

ÁLGEBRA Y ANÁLISIS

1. En una fábrica se construyen dos tipos de aparatos: A y B . Ambos tipos de aparatos han de pasar por la secciones X e Y . Cada sección trabaja como máximo 100 horas por semana. Cada aparato A lleva tres horas de la sección X y una de la sección Y . Cada aparato B lleva una hora de la sección X y dos de la sección Y . Cada aparato A se vende por 100 € y cada aparato B se vende a 150 €. Hallar cuántos aparatos de cada tipo se producirán para que el ingreso por ventas sea máximo.

Produciremos 20 tipo A y 40 tipo B , $f(20, 40) = 8000$ € (3 pt.)

2. Sea la función: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + b & \text{si } x < 1 \\ ax^2 - bx + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea derivable en $x = 1$. (1,5 pt.)

Es derivable en $x = 1$ si $a = 7/4$ y $b = 5/4$

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$. (0,5 pt.)

$$y - \frac{11}{2} = \frac{23}{4} \cdot (x - 2)$$

3. Determinénse el dominio y las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$. $Df(x) = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ (2 pt.)

Asíntota vertical: $x = \frac{1}{2}$ Asíntota oblicua: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

4. Un artículo de consumo estuvo a la venta durante 8 años, y su precio $P(t)$ (en miles de euros) varió con el tiempo t (en años) que llevaba en el mercado, según la función siguiente:

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -\frac{5}{2}t + 25 & \text{si } 2 < t \leq 8 \end{cases}$$

siendo la variable t el número de años transcurridos desde que se pone en marcha.

a) ¿Es el precio una función continua del tiempo? Sí es continua. (0,5 pt.)

b) Averigua en qué momentos se alcanzaron los precios máximo y mínimo, y cuáles fueron esos precios.

$\begin{cases} \text{mínimo absoluto} & t = 0 \text{ años} & 4000 \text{ €} \\ \text{máximo absoluto} & t = 2 \text{ años} & 20.000 \text{ €} \end{cases}$ (1,5 pt.)

5. Calcula la derivada de $f(x) = (1+x^2) \cdot e^{-x}$ (1 pt.)

$$f'(x) = e^{-x} (2x - 1 - x^2) = -e^{-x} \cdot (x - 1)^2$$

1. En una fábrica se construyen dos tipos de aparatos: A y B. Ambos tipos de aparatos han de pasar por la secciones X e Y. Cada sección trabaja como máximo 100 horas por semana. Cada aparato A lleva tres horas de la sección X y una de la sección Y. Cada aparato B lleva una hora de la sección X y dos de la sección Y. Cada aparato A se vende por 100 € y cada aparato B se vende a 150 €. Hallar cuántos aparatos de cada tipo se producirán para que el ingreso por ventas sea máximo.

(3 pt.)

Llamaremos : $x \equiv$ aparatos tipo A
 $y \equiv$ aparatos tipo B

Función objetivo :

$$f(x, y) = \underbrace{100x}_A + \underbrace{150y}_B$$

Restricciones :
$$\begin{cases} 3x + y \leq 100 \\ x + 2y \leq 100 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (\text{No negatividad})$$

Aparato	A	B	Horas semanales
Sección X	3	1	100
Sección Y	1	2	100
Precio venta	100 €	150 €	—

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**:

$$\begin{cases} 3x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - 3x \\ x + 2y = 100 \Rightarrow y = \frac{100 - x}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$

$$3x + y = 100$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow x = \frac{100}{3} \Rightarrow \left(\frac{100}{3}, 0\right) A$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = 100 \Rightarrow (0, 100) B$$

$$x + 2y = 100$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow x = 100 \Rightarrow (100, 0) C$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = 50 \Rightarrow (0, 50) D$$

Por último, busco la intersección entre las restricciones.

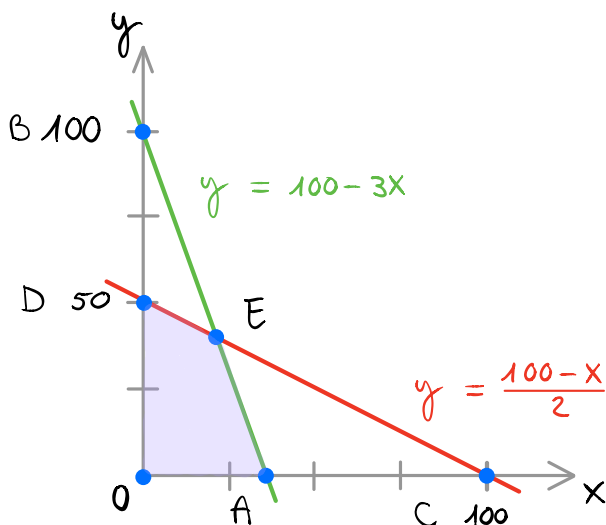
$$\begin{cases} y = 100 - 3x \\ y = \frac{100 - x}{2} \end{cases} \quad 100 - 3x = \frac{100 - x}{2}$$

$$200 - 6x = 100 - x \Rightarrow 5x = 100$$

$$x = 20 \Rightarrow y = 100 - 3 \cdot 20 = 40$$

$$(20, 40) E$$

La última intersección es $O(0, 0)$



La **función objetivo** es:

$$f(x, y) = 100x + 150y$$

Sustituimos los vértices de la **región factible** en la función objetivo : O, D, E, A

$$f(0, 0) = 0 \text{ € (No)}, \quad f(0, 50) = 7500 \text{ €},$$

$$f(20, 40) = 8000 \text{ €}, \quad f\left(\frac{100}{3}, 0\right) \approx 3333 \text{ €}$$

Produciremos 20 tipo A y 40 tipo B

2. Sea la función: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + b & \text{si } x < 1 \\ ax^2 - bx + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea derivable en $x=1$.

(1,5 pt.)

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=2$.

(0,5 pt.)

a) Para que sea derivable, es condición necesaria que sea continua en $x=1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 - ax + b = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 - bx + 1 = f(1) \quad \text{límites laterales iguales}$$

$$2 \cdot 1^2 - a \cdot 1 + b = a \cdot 1^2 - b \cdot 1 + 1 \Rightarrow 2 - a + b = a - b + 1$$
$$2a - 2b = 1 \quad [1]$$

La condición de derivabilidad es: $f'(1^-) = f'(1^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - a & \text{si } x < 1 \\ 2ax - b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 4 \cdot 1 - a = 2 \cdot a \cdot 1 - b \Rightarrow 3a - b = 4 \quad [2]$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 2a - 2b = 1 \\ 3a - b = 4 \end{cases} \begin{matrix} + \\ \cdot (-2) \end{matrix}$$
$$-4a = -7 \Rightarrow a = \frac{7}{4}$$
$$b = 3a - 4 = 3 \cdot \frac{7}{4} - 4 = \frac{5}{4}$$

Es derivable en $x=1$ si $a = \frac{7}{4}$ y $b = \frac{5}{4}$

b) Calcular la recta tangente en $x=2$

$x=2$ pertenece al segundo intervalo donde $f(x) = ax^2 - bx + 1 = \frac{7}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + 1$

$$f(2) = \frac{7}{4} \cdot 4 - \frac{5}{4} \cdot 2 + 1 = 7 - \frac{5}{2} + 1 = \frac{11}{2}$$

$$f'(x) = \frac{7}{4} \cdot 2x - \frac{5}{4} \Rightarrow f'(2) = \frac{7}{4} \cdot 4 - \frac{5}{4} = \frac{23}{4}$$

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Rightarrow y - \frac{11}{2} = \frac{23}{4} \cdot (x - 2)$$

3. Determinense el dominio y las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$.

(2 pt.)

Para calcular el dominio, busquemos los puntos críticos:

$$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}, \text{ luego } \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Asíntota vertical: $x = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{x^2}{2x-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{x^2}{2x-1} = +\infty$$

Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{2x-1} = \infty$, No hay

Asíntota oblicua: $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(2x-1) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2-x} = \frac{1}{2}$, Sí hay

$$\text{El coeficiente } n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2x-1} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2}x^2 - \cancel{2}x^2 + x}{4x-2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{La ecuación de la recta oblicua } y = mx + n \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

4. Un artículo de consumo estuvo a la venta durante 8 años, y su precio $P(t)$ (en miles de euros) varió con el tiempo t (en años) que llevaba en el mercado, según la función siguiente:

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -\frac{5}{2}t + 25 & \text{si } 2 < t \leq 8 \end{cases}$$

siendo la variable t el número de años transcurridos desde que se pone en marcha.

- a) ¿Es el precio una función continua del tiempo? (0,5 pt.)
- b) Averigua en qué momentos se alcanzaron los precios máximo y mínimo, y cuáles fueron esos precios. (1,5 pt.)

- a) No hay puntos críticos y el único punto de frontera es $t = 2$.

$$P(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 4t^2 + 4 = \lim_{x \rightarrow 2^+} -\frac{5}{2} \cdot t + 25 \quad \text{límites laterales iguales}$$

$$20 = -\frac{5}{2} \cdot 2 + 25 = 20, \text{ Sí cumple luego } P(t) \text{ es una función continua.}$$

- b) Veamos los extremos de cada intervalo, y calculemos los extremos absolutos:

$$P(t) = 4t^2 + 4, \quad t \in [0, 2]$$

$$P'(t) = 8t = 0 \quad \text{si } t = 0$$

$$P''(t) = 8 > 0$$

Luego $t = 0$ es un mínimo

$$P(0) = 4 \Rightarrow 4000 \text{ €}$$

Fronteras del intervalo:

$$P(2) = 20 \Rightarrow 20.000 \text{ €}$$

$$P(t) = -\frac{5}{2} \cdot t + 25, \quad t \in (2, 8]$$

$$P'(t) = -\frac{5}{2} = 0 \Rightarrow \text{No hay extremos}$$

Fronteras del intervalo:

$$P(2) = 20 \Rightarrow 20.000 \text{ €}$$

$$P(8) = -\frac{5}{2} \cdot 8 + 25 = -20 + 25 = 5 \Rightarrow 5.000 \text{ €}$$

El mínimo absoluto se produce al principio: $t = 0$ años con un precio de 4000 €

El máximo absoluto se produce para $t = 2$ años con un precio de 20.000 €

5. Calcula la derivada de $f(x) = (1 + x^2) \cdot e^{-x}$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + (1 + x^2) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} (2x - 1 - x^2)$$

$$\text{También se puede simplificar como } f'(x) = -e^{-x} \cdot (x^2 - 2x + 1) = -e^{-x} \cdot (x - 1)^2$$