

ÁLGEBRA Y ANÁLISIS

Si $a \neq \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$, entonces rango $A = 3$

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 0 & a & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -10 \end{pmatrix}$: $X = \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

- Calcula el rango de la matriz en función del valor del parámetro a . (0,5 pt.)
- En el caso $a = 1$ calcula $(A - I)^{-1}$. Donde I es la matriz identidad de orden 3. (1,5 pt.)
- En el caso $a = 1$ despeja y calcula X en la ecuación matricial $A \cdot X - X = B^t$ (1 pt.)

2. Sea la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ $a = -1, b = 1$
 No es derivable en $x = 0$
 No es derivable en $x = 1$

- Calcula los valores de a y b para que sea continua en todo $\mathbb{R}$. (0,75 pt.)
- Para esos valores de a y b , estudia si $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y en $x = 3$. (0,75 pt.)
- Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -2$. $y - \frac{1}{5} = \frac{4}{25}(x + 2)$ (0,5 pt.)

3. Sea la función $f(x) = x^4 - 2x^3$:

Convexa $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$	P.I. $(0, 0)$
Cóncava $(0, 1)$	P.I. $(1, -1)$

- Calcula los intervalos de curvatura. (1 pt)
- Calcula los puntos de inflexión y sus coordenadas. (1 pt)

4. El número de nacimientos anuales (en cientos) que se producen en una ciudad a partir del año 2000 viene dado por la expresión $N(t)$ siendo t el tiempo transcurrido en años:

$$N(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 - 3t + 15 & \text{si } 0 \leq t < 8 \\ 10 - \frac{6}{t-6} & \text{si } t \geq 8 \end{cases}$$

Decrece en $(0, 6) \rightarrow (2000, 2006)$
 $(t = 0)$ se corresponde con el año 2000
 Mínimo absoluto en $t = 6 \Rightarrow$ año 2006
 $N(6) = 6$, 600 nacimientos

- ¿Entre qué años se produjo un descenso de la natalidad? Determina en qué año se produjo un menor número de nacimientos y cuál fue ese número. 1000 nacimientos (1,25 pt.)
- ¿Cuál es la tendencia en el número de nacimientos en el futuro? Razona la respuesta. (0,25 pt.)
- Esboza la gráfica de la función $N(t)$. (0,5 pt.)

5. Calcula la integral: $\int \left(\sqrt{x} + (2x)^3 + \frac{1}{x^2} \right) dx$ y C para que la primitiva $F(1) = 2$. (1 pt.)

$$F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2x^4 - \frac{1}{x} + C$$

$$F(1) = 2 \Rightarrow C = \frac{1}{3}$$

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 0 & a & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -10 \end{pmatrix}$:

- a) Calcula el rango de la matriz en función del valor del parámetro a . (0,5 pt.)
 b) En el caso $a = 1$ calcula $(A - I)^{-1}$. Donde I es la matriz identidad de orden 3. (1,5 pt.)
 c) En el caso $a = 1$ despeja y calcula X en la ecuación matricial $A \cdot X - X = B^t$ (1 pt.)

a) Para que la matriz A no tenga rango 3, $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 0 & a & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = +a \cdot \begin{vmatrix} a & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A| = a \cdot (-a+2) - 3(a-1) = -a^2 + 2a - 3a + 3 = 0 \Rightarrow -a^2 - a + 3 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 3 = 0$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow \text{Si } a = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \text{ o bien } a = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \Rightarrow \text{rango } A = 2$$

Existen menores de orden 2 tales que $\det \neq 0$; por ejemplo: $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

Si $a \neq \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$, entonces $\text{rango } A = 3$

b) Si $a = 1$, calcula $(A - I)^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \text{ llamemos } Z = A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|Z| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -1(-3) = 3 \neq 0 \text{ luego tiene inversa.}$$

Para calcular la inversa: $Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} \cdot [\text{Adj}(Z)]^t$, La matriz adjunta:

$$\text{Adj}(Z) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Adj}(\tilde{z})]^t = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{z}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = (A-I)^{-1}$$

$$\text{Comprobación: } \tilde{z} \cdot \tilde{z}^{-1} = I, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Q.E.D}$$

c) En el caso $a = 1$ despeja y calcula X en la ecuación matricial $A \cdot X - X = B^t$

$$\left. \begin{array}{l} (A-I) \cdot X = B^t \\ (A-I)^{-1} \cdot (A-I) \cdot X = (A-I)^{-1} \cdot B^t \end{array} \right\} X = (A-I)^{-1} \cdot B^t$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 8 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Comprobación: $A \cdot X - X = B^t$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 10 \\ -\frac{5}{3} & \frac{13}{3} \\ \frac{23}{3} & \frac{-28}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 8 & -10 \end{pmatrix} \quad \text{Q.E.D}$$

2. Sea la función:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ ax+b & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x-5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) Calcula los valores de a y b para que sea continua en todo $\mathbb{R}$. (0,75 pt.)

b) Para esos valores de a y b , estudia si $f(x)$ es derivable en $x=0$ y en $x=3$. (0,75 pt.)

c) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=-2$. (0,5 pt.)

a) $\frac{1}{x^2+1}$ no tiene puntos críticos. $x^2+1 \neq 0$ y los polinomios tampoco. Estudiamos las fronteras $x=0$ y $x=3$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2+1} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} ax+b &= b = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow b=1$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} ax+b &= 3a+b = 3a+1 = f(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} x-5 &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 3a+1 &= -2 \\ a &= \frac{-2-1}{3} = -1 \end{aligned}$$

b) $a=-1, b=1$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1}, & \text{si } x < 0 \\ -x+1, & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x-5, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$
 Derivamos:
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{(x^2+1)^2}, & \text{si } x < 0 \\ -1, & \text{si } 0 < x < 3 \\ 1, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$\frac{1}{x^2+1} = (x^2+1)^{-1}$ Derivamos: $f'(x) = -(x^2+1)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

Estudiamos las derivadas laterales en las fronteras $x=0$ y $x=3$.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \\ f'(0^+) &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x=0$$

$$\left. \begin{aligned} f'(3^-) &= -1 \\ f'(3^+) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(3^-) \neq f'(3^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x=3$$

c) Recta tangente en $x=-2$ $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ Ecuación de la tangente en el punto $P(a, f(a))$

$x=-2$ se halla en el primer intervalo.

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{5} \\ f'(-2) &= \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{+4}{5^2} = \frac{4}{25} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{1}{5} = \frac{4}{25}(x+2)$$

3. Sea la función $f(x) = x^4 - 2x^3$:

- Calcula los intervalos de curvatura.
- Calcula los puntos de inflexión y sus coordenadas.

No hay puntos críticos: $D = \mathbb{R}$

Calculamos los posibles puntos de inflexión con la 2ª derivada. $y'' = 0$

$$y' = 4x^3 - 6x^2$$

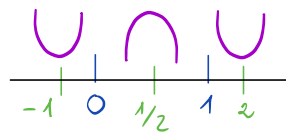
$$y'' = 12x^2 - 12x \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow 12x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 12x(x-1) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Confirmamos con la 3ª derivada: $y''' = 24x - 12$

$$\left. \begin{array}{l} y'''(0) = -12 \neq 0 \\ y'''(1) = 12 \neq 0 \end{array} \right\} \text{Son puntos de inflexión} \quad \begin{array}{l} x=0, y(0) = x^4 - 2x^3 = 0 \Rightarrow \text{P.I. } (0,0) \\ x=1, y(1) = x^4 - 2x^3 = -1 \Rightarrow \text{P.I. } (1,-1) \end{array}$$

Estudiamos la curvatura en puntos al azar entre los P.I.

$$y'' = 12x^2 - 12x \quad \left\{ \begin{array}{l} y''(-1) > 0 \\ y''(1/2) < 0 \\ y''(2) > 0 \end{array} \right.$$



Convexa $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$	P.I. $(0,0)$
Cóncava $(0,1)$	P.I. $(1,-1)$

4. El número de nacimientos anuales (en cientos) que se producen en una ciudad a partir del año 2000 viene dado por la expresión $N(t)$ siendo t el tiempo transcurrido en años:

$$N(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 - 3t + 15 & \text{si } 0 \leq t < 8 \\ 10 - \frac{6}{t-6} & \text{si } t \geq 8 \end{cases} \quad (t=0 \text{ se corresponde con el año 2000})$$

- ¿Entre qué años se produjo un descenso de la natalidad? Determina en qué año se produjo un menor número de nacimientos y cuál fue ese número. (1,25 pt.)
- ¿Cuál es la tendencia en el número de nacimientos en el futuro? Razona la respuesta. (0,25 pt.)
- Esboza la gráfica de la función $N(t)$. (0,5 pt.)

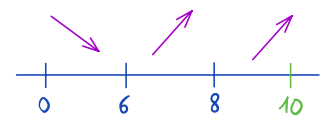
$$N(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 - 3t + 15, & \text{si } 0 \leq t < 8 \\ 10 - \frac{6}{t-6}, & \text{si } t \geq 8 \end{cases} \quad \text{a) Estudiamos la monotonía en cada trozo.}$$

Trozo 1: $N'(t) = \frac{t}{2} - 3 = 0 \Rightarrow t = 6$ posible extremo local

$$N''(t) = \frac{1}{2} > 0, \text{ luego en } t=6 \text{ hay un mínimo local.}$$

Trozo 2: $t-6=0 \Rightarrow t=6$ no es un punto crítico porque está fuera del intervalo.

$$N'(t) = -\frac{-6 \cdot 1}{(t-6)^2} = \frac{6}{(t-6)^2} = 0 \Rightarrow 6=0 \nexists \text{ No hay extremos locales}$$



$$N'(10) > 0 \text{ Crece.}$$

Decrece en $(0,6) \rightarrow (2000, 2006)$

Extremos absolutos: $N(0) = 15$, 1500 nacimientos

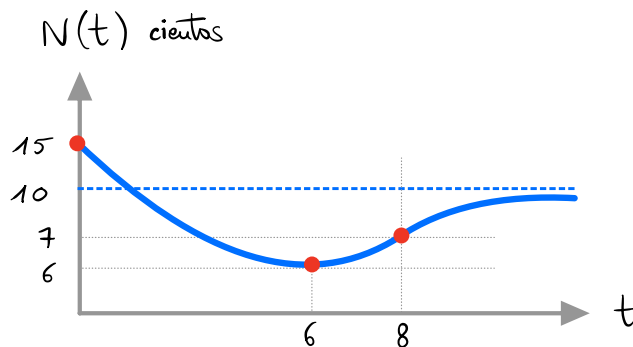
$$N(6) = 6, \text{ 600 nacimientos Mínimo absoluto en } t=6 \Rightarrow \text{año 2006}$$

$$N(8) = 7, \text{ 700 nacimientos}$$

b) La tendencia en el futuro, a largo plazo, es en el 2º trozo: $t \geq 8$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} 10 - \frac{6}{t-6} = 10 \Rightarrow 1000 \text{ nacimientos}$$

c) Gráfica



5. Calcula la integral: $\int \left(\sqrt{x} + (2x)^3 + \frac{1}{x^2} \right) dx$ y C para que la primitiva $F(1) = 2$. (1 pt.)

$$\begin{aligned} \int x^{1/2} dx + \int (2x)^3 dx + \int x^{-2} dx &= \int x^{1/2} dx + \frac{1}{2} \cdot \int 2 \cdot (2x)^3 dx + \int x^{-2} dx = \\ &= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x)^{3+1}}{3+1} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \frac{(2x)^4}{8} + \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + 2x^4 - \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

$$\text{Para que la primitiva } F(1) = 2 \Rightarrow \frac{2}{3} \sqrt{1^3} + 2 \cdot 1^4 - \frac{1}{1} + C = 2$$

$$\frac{2}{3} + \cancel{2} - 1 + C = \cancel{2} \Rightarrow C = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$