

CONTROL DE ÁLGEBRA

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
 - a) Determina el valor de x para que se verifique $B^2 = A$ (1 pt.)
 - b) Calcula el valor de x para que $B + C = A^{-1}$ (A^{-1} es la matriz inversa de A). (1,5 pt.)
2. Ana, Beatriz y Carmen son las delanteras titulares de un equipo de fútbol. Entre las tres, en la última temporada, han marcado 65 goles. Sabemos que Ana ha marcado un 50 % más de goles que Beatriz y sabemos que Carmen ha marcado la mitad de goles que Ana.
 - a) Escribe el sistema de ecuaciones asociado al problema en forma matricial. (1 pt.)
 - b) Resuelve el sistema anterior (por el método que quieras). ¿ Cuántos goles ha marcado cada una? (1 pt.)
3. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} -x + 6y \geq 12 \\ x + 2y \leq 20 \\ 3x + 2y \geq 4 \end{cases}$$
 - a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices. (1,5 pt.)
 - b) Calcula en qué puntos de la región factible la función $f(x, y) = 2x - 12y$ alcanza un valor máximo. (0,5 pt.)
4. Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, los modelos A y B . El coste de producir un metro de modelo A es igual a 2 € , mientras que el coste de producir un metro del modelo B es de 0,5 € . Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable en total, aunque del modelo B no podrán fabricarse más de 5000 metros y, debido al coste de producción, no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además, se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B mayor o igual a la de metros del modelo A .
 - a) Formula el sistema de inecuaciones (restricciones). Representa la región factible y calcula sus vértices. (2 pt.)
 - b) Determina el número de metros de cable que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste. (1 pt.)
 - c) ¿Es posible producir bajo estas condiciones 3000 metros del modelo A y 4000 metros del modelo B ? (0,5 pt.)

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Determina el valor de x para que se verifique $B^2 = A$ (1 pt.)

b) Calcula el valor de x para que $B + C = A^{-1}$ (A^{-1} es la matriz inversa de A). (1,5 pt.)

a) $B^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+x^2 & 3x \\ 3x & x^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; resolvemos por igualación:

$$4 + x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$x^2 + 1 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Sólo $x = 1$ verifica todas las ecuaciones.

b) Ecuación matricial: $B + C = A^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1 \neq 0, \text{ luego tiene inversa. Para calcular la inversa:}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\text{Adj}(A)]^t, \text{ La matriz adjunta: } \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \text{ Solución}$$

$$B + C = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & x-1 \\ x-1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix};$$

resolvemos por igualación: $x-1 = -3 \Rightarrow x = -2$ Solución ; verifica todas las ecuaciones.

2. Ana, Beatriz y Carmen son las delanteras titulares de un equipo de fútbol. Entre las tres, en la última temporada, han marcado 65 goles. Sabemos que Ana ha marcado un 50 % más de goles que Beatriz y sabemos que Carmen ha marcado la mitad de goles que Ana.

- a) Escribe el sistema de ecuaciones asociado al problema en forma matricial. (1 pt.)
 b) Resuelve el sistema anterior (por el método que quieras). ¿ Cuántos goles ha marcado cada una? (1 pt.)

a) Sistema matricial: Condiciones

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ana (A) - } x \text{ goles} \\ \text{Beatriz (B) - } y \text{ goles} \\ \text{Carmen (C) - } z \text{ goles} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 65 \\ x = y + \frac{50y}{100} = 1,5y = \frac{3}{2}y \Rightarrow 2x = 3y \\ z = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 65 \quad [1] \\ 2x - 3y = 0 \quad [2] \\ x - 2z = 0 \quad [3] \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Forma matricial

b) $z = \frac{x}{2}$; $2x = 3y \Rightarrow y = \frac{2x}{3}$ Sustitución $\rightarrow [1]$

$$x + y + z = 65 \Rightarrow x + \frac{2x}{3} + \frac{x}{2} = 65 \quad \cdot 6$$

$$6x + 4x + 3x = 390 \Rightarrow 13x = 390 \Rightarrow x = \frac{390}{13} = 30$$

Por lo tanto $x = 30 \Rightarrow y = \frac{2x}{3} = \frac{2 \cdot 30}{3} = 20 \Rightarrow y = 20$

$$\Rightarrow z = \frac{x}{2} = \frac{30}{2} = 15 \Rightarrow z = 15$$

Solución: Ana (A) - 30 goles
 Beatriz (B) - 20 goles
 Carmen (C) - 15 goles

3. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} -x + 6y \geq 12 \\ x + 2y \leq 20 \\ 3x + 2y \geq 4 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices. (1,5 pt.)

b) Calcula en qué puntos de la región factible la función $f(x, y) = 2x - 12y$ alcanza un valor máximo. (0,5 pt.)

Restricciones:

$$\begin{cases} -x + 6y \geq 12 \\ x + 2y \leq 20 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y \geq 4 \end{cases}$$

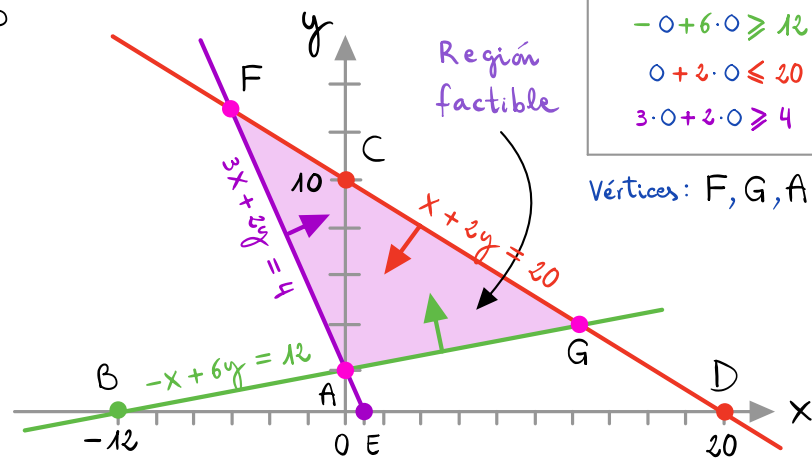
Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las **restricciones**.

Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$.

$$\begin{cases} -x + 6y = 12 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=2 \quad (0, 2) \text{ A} \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=-12 \quad (-12, 0) \text{ B} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 20 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=10 \quad (0, 10) \text{ C} \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=20 \quad (20, 0) \text{ D} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=2 \quad (0, 2) \text{ A} \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \quad (\frac{4}{3}, 0) \text{ E} \end{cases}$$



Pruebo el punto $(0, 0)$

$-0 + 6 \cdot 0 \geq 12$ no cumple

$0 + 2 \cdot 0 \leq 20$ cumple

$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \geq 4$ no cumple

Vértices: F, G, A

Por último, busco la intersección entre las restricciones. Vértices: F, G, A

$$\begin{cases} -x + 6y = 12 \\ x + 2y = 20 \end{cases} \Rightarrow \text{Sumamos: } \begin{cases} 8y = 32 \Rightarrow y = \frac{32}{8} = 4 \\ x = 20 - 2y = 20 - 2 \cdot 4 = 12 \end{cases} \quad (12, 4) \text{ G}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 20 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{Restamos: } \begin{cases} 2x = -16 \Rightarrow x = -8 \\ y = \frac{20 - x}{2} = \frac{20 + 8}{2} = 14 \end{cases} \quad (-8, 14) \text{ F}$$

La **función objetivo** es: $f(x, y) = 2x - 12y$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: Vértices: F, G, A

$$\begin{cases} A(0, 2), f(0, 2) = -24 \\ F(-8, 14), f(-8, 14) = -184 \\ G(12, 4), f(12, 4) = -24 \end{cases}$$

Alcanza el máximo en todo el segmento que va de $(0, 2)$ a $(12, 4)$ con un valor de -24 . $\overline{AG}$

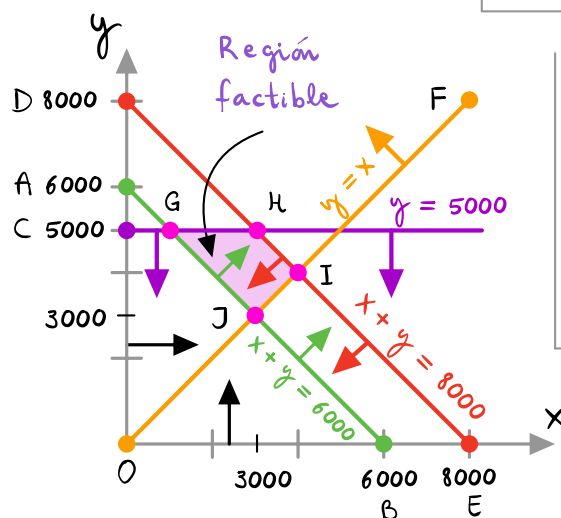
4. Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, los modelos A y B. El coste de producir un metro de modelo A es igual a 2 €, mientras que el coste de producir un metro del modelo B es de 0,5 €. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable en total, aunque del modelo B no podrán fabricarse más de 5000 metros y, debido al coste de producción, no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además, se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B mayor o igual a la de metros del modelo A.

- Formula el sistema de inecuaciones (restricciones). Representa la región factible y calcula sus vértices. (2 pt.)
- Determina el número de metros de cable que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste. (1 pt.)
- ¿Es posible producir bajo estas condiciones 3000 metros del modelo A y 4000 metros del modelo B? (0,5 pt.)

Restricciones:
$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 6000 \\ y \leq 5000 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y \leq 8000 \\ y \geq x \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x \geq 0 ; y \geq 0 \\ \text{(No negatividad)} \end{array} \right\}$$

Para encontrar la **región factible**, graficamos las rectas que delimitan las restricciones. Para representar la gráfica, busco los puntos de corte con los ejes $x=0$ e $y=0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 6000 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=6000 \text{ (0, 6000) A} \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=6000 \text{ (6000, 0) B} \\ y = 5000 \Rightarrow (5000, 0) C \\ x + y = 8000 \\ \text{Si } x=0 \Rightarrow y=8000 \text{ (0, 8000) D} \\ \text{Si } y=0 \Rightarrow x=8000 \text{ (8000, 0) E} \\ y = x ; \text{ Si } x=0 \Rightarrow y=0 \text{ (0, 0) O} \\ \text{Si } y=8000 = x \Rightarrow (8000, 8000) F \end{array} \right.$$



Pruebo el punto (0,0)

- $0 + 0 \geq 6000$ No cumple
- $0 + 0 \leq 8000$ cumple
- $0 \leq 5000$ cumple

Pruebo el punto (0,1)

- $y \geq x \Rightarrow 1 \geq 0$ cumple

Vértices: G, H, I, J

Por último, busco la intersección entre las restricciones: G, H, I, J

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 6000 \\ y = 5000 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1000 \\ \text{Luego } (1000, 5000) \text{ G} \end{array} ; \left. \begin{array}{l} x + y = 8000 \\ y = 5000 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 3000 \\ \text{Luego } (3000, 5000) \text{ H} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x \\ x + y = 8000 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x = 8000 \Rightarrow x = y = 4000 \\ \text{Luego } (4000, 4000) \text{ I} \end{array} ; \left. \begin{array}{l} x + y = 6000 \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x = 6000 \Rightarrow x = y = 3000 \\ \text{Luego } (3000, 3000) \text{ J} \end{array}$$

La **función objetivo** es: $f(x, y) = 2x + 0,5y$ (coste mínimo)

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: G, H, I, J

$$\left. \begin{array}{l} \text{G, } f(1000, 5000) = 4500 \text{ €} \\ \text{H, } f(3000, 5000) = 8500 \text{ €} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{I, } f(4000, 4000) = 10000 \text{ €} \\ \text{J, } f(3000, 3000) = 7500 \text{ €} \end{array} \right\}$$

Lograremos un coste mínimo de 4500 € produciendo 1000 m de cable tipo A y 5000 m de tipo B.

Llamaremos:

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv \text{cable tipo A} \\ y \equiv \text{cable tipo B} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Coste} \\ 2 \text{ €} \\ 0,5 \text{ €} \end{array}$$

Función objetivo:

$$f(x, y) = \underbrace{2x}_A + \underbrace{0,5y}_B$$

(coste mínimo)

c) (3000, 4000) Combinación.
Cumple todas las condiciones.

$$\begin{array}{l} 3000 + 4000 \geq 6000 \\ 3000 + 4000 \leq 8000 \\ 4000 \leq 5000 \\ 4000 \geq 3000 \end{array}$$

y la no negatividad.