

ÁLGEBRA Y ANÁLISIS

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ -3/2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula el rango de la matriz en función del valor del parámetro a . (0,5 pt.)

b) En el caso $a = 1$ calcula $(A - B)^{-1}$. (1,5 pt.)

c) En el caso $a = 1$ despeja y calcula X en la ecuación matricial $X \cdot A + A^t = X \cdot B$ (1 pt.)

2. Sea la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - 1}{2} + bx + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ ax^3 + bx^2 - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 2$. (1 pt.)

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$. (0,5 pt.)

3. Sea la función $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$

Calcula los intervalos de curvatura, los puntos de inflexión y sus coordenadas. (1,5 pt.)

4. El número $N(t)$ de ejemplares vendidos (en miles) de una revista es estimado por la función:

$$N(t) = \begin{cases} 3t \cdot (10 - t) & \text{si } 0 \leq t \leq 8 \\ \frac{624t}{t^2 + 144} + 24 & \text{si } t > 8 \end{cases} \quad (t \text{ es el tiempo transcurrido en semanas})$$

a) Determina los períodos en los que aumentan y en los que disminuyen las ventas de la revista. Calcula cuándo se alcanza el mayor número de ventas y a cuánto ascienden las ventas. (1,75 pt.)

b) ¿A qué valor tiende el número de ventas a largo plazo? Razona la respuesta. (0,25 pt.)

c) Esboza la gráfica de la función $N(t)$. (0,5 pt.)

5. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2$, el eje X y las rectas verticales $x = 2$ y $x = 4$. (1,5 pt.)

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ -3/2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula el rango de la matriz en función del valor del parámetro a . (0,5 pt.)

b) En el caso $a = 1$ calcula $(A - B)^{-1}$. (1,5 pt.)

c) En el caso $a = 1$ despeja y calcula X en la ecuación matricial $X \cdot A + A^t = X \cdot B$ (1 pt.)

a) Para que la matriz A no tenga rango 3, $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = +a \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 = 0 \Rightarrow \text{Si } a \neq 0 \text{ rango } A = 3$$

Si $a = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; sólo hay una fila linealmente independiente luego $\text{rango } A = 1$

b) Si $a = 1$, calcula $(A - B)^{-1}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

llamemos $Z = A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ -3/2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$|Z| = \begin{vmatrix} -1/2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\left(-\left(\frac{1}{2}\right)\right) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2} \neq 0 \text{ luego tiene inversa.}$$

Para calcular la inversa: $Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} \cdot [\text{Adj}(Z)]^t$, La matriz adjunta:

$$\text{Adj}(Z) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1/2 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1/2 & -1 \\ -1/2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos: $\frac{1}{|Z|} = \frac{1}{-1/2} = -2$

$$[\text{Adj}(\tilde{z})]^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{z}^{-1} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (A-B)^{-1}$$

$$\text{Comprobación: } \tilde{z} \cdot \tilde{z}^{-1} = I, \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Q.E.D.}$$

c) En el caso $a = 1$ despeja y calcula X en la ecuación matricial $X \cdot A + A^t = X \cdot B$

$$\begin{array}{l} X \cdot A - X \cdot B = -A^t \\ X \cdot (A - B) = -A^t \end{array} \quad \left| \quad \underbrace{X \cdot (A - B) \cdot (A - B)^{-1}}_I = -A^t \cdot (A - B)^{-1} \Rightarrow X = -A^t \cdot (A - B)^{-1} \right.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Comprobación: } X \cdot (A - B) = -A^t$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_X \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A-B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A^t} \quad \text{Q.E.D.}$$

2. Sea la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2-1}{2} + bx + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ ax^3 + bx^2 - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

$$f'(a^-) = f'(a^+)$$

a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 2$. (1 pt.)

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$. (0,5 pt.)

Una función es derivable en $x=a$ si es continua en $x=a$ y las derivadas laterales son iguales en $x=a$.

a) Los trozos son polinomios y no tienen puntos críticos. Estudiamos el punto crítico de frontera $x=2$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ax^2-1}{2} + bx + 1 &= \frac{a \cdot 2^2 - 1}{2} + b \cdot 2 + 1 = \frac{4a-1}{2} + 2b + 1 = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} ax^3 + bx^2 - 1 &= a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 - 1 = 8a + 4b - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Límites laterales iguales}$$

$$\frac{4a-1}{2} + 2b + 1 = 8a + 4b - 1 \Rightarrow \frac{4a-1}{2} = 8a + 2b - 2 \Rightarrow$$

$$4a - 1 = 16a + 4b - 4 \Rightarrow 12a + 4b = 3 \quad \text{Ecuación de continuidad (1)}$$

Tenemos una sola ecuación para 2 incógnitas, así que necesitamos otra condición, la de derivabilidad.

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2-1}{2} + bx + 1 & , \text{ si } x \leq 2 \\ ax^3 + bx^2 - 1 & , \text{ si } x > 2 \end{cases} \quad \text{Derivamos: } f'(x) = \begin{cases} \frac{2ax}{2} + b = ax + b & , \text{ si } x \leq 2 \\ 3ax^2 + 2bx & , \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

Estudiamos las derivadas laterales en el punto crítico de frontera $x=2$.

$$f'(a^-) = f'(a^+)$$

$$\left. \begin{aligned} f'(2^-) &= ax + b = a \cdot 2 + b = 2a + b \\ f'(2^+) &= 3ax^2 + 2bx = 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 = 12a + 4b \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(2^-) = f'(2^+)$$

$$\Rightarrow 2a + b = 12a + 4b \Rightarrow 10a + 3b = 0 \quad \text{Ecuación de derivabilidad (2)}$$

Resolvemos el sistema formado por las 2 ecuaciones que hemos obtenido.

$$\left. \begin{aligned} 12a + 4b &= 3 \\ 10a + 3b &= 0 \end{aligned} \right\} \cdot \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 36a + 12b &= 9 \\ 40a + 12b &= 0 \end{aligned} \right\} - \Rightarrow \left. \begin{aligned} 4a &= -9 \\ a &= -\frac{9}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} b &= -\frac{10a}{3} = -\frac{10 \cdot (-\frac{9}{4})}{3} \\ b &= \frac{30}{4} \Rightarrow b = \frac{15}{2} \end{aligned} \right\}$$

c) Recta tangente en $x=0$ $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ Ecuación de la tangente en el punto $P(a, f(a))$ $x=0$ está en el 1º trozo

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \\ f'(0) &= a \cdot 0 + b = \frac{15}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{15}{2}(x - 0) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{15}{2}x \quad \text{Tangente en } (0, \frac{1}{2})$$

3. Sea la función $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$

Calcula los intervalos de curvatura, los puntos de inflexión y sus coordenadas.

(1,5 pt)

Es un polinomio, luego no tiene puntos críticos.

Curvatura $y'' = 0$ Condición de Punto de inflexión.

La curvatura se estudia en los intervalos entre los P.I. y los puntos críticos

$$y' = 4x^3 - 16x \Rightarrow y'' = 12x^2 - 16 = 0$$

$$12x^2 = 16 \div 4 \Rightarrow 3x^2 = 4 \Rightarrow \text{Obtenemos 2 soluciones, } x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ Posibles P.I.}$$

La 3ª derivada $y''' = 24x \neq 0$ para todos los valores, luego son P.I. confirmados.

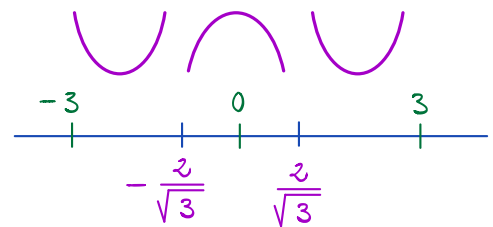
Para estudiar la curvatura, elegimos puntos al azar en cada intervalo hallado entre P.I. y P.C. (críticos),

y los sustituimos en la 2ª derivada $y'' = 12x^2 - 16$

$$y''(3) = 12 \cdot 3^2 - 16 > 0 \Rightarrow \text{Convexa}$$

$$y''(0) = 12 \cdot 0^2 - 16 < 0 \Rightarrow \text{Cóncava}$$

$$y''(-3) = 12 \cdot (-3)^2 - 16 > 0 \Rightarrow \text{Convexa}$$



Hemos calculado que, efectivamente, cambia la curvatura a ambos lados de los P.I.

Cóncava en $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$

Convexa en $(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{2}{\sqrt{3}}, \infty)$

Método II: $y''' = 24x$

$$\left. \begin{array}{l} y'''(-\frac{2}{\sqrt{3}}) \neq 0 \\ y'''(+\frac{2}{\sqrt{3}}) \neq 0 \end{array} \right\} \text{luego son P.I.}$$

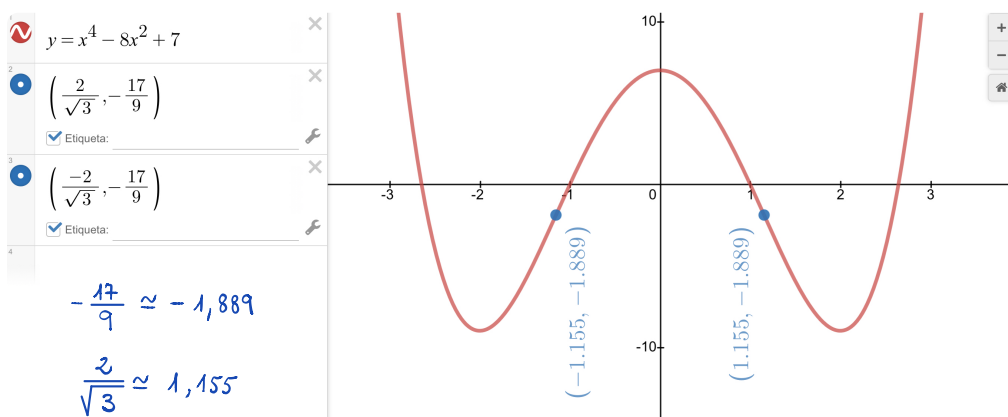
$y = x^4 - 8x^2 + 7$ es la función original. Coordenadas P.I.

$$y(-\frac{2}{\sqrt{3}}) = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4 - \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 7 = \frac{16}{9} - \frac{32}{3} + 7 = -\frac{17}{9} \Rightarrow$$

$$y(+\frac{2}{\sqrt{3}}) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 7 = \frac{16}{9} - \frac{32}{3} + 7 = -\frac{17}{9} \Rightarrow$$

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{17}{9} \right) \\ \left(+\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{17}{9} \right)$$

Puntos de inflexión.



4. El número $N(t)$ de ejemplares vendidos (en miles) de una revista es estimado por la función:

$$N(t) = \begin{cases} 3t \cdot (10 - t) & \text{si } 0 \leq t \leq 8 \\ \frac{624t}{t^2 + 144} + 24 & \text{si } t > 8 \end{cases} \quad (t \text{ es el tiempo transcurrido en semanas})$$

- Determina los períodos en los que aumentan y en los que disminuyen las ventas de la revista. Calcula cuándo se alcanza el mayor número de ventas y a cuánto ascienden las ventas. (1,75 pt.)
- ¿A qué valor tiende el número de ventas a largo plazo? Razona la respuesta. (0,25 pt.)
- Esboza la gráfica de la función $N(t)$. (0,5 pt.)

a) Estudiemos la monotonía y el máximo absoluto de las ventas. $N'(t) = 0$, Condición de extremo

Trozo 1 $N(t) = 30t - 3t^2 \Rightarrow N'(t) = 30 - 6t = 0 \Rightarrow t = \frac{30}{6} = 5$ semanas. Posible extremo.

$N''(t) = -6 \Rightarrow N''(5) = -6 < 0 \Rightarrow t = 5$ semanas es un máximo local. Veamos si es absoluto:

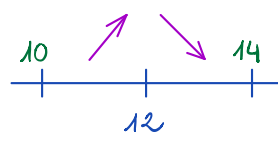
$N(0) = 0$, $N(5) = 30 \cdot 5 - 3 \cdot 5^2 = 75 \Rightarrow 75.000$ revistas vendidas.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 8^-} 30 \cdot 8 - 3 \cdot 8^2 &= 48 \\ \lim_{t \rightarrow 8^+} \frac{624 \cdot 8}{8^2 + 144} + 24 &= 48 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{La función es continua en } t=8, \text{ pero el valor, } 48, \text{ es menor que en el máximo local, } 75.$$

Trozo 2 $N(t) = \frac{624 \cdot t}{t^2 + 144} + 24 \Rightarrow N'(t) = \frac{624 \cdot (t^2 + 144) - 624 \cdot t \cdot 2t}{(t^2 + 144)^2} = \frac{624 \cdot 144 - 624 \cdot t^2}{(t^2 + 144)^2} = 0$

$\Rightarrow 624 \cdot 144 - 624 \cdot t^2 = 0 \Rightarrow 624 \cdot 144 = 624 \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{144} = 12$ Posible extremo. (sólo el valor +)

$N(12) = \frac{624 \cdot 12}{12^2 + 144} + 24 = 50 \Rightarrow 50.000$ revistas $\Rightarrow t = 5$ semanas es el máximo absoluto de ventas.


 Evaluó 2 puntos al azar con N'

$$\begin{cases} N'(10) > 0 \Rightarrow \nearrow \\ N'(14) < 0 \Rightarrow \searrow \end{cases} \quad t = 12 \text{ es un máximo local, pero por debajo de } t = 5.$$

Las ventas crecen en $(0, 5) \cup (8, 12)$ y decrecen en $(5, 8) \cup (12, \infty)$

Máximo absoluto de ventas en $t = 5$ semanas, 75.000 revistas vendidas.

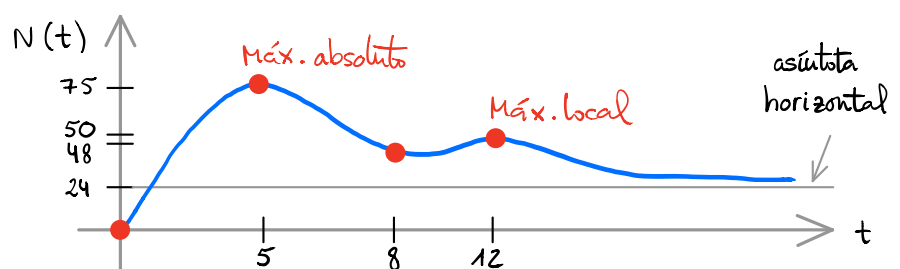
b) A largo plazo $t \rightarrow +\infty$ (2º trozo).

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{624 \cdot t}{t^2 + 144} + 24 = 24$$

24.000 revistas vendidas a largo plazo.

$N(t) = 24$ es una asíntota horizontal

c) Esbozo de la gráfica.

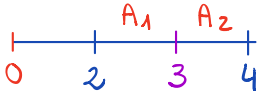


5. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2$, el eje X y las rectas verticales $x = 2$ y $x = 4$. (1,5 pt.)

El área $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$; En este caso $g(x) = 0$ (el eje X)

Primero calculamos los puntos de corte para saber si hay que fragmentar la integral definida y conocer los límites de integración.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 \cdot (x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y } x = 3$$

El problema nos pide el área entre 2 y 4.  $A_T = A_1 + A_2$

El 0 queda fuera, así que lo ignoramos, pero el 3 me obliga a calcular 2 áreas.

$$A_1 = \int_2^3 |2x^3 - 6x^2| dx = \left[2 \cdot \frac{x^4}{4} - 6 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_2^3 = \left[\frac{x^4}{2} - 2x^3 \right]_2^3 = \left(\frac{3^4}{2} - 2 \cdot 3^3 \right) - \left(\frac{2^4}{2} - 2 \cdot 2^3 \right)$$

primitiva $\nearrow$ Regla de Barrow

$$A_1 = \left| -\frac{27}{2} - (-8) \right| = \left| -\frac{11}{2} \right| = \frac{11}{2} u^2$$

$$A_2 = \int_3^4 |2x^3 - 6x^2| dx = \left[\frac{x^4}{2} - 2x^3 \right]_3^4 = \left(\frac{4^4}{2} - 2 \cdot 4^3 \right) - \left(\frac{3^4}{2} - 2 \cdot 3^3 \right)$$

$$A_2 = \left| 0 - \left(-\frac{27}{2} \right) \right| = \left| \frac{27}{2} \right| = \frac{27}{2} u^2$$

$$\text{El área total } A_T = A_1 + A_2 = \frac{11}{2} u^2 + \frac{27}{2} u^2 = \frac{38}{2} u^2 = 19 u^2$$

