos entre cámaras y alarmas ¿cuántos dispositivos ha de colocar de cada modalidad? En ese caso ¿cuál sería el coste total? (1 pt.)

Llamaremos $x \equiv$ cámaras de vigilancia (1000 €), $y \equiv$ alarmas (500 €)

Restricciones

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 6 \text{ (mínimo de cámaras)} \\ x \leq 15 \text{ (máximo de cámaras)} \\ y \geq 6 \text{ (mínimo de alarmas)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1000 \cdot x + 500 \cdot y \leq 36.000 \text{ € (máximo presupuesto)} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right. \text{ (no negatividad)}$$

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$1000 \cdot x + 500 \cdot y = 36.000, \text{ simplifico } \div 100$$

$$10 \cdot x + 5 \cdot y = 360, \text{ simplifico } \div 5$$

$$2 \cdot x + y = 72$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=72 \Rightarrow (0, 72) \text{ A}$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=\frac{72}{2}=36 \Rightarrow (36, 0) \text{ B}$$

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

$$2 \cdot x + y = 72$$

$$x=6 \Rightarrow y=72-2 \cdot 6=60$$

$$\Rightarrow (6, 60) \text{ C}$$

$$x=15 \Rightarrow y=72-2 \cdot 15=42$$

$$\Rightarrow (15, 42) \text{ D}$$

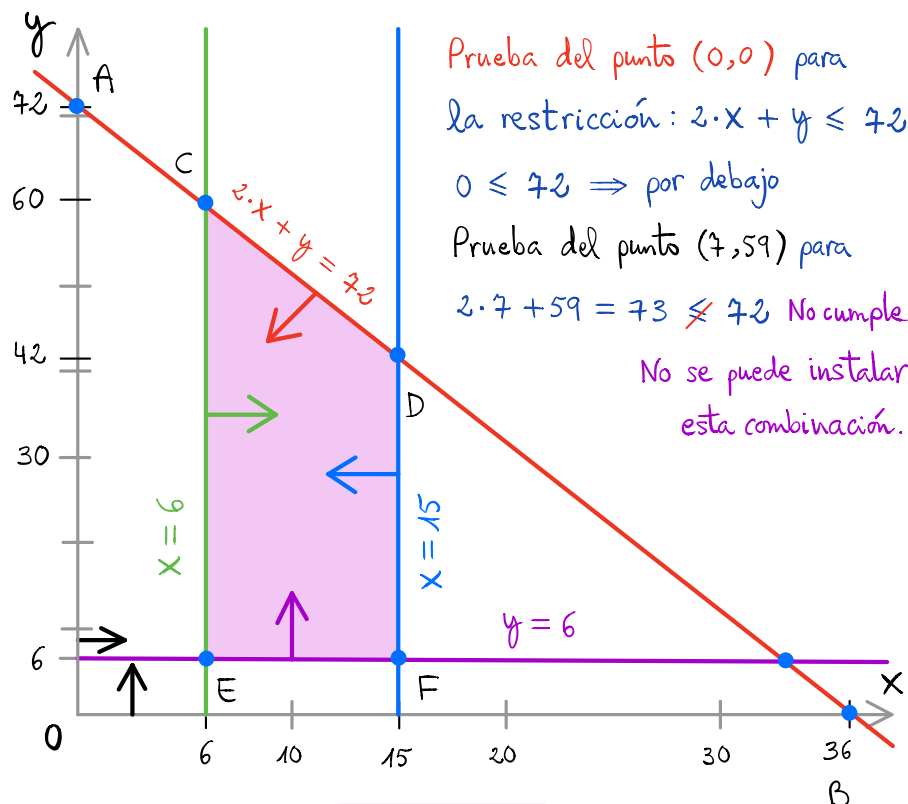
Los puntos $(6, 6) \text{ E}$ y $(15, 6) \text{ F}$

son inmediatos. La región factible es acotada entre los vértices: **C, D, E y F**.

La **función objetivo** es: $f(x, y) = x + y$ (máximo n° de cámaras y de alarmas)

$$C \Rightarrow f(6, 60) = 66, \quad E \Rightarrow f(6, 6) = 12$$

$$D \Rightarrow f(15, 42) = 57, \quad F \Rightarrow f(15, 6) = 21$$



Instalaré 6 cámaras y 60 alarmas con un coste de $1000 \cdot 6 + 500 \cdot 60 = 36.000 \text{ €}$.

2. Sea la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2-1}{2} + bx + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ ax^3 + bx^2 - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

$$f'(a^-) = f'(a^+)$$

a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 2$. (1 pt.)

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$. (0,5 pt.)

Una función es derivable en $x=a$ si es continua en $x=a$ y las derivadas laterales son iguales en $x=a$.

a) Los trozos son polinomios y no tienen puntos críticos. Estudiamos el punto crítico de frontera $x=2$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ax^2-1}{2} + bx + 1 &= \frac{a \cdot 2^2 - 1}{2} + b \cdot 2 + 1 = \frac{4a-1}{2} + 2b + 1 = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} ax^3 + bx^2 - 1 &= a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 - 1 = 8a + 4b - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Límites laterales iguales}$$

$$\frac{4a-1}{2} + 2b + 1 = 8a + 4b - 1 \Rightarrow \frac{4a-1}{2} = 8a + 2b - 2 \Rightarrow$$

$$4a - 1 = 16a + 4b - 4 \Rightarrow 12a + 4b = 3 \quad \text{Ecuación de continuidad (1)}$$

Tenemos una sola ecuación para 2 incógnitas, así que necesitamos otra condición, la de derivabilidad.

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2-1}{2} + bx + 1 & , \text{ si } x \leq 2 \\ ax^3 + bx^2 - 1 & , \text{ si } x > 2 \end{cases}$ Derivamos: $f'(x) = \begin{cases} \frac{2ax}{2} + b = ax + b & , \text{ si } x \leq 2 \\ 3ax^2 + 2bx & , \text{ si } x > 2 \end{cases}$

Estudiamos las derivadas laterales en el punto crítico de frontera $x=2$.

$$f'(a^-) = f'(a^+)$$

$$\left. \begin{aligned} f'(2^-) &= ax + b = a \cdot 2 + b = 2a + b \\ f'(2^+) &= 3ax^2 + 2bx = 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 = 12a + 4b \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(2^-) = f'(2^+)$$

$$\Rightarrow 2a + b = 12a + 4b \Rightarrow 10a + 3b = 0 \quad \text{Ecuación de derivabilidad (2)}$$

Resolvemos el sistema formado por las 2 ecuaciones que hemos obtenido.

$$\left. \begin{aligned} 12a + 4b &= 3 \\ 10a + 3b &= 0 \end{aligned} \right\} \cdot \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 36a + 12b &= 9 \\ 40a + 12b &= 0 \end{aligned} \right\} - \Rightarrow \left. \begin{aligned} 4a &= -9 \\ a &= -\frac{9}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} b &= -\frac{10a}{3} = -\frac{10 \cdot (-\frac{9}{4})}{3} \\ b &= \frac{30}{4} \Rightarrow b = \frac{15}{2} \end{aligned} \right\}$$

c) Recta tangente en $x=0$ $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ Ecuación de la tangente en el punto $P(a, f(a))$ $x=0$ está en el 1º trozo

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \\ f'(0) &= a \cdot 0 + b = \frac{15}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{15}{2}(x - 0) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{15}{2}x \quad \text{Tangente en } (0, \frac{1}{2})$$

3. Sea la función $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x+2}$

Calcula los intervalos de monotonía, los extremos relativos y sus coordenadas.

(1,5 pt)

Esta función racional tiene puntos críticos. $x+2=0 \Rightarrow x=-2$ P.C., $Df(x) = \mathbb{R} - \{-2\}$

Monotonía $y' = 0$ Condición de extremo. $y = \frac{(x+1)^2}{x+2}$

$$y' = \frac{2 \cdot (x+1) \cdot (x+2) - (x+1)^2}{(x+2)^2} = \frac{2 \cdot (x^2 + 2x + x + 2) - (x^2 + 2x + 1)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x + 2x + 4 - x^2 - 2x - 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2} = 0$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -3 \end{cases} \begin{matrix} \text{Posibles} \\ \text{extremos} \end{matrix} \quad \text{Comprobación: } (-3) \cdot (-1) = \frac{3}{1}$$

Método II: $x = -2 \pm \sqrt{4-3} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

Como no me piden la curvatura vamos a utilizar la 1ª derivada para caracterizar los extremos.

La monotonía se estudia en los intervalos entre los extremos y los puntos críticos

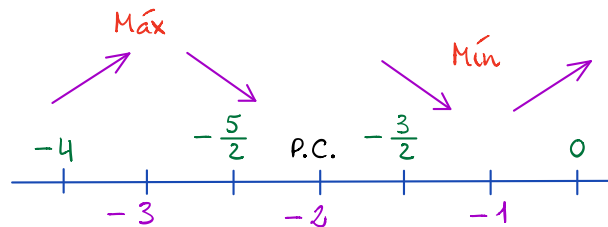
Escogemos puntos al azar dentro de los intervalos definidos por los posibles extremos y el punto crítico: $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$.

$$y'(-4) > 0 \Rightarrow y \text{ crece} \nearrow$$

$$y'(-\frac{5}{2}) < 0 \Rightarrow y \text{ decrece} \searrow$$

$$y'(-\frac{3}{2}) < 0 \Rightarrow y \text{ decrece} \searrow$$

$$y'(0) > 0 \Rightarrow y \text{ crece} \nearrow$$



$x = -3$ es un máximo local o relativo

$x = -2$ es un punto crítico

$x = -1$ es un mínimo local o relativo

$y = \frac{(x+1)^2}{x+2}$ es la función original. Coordenadas extremos:

$$y(-3) = \frac{(-3+1)^2}{-3+2} = -4, (-3, -4)$$

$$y(-1) = \frac{(-1+1)^2}{-1+2} = 0, (-1, 0)$$

Crece $(-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$

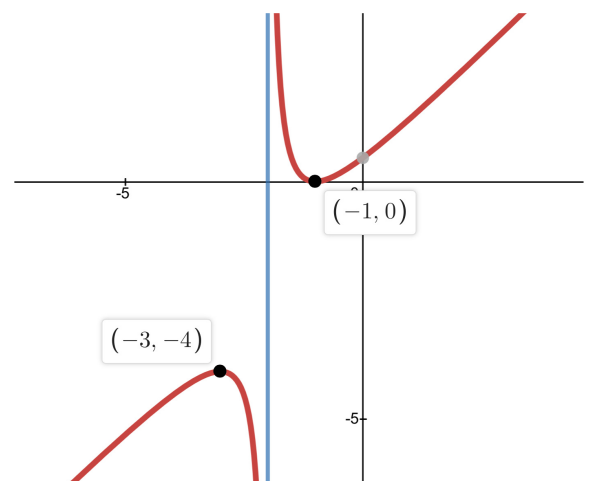
Decrece $(-3, -2) \cup (-2, -1)$

Máximo local $(-3, -4)$

Mínimo local $(-1, 0)$

Monotonía

Extremos



4. El número $N(t)$ de ejemplares vendidos (en miles) de una revista es estimado por la función:

$$N(t) = \begin{cases} 3t \cdot (10 - t) & \text{si } 0 \leq t \leq 8 \\ \frac{624t}{t^2 + 144} + 24 & \text{si } t > 8 \end{cases} \quad (t \text{ es el tiempo transcurrido en semanas})$$

- Determina los períodos en los que aumentan y en los que disminuyen las ventas de la revista. Calcula cuándo se alcanza el mayor número de ventas y a cuánto ascienden las ventas. (1,75 pt.)
- ¿A qué valor tiende el número de ventas a largo plazo? Razona la respuesta. (0,25 pt.)
- Esboza la gráfica de la función $N(t)$. (0,5 pt.)

a) Estudiemos la monotonía y el máximo absoluto de las ventas. $N'(t) = 0$, Condición de extremo

Trozo 1 $N(t) = 30t - 3t^2 \Rightarrow N'(t) = 30 - 6t = 0 \Rightarrow t = \frac{30}{6} = 5$ semanas. Posible extremo.

$N''(t) = -6 \Rightarrow N''(5) = -6 < 0 \Rightarrow t = 5$ semanas es un máximo local. Veamos si es absoluto:

$N(0) = 0$, $N(5) = 30 \cdot 5 - 3 \cdot 5^2 = 75 \Rightarrow 75.000$ revistas vendidas.

$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 8^-} 30 \cdot 8 - 3 \cdot 8^2 = 48 \\ \lim_{t \rightarrow 8^+} \frac{624 \cdot 8}{8^2 + 144} + 24 = 48 \end{array} \right\} \Rightarrow$ La función es continua en $t=8$, pero el valor, 48, es menor que en el máximo local, 75.

Trozo 2 $N(t) = \frac{624 \cdot t}{t^2 + 144} + 24 \Rightarrow N'(t) = \frac{624 \cdot (t^2 + 144) - 624 \cdot t \cdot 2t}{(t^2 + 144)^2} = \frac{624 \cdot 144 - 624 \cdot t^2}{(t^2 + 144)^2} = 0$

$\Rightarrow 624 \cdot 144 - 624 \cdot t^2 = 0 \Rightarrow 624 \cdot 144 = 624 \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{144} = 12$ Posible extremo. (sólo el valor +)

$N(12) = \frac{624 \cdot 12}{12^2 + 144} + 24 = 50 \Rightarrow 50.000$ revistas $\Rightarrow t = 5$ semanas es el máximo absoluto de ventas.

$\begin{array}{c} 10 \quad \nearrow \quad \searrow \quad 14 \\ | \quad | \quad | \\ 12 \end{array}$ Evaluó 2 puntos al azar con N' $\left\{ \begin{array}{l} N'(10) > 0 \Rightarrow \nearrow \\ N'(14) < 0 \Rightarrow \searrow \end{array} \right.$ $t = 12$ es un máximo local, pero por debajo de $t = 5$.

Las ventas crecen en $(0, 5) \cup (8, 12)$ y decrecen en $(5, 8) \cup (12, \infty)$

Máximo absoluto de ventas en $t = 5$ semanas, 75.000 revistas vendidas.

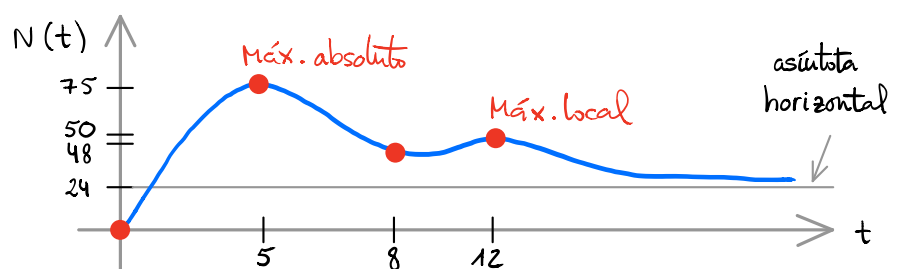
b) A largo plazo $t \rightarrow +\infty$ (2º trozo).

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{624 \cdot t}{t^2 + 144} + 24 = 24$$

24.000 revistas vendidas a largo plazo.

$N(t) = 24$ es una asíntota horizontal

c) Esbozo de la gráfica.



5. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2$, el eje X y las rectas verticales $x = 2$ y $x = 4$. (1,5 pt.)

El área $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$; En este caso $g(x) = 0$ (el eje X)

Primero calculamos los puntos de corte para saber si hay que fragmentar la integral definida y conocer los límites de integración.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 \cdot (x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y } x = 3$$

El problema nos pide el área entre 2 y 4.  $A_T = A_1 + A_2$

El 0 queda fuera, así que lo ignoramos, pero el 3 me obliga a calcular 2 áreas.

$$A_1 = \int_2^3 |2x^3 - 6x^2| dx = \left[2 \cdot \frac{x^4}{4} - 6 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_2^3 = \left[\frac{x^4}{2} - 2x^3 \right]_2^3 = \left(\frac{3^4}{2} - 2 \cdot 3^3 \right) - \left(\frac{2^4}{2} - 2 \cdot 2^3 \right)$$

primitiva $\nearrow$ Regla de Barrow

$$A_1 = \left| -\frac{27}{2} - (-8) \right| = \left| -\frac{11}{2} \right| = \frac{11}{2} u^2$$

$$A_2 = \int_3^4 |2x^3 - 6x^2| dx = \left[\frac{x^4}{2} - 2x^3 \right]_3^4 = \left(\frac{4^4}{2} - 2 \cdot 4^3 \right) - \left(\frac{3^4}{2} - 2 \cdot 3^3 \right)$$

$$A_2 = \left| 0 - \left(-\frac{27}{2}\right) \right| = \left| \frac{27}{2} \right| = \frac{27}{2} u^2$$

$$\text{El área total } A_T = A_1 + A_2 = \frac{11}{2} u^2 + \frac{27}{2} u^2 = \frac{38}{2} u^2 = 19 u^2$$

