

ÁLGEBRA Y ANÁLISIS

1. Una tienda de informática vende, entre otros productos, ordenadores portátiles e impresoras, pudiendo almacenar un máximo de 150 unidades en total. Para atender la demanda de sus clientes debe tener en stock por lo menos 20 portátiles y por lo menos 50 impresoras. Además, para lograr un precio competitivo, el proveedor le exige que el número de impresoras que compre tiene que ser igual o superior en 20 unidades al número de portátiles. Si en la venta de cada portátil se obtiene un beneficio de 80 € y en la de cada impresora de 20 €, ¿cuántas unidades de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? (3 pt.)

Venderemos 65 portátiles y 85 impresoras con un beneficio máximo de 6900€

2. Sea la función:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$a = -1, b = 1$

No es derivable en $x=0$

No es derivable en $x=1$

a) Calcula los valores de a y b para que sea continua en todo $\mathbb{R}$. (0,75 pt.)

b) Para esos valores de a y b , estudia si $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y en $x = 3$. (0,75 pt.)

c) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -2$. $y - \frac{1}{5} = \frac{4}{25}(x+2)$ (0,5 pt.)

3. Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{x-4}$:

Crece $(-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$

Máx $(0, 0)$

Decrece $(0, 4) \cup (4, 8)$

Mín $(8, 16)$

a) Calcula los intervalos de monotonía. (1 pt.)

b) Clasifica los extremos relativos y calcula sus coordenadas. (1 pt.)

4. El número de nacimientos anuales (en cientos) que se producen en una ciudad a partir del año 2000 viene dado por la expresión $N(t)$ siendo t el tiempo transcurrido en años:

$$N(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 - 3t + 15 & \text{si } 0 \leq t < 8 \\ 10 - \frac{6}{t-6} & \text{si } t \geq 8 \end{cases}$$

Decrece en $(0, 6) \rightarrow (2000, 2006)$

$(t = 0)$ se corresponde con el año 2000

Mínimo absoluto en $t=6 \Rightarrow$ año 2006

$N(6) = 6$, 600 nacimientos

a) ¿Entre qué años se produjo un descenso de la natalidad? Determina en qué año se produjo un menor número de nacimientos y cuál fue ese número. 1000 nacimientos (1,25 pt.)

b) ¿Cuál es la tendencia en el número de nacimientos en el futuro? Razona la respuesta. (0,25 pt.)

c) Esboza la gráfica de la función $N(t)$. (0,5 pt.)

5. Calcula la integral: $\int \left(\sqrt{x} + (2x)^3 + \frac{1}{x^2} \right) dx$ y C para que la primitiva $F(1) = 2$. (1 pt.)

$F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2x^4 - \frac{1}{x} + C$

$F(1) = 2 \Rightarrow C = \frac{1}{3}$

1. Una tienda de informática vende, entre otros productos, ordenadores portátiles e impresoras, pudiendo almacenar un máximo de 150 unidades en total. Para atender la demanda de sus clientes debe tener en stock por lo menos 20 portátiles y por lo menos 50 impresoras. Además, para lograr un precio competitivo, el proveedor le exige que el número de impresoras que compre tiene que ser igual o superior en 20 unidades al número de portátiles. Si en la venta de cada portátil se obtiene un beneficio de 80 € y en la de cada impresora de 20 €, ¿cuántas unidades de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? (3 pt.)

Llamaremos :

Portátiles (x unidades), Impresoras (y unidades)

150 Máx.	Mín.	Benef.
Portátiles(x)	20	80 €
Impresoras(y)	50	20 €

Restricciones : $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 150 \\ y \geq x + 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \geq 20 \\ y \geq 50 \end{array}$ La función objetivo es el beneficio :
 $f(x,y) = 80x + 20y$

Para encontrar la región factible, graficamos las rectas que delimitan las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 150 \Rightarrow y = 150 - x \\ y = x + 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 20 \\ y = 50 \end{array}$$

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$y = 150 - x$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x=150 \Rightarrow (150, 0) \text{ A}$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y=150 \Rightarrow (0, 150) \text{ B}$$

$$y = x + 20$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow x = -20 \Rightarrow (-20, 0) \text{ C}$$

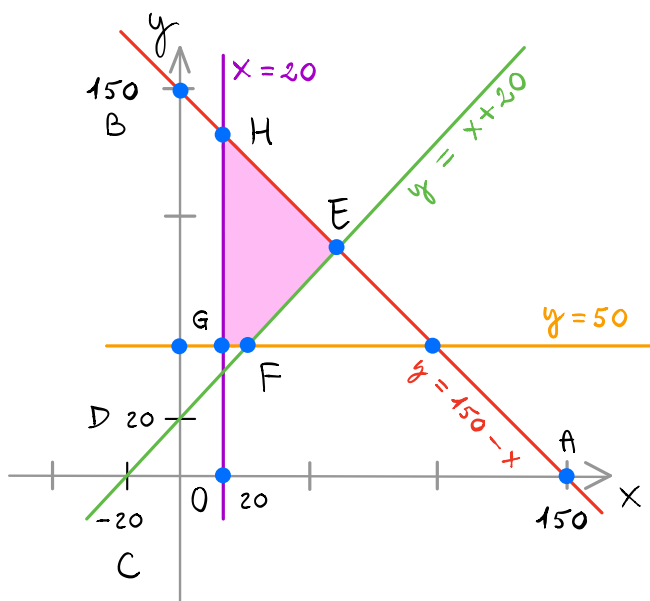
$$\text{Si } x=0 \Rightarrow y = 20 \Rightarrow (0, 20) \text{ D}$$

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = 150 - x \\ y = x + 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 = 150 - 20 - 2x \\ x = \frac{130}{2} = 65 \\ y = 65 + 20 = 85 \end{array} \quad (65, 85) \text{ E}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 50 \\ y = x + 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 50 - 20 = 30 \\ (30, 50) \text{ F} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 20 \\ y = 50 \end{array} \right\} (20, 50) \text{ G} \quad \left. \begin{array}{l} y = 150 - x \\ x = 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 130 \\ (20, 130) \text{ H} \end{array}$$



La función objetivo es el beneficio : (20, 40) F

$$f(x,y) = 80x + 20y$$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo : E, F, G, H

$$\text{E, } f(65, 85) = 6900 \text{ € Beneficio máximo}$$

$$\text{F, } f(30, 50) = 3400 \text{ €}$$

$$\text{G, } f(20, 50) = 2600 \text{ €}$$

$$\text{H, } f(20, 130) = 4200 \text{ €}$$

Venderemos 65 portátiles y 85 impresoras con un beneficio máximo de 6900 €

2. Sea la función:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ ax+b & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x-5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) Calcula los valores de a y b para que sea continua en todo $\mathbb{R}$. (0,75 pt.)

b) Para esos valores de a y b , estudia si $f(x)$ es derivable en $x=0$ y en $x=3$. (0,75 pt.)

c) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=-2$. (0,5 pt.)

a) $\frac{1}{x^2+1}$ no tiene puntos críticos. $x^2+1 \neq 0$ y los polinomios tampoco. Estudiamos las fronteras $x=0$ y $x=3$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2+1} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} ax+b &= b = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow b=1$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} ax+b &= 3a+b = 3a+1 = f(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} x-5 &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 3a+1 &= -2 \\ a &= \frac{-2-1}{3} = -1 \end{aligned}$$

b) $a=-1, b=1$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1}, & \text{si } x < 0 \\ -x+1, & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x-5, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$
 Derivamos:
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{(x^2+1)^2}, & \text{si } x < 0 \\ -1, & \text{si } 0 < x < 3 \\ 1, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$\frac{1}{x^2+1} = (x^2+1)^{-1}$ Derivamos: $f'(x) = -(x^2+1)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

Estudiamos las derivadas laterales en las fronteras $x=0$ y $x=3$.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \\ f'(0^+) &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x=0$$

$$\left. \begin{aligned} f'(3^-) &= -1 \\ f'(3^+) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(3^-) \neq f'(3^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x=3$$

c) Recta tangente en $x=-2$ $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ Ecuación de la tangente en el punto $P(a, f(a))$

$x=-2$ se halla en el primer intervalo.

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{5} \\ f'(-2) &= \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{+4}{5^2} = \frac{4}{25} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{1}{5} = \frac{4}{25}(x+2)$$

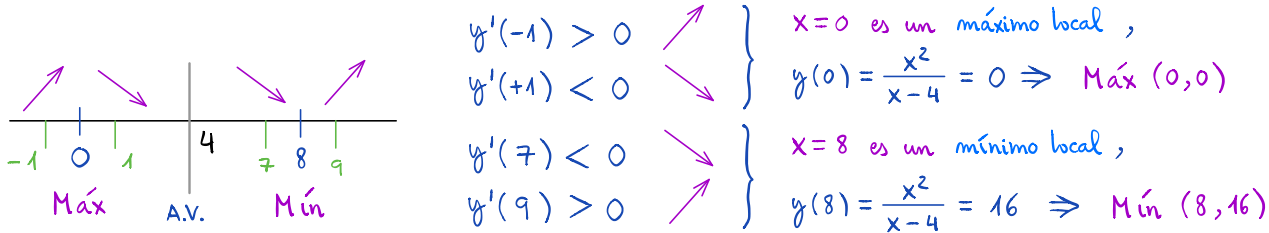
3. Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{x-4}$:

- a) Calcula los intervalos de monotonía. (1 pt)
 b) Clasifica los extremos relativos y calcula sus coordenadas. (1 pt)

Calculamos los puntos críticos: $x-4=0 \Rightarrow x=4$, Asíntota vertical, $D=\mathbb{R}-\{4\}$

Calculamos los posibles extremos con la 1ª derivada. $y'=0$

$$y' = \frac{2x(x-4) - x^2 \cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{2x^2 - 8x - x^2}{(x-4)^2} = \frac{x^2 - 8x}{(x-4)^2}, \quad y'=0 \Rightarrow x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(x-8) = 0 \begin{cases} x=8 \\ x=0 \end{cases}$$



Crece $(-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$	Máx $(0,0)$
Decrece $(0, 4) \cup (4, 8)$	Mín $(8,16)$

4. El número de nacimientos anuales (en cientos) que se producen en una ciudad a partir del año 2000 viene dado por la expresión $N(t)$ siendo t el tiempo transcurrido en años:

$$N(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 - 3t + 15 & \text{si } 0 \leq t < 8 \\ 10 - \frac{6}{t-6} & \text{si } t \geq 8 \end{cases} \quad (t=0 \text{ se corresponde con el año 2000})$$

- a) ¿Entre qué años se produjo un descenso de la natalidad? Determina en qué año se produjo un menor número de nacimientos y cuál fue ese número. (1,25 pt.)
 b) ¿Cuál es la tendencia en el número de nacimientos en el futuro? Razona la respuesta. (0,25 pt.)
 c) Esboza la gráfica de la función $N(t)$. (0,5 pt.)

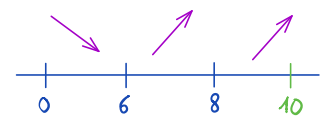
$$N(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 - 3t + 15, & \text{si } 0 \leq t < 8 \\ 10 - \frac{6}{t-6}, & \text{si } t \geq 8 \end{cases} \quad \text{a) Estudiamos la monotonía en cada trozo.}$$

Trozo 1: $N'(t) = \frac{t}{2} - 3 = 0 \Rightarrow t = 6$ posible extremo local

$N''(t) = \frac{1}{2} > 0$, luego en $t=6$ hay un mínimo local.

Trozo 2: $t-6=0 \Rightarrow t=6$ no es un punto crítico porque está fuera del intervalo.

$$N'(t) = -\frac{-6 \cdot 1}{(t-6)^2} = \frac{6}{(t-6)^2} = 0 \Rightarrow 6=0 \quad \# \text{ No hay extremos locales}$$



$N'(10) > 0$ Crece.

Decrece en $(0, 6) \rightarrow (2000, 2006)$

Extremos absolutos: $N(0) = 15$, 1500 nacimientos

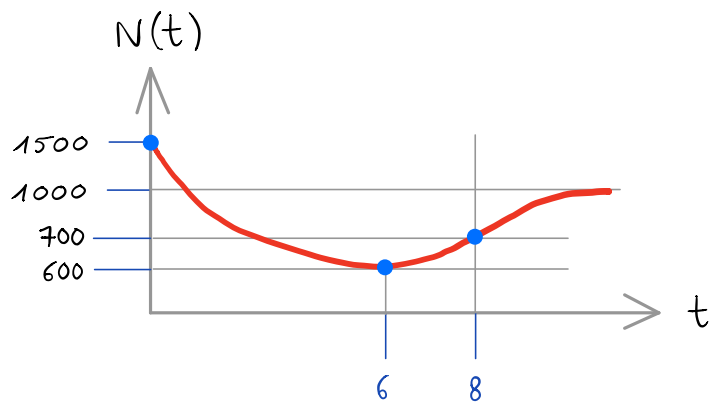
$N(6) = 6$, 600 nacimientos Mínimo absoluto en $t=6 \Rightarrow$ año 2006

$N(8) = 7$, 700 nacimientos

b) La tendencia en el futuro, a largo plazo, es en el 2º trozo: $t \geq 8$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} 10 - \frac{6}{t-6} = 10 \Rightarrow 1000 \text{ nacimientos}$$

c) Gráfica



5. Calcula la integral: $\int \left(\sqrt{x} + (2x)^3 + \frac{1}{x^2} \right) dx$ y C para que la primitiva $F(1) = 2$. (1 pt.)

$$\begin{aligned} \int x^{1/2} dx + \int (2x)^3 dx + \int x^{-2} dx &= \int x^{1/2} dx + \frac{1}{2} \cdot \int 2 \cdot (2x)^3 dx + \int x^{-2} dx = \\ &= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x)^{3+1}}{3+1} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \frac{(2x)^4}{8} + \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + 2x^4 - \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

$$\text{Para que la primitiva } F(1) = 2 \Rightarrow \frac{2}{3} \sqrt{1^3} + 2 \cdot 1^4 - \frac{1}{1} + C = 2$$

$$\frac{2}{3} + 2 - 1 + C = 2 \Rightarrow C = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$