

## MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS

1. Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- a) Calcula, si existe, su inversa. (1 pt.)
- b) Calcula la matriz  $X$  cuadrada de orden 3 que verifica:  
en la ecuación matricial:  $(X + A)^2 - X^2 - X \cdot A = I_3$  (1,5 pt.)  
Nota:  $(X + A)^2 \neq X^2 + 2 \cdot A \cdot X + A^2$
2. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ , calcula la matriz  $A$  para que cumpla las siguientes condiciones:  $|A| = 25$  y además, la matriz  $A$  conmuta con la matriz  $B$ . (1,5 pt.)
3. Supongamos que  $C_1, C_2, C_3, C_4$  son las cuatro columnas de una matriz cuadrada  $A$  cuyo determinante vale 7. Obtén razonadamente:
- a) El determinante de la matriz  $2 \cdot A^{-1}$  (0,5 pt.)
- b) El determinante de la matriz cuyas columnas son:  
 $C_1 + 2C_2, 3C_2, C_2 - C_4, C_3$  (1 pt.)
4. Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- a) Estudia el rango de la matriz  $(A - \lambda \cdot I)$ , según los valores de  $\lambda$ . (1 pt.)
- b) Para  $\lambda = 2$ , soluciona el sistema  $A \cdot X = \lambda \cdot X$  donde  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  (1 pt.)
5. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales: 
$$\begin{cases} x - y + 3z = m \\ my - 2z = -2 \\ x + (m - 1)y + (m + 3)z = m \end{cases}$$
- a) Discute el sistema en función del parámetro  $m$ . (1,5 pt.)
- b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado. Para dicho valor de  $m$  calcula, si es posible, una solución en la que  $y = 2$ . (1 pt.)

1. Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula, si existe, su inversa.

b) Calcula la matriz  $X$  cuadrada de orden 3 que verifica:  
en la ecuación matricial:  $(X + A)^2 - X^2 - X \cdot A = I_3$

Nota:  $(X + A)^2 \neq X^2 + 2 \cdot A \cdot X + A^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Calculamos la inversa de  $A$

a)  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$ , luego tiene inversa.

Para calcular la inversa:  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\text{Adj}(A)]^t$ , La matriz adjunta:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Ecuación matricial:

$$(X + A)^2 - X^2 - X \cdot A = I \Rightarrow$$

$$\rightarrow (X + A) \cdot (X + A)$$

$$\cancel{X^2} + \cancel{X \cdot A} + A \cdot X + A^2 - \cancel{X^2} - \cancel{X \cdot A} = I$$

$$A \cdot X + A^2 = I \Rightarrow$$

$$A \cdot X = I - A^2$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A \cdot X}_I = A^{-1} \cdot (I - A^2) = A^{-1} - \underbrace{A^{-1} \cdot A \cdot A}_I$$

$$X = A^{-1} - \underbrace{A^{-1} \cdot A \cdot A}_I$$

Solución:  $X = A^{-1} - A$  ;

Solución:

$$\text{Finalmente, } X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ , calcula la matriz  $A$  para que cumpla las siguientes condiciones:  $|A| = 25$  y además, la matriz  $A$  conmuta con la matriz  $B$ . (1,5 pt.)

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y \\ 0 & z \end{vmatrix} = x \cdot z = 25 \quad \text{[1]} \quad \text{enunciado} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} ; \quad A \text{ y } B \text{ conmutan} \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$$

$$\left. \begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2y & x-2y \\ 2z & -2z \end{pmatrix} \\ B \cdot A &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x & 3y+z \\ 2x & 2y-2z \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \text{Igualamos}$$

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x+2y & x-2y \\ 2z & -2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x & 3y+z \\ 2x & 2y-2z \end{pmatrix} ; \text{Igualamos elemento a elemento}$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{3}x + 2y = \cancel{3}x \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0 & x - 2y = 3y + z \Rightarrow x = z \\ 2z = 2x \Rightarrow z = x & \text{y} = 0 \quad \text{---} \\ & -\cancel{2}z = 2y - \cancel{2}z \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}$$

Concluimos que  $y = 0$  [2],  $z = x \in \mathbb{R}$  [3], pero además debe cumplirse la condición [1]

$$x \cdot z = 25 \text{ siendo } z = x \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25} = \pm 5 \Rightarrow \boxed{z = x = \pm 5}$$

Tenemos dos soluciones:

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}}$$

3. Supongamos que  $C_1, C_2, C_3, C_4$  son las cuatro columnas de una matriz cuadrada  $A$  cuyo determinante vale 7. Obtén razonadamente:

a) El determinante de la matriz  $2 \cdot A^{-1}$  (0,5 pt.)

b) El determinante de la matriz cuyas columnas son:

$C_1 + 2C_2, 3C_2, C_2 - C_4, C_3$  (1 pt.)

a) Usando propiedades:  $|2 \cdot A^{-1}| = 2^4 \cdot |A^{-1}|$

dado que  $|a \cdot A| = a^n |A|$  siendo  $n$  el orden de la matriz  $A$

Además sabemos que  $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Finalmente  $|2 \cdot A^{-1}| = 2^4 \cdot |A^{-1}| = 2^4 \cdot \frac{1}{|A|} = 2^4 \cdot \frac{1}{7} = \frac{16}{7} \Rightarrow |2 \cdot A^{-1}| = \frac{16}{7}$

enunciado  $\nearrow$  Solución

b)

$$\begin{vmatrix} C_1 + 2 \cdot C_2 \\ 3 \cdot C_2 \\ C_2 - C_4 \\ C_3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} C_1 + 2 \cdot C_2 \\ C_2 \\ C_2 - C_4 \\ C_3 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} C_1 + 2 \cdot C_2 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_2 - C_4 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_2 - C_4 \end{vmatrix}$$

$C_1 \rightarrow C_1 - 2 \cdot C_2$        $C_4 \rightarrow -C_4$

$\det(F_1, F_2, K \cdot F_3) = K \cdot \det(F_1, F_2, F_3)$        $\det(F_1, F_2, F_3) = -\det(F_3, F_2, F_1)$

$$= +3 \cdot \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 - C_2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 = 21$$

$C_4 \rightarrow C_4 + C_2$       enunciado  $\nearrow$

4. Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estudia el rango de la matriz  $(A - \lambda \cdot I)$ , según los valores de  $\lambda$ . (1 pt.)

b) Para  $\lambda = 2$ , soluciona el sistema  $A \cdot X = \lambda \cdot X$  donde  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  (1 pt.)

$$a) M = A - \lambda \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Veamos cuándo } |M| = 0$$

$$|M| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \text{Polinomio característico}$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{matrix} \swarrow 2 \\ \searrow -1 \end{matrix} \quad \text{Comprobación } -1 \cdot 2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{1} \checkmark$$

Si  $\lambda \neq -1$  y  $\lambda \neq 2$ , la matriz  $M$  tiene rango 2.  $|M| \neq 0 \Rightarrow \text{Rg } M = 2$

$|M| = 0 \Rightarrow \text{Rg } M < 2 \Rightarrow \text{Rg } M = 1$  porque hay elementos no nulos.

Si  $\lambda = -1$  ó  $\lambda = 2$ , la matriz  $M$  tiene rango 1.  $|M| = 0 \Rightarrow \text{Rg } M = 1$

b)  $\lambda = 2$ . Buscamos la solución de la ecuación matricial:  $A \cdot X = 2 \cdot X$  siendo  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$A \cdot X = 2 \cdot X \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}; \text{ Igualamos elemento a elemento}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2y = 2x \Rightarrow y = x \\ x + y = 2y \Rightarrow x = y \end{array} \right\} x = y = \alpha \in \mathbb{R}$$

La matriz solución tiene la forma

$$X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

5. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales: 
$$\begin{cases} x - y + 3z = m \\ my - 2z = -2 \\ x + (m-1)y + (m+3)z = m \end{cases}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro  $m$ .

(1,5 pt.)

b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado. Para dicho valor de  $m$  calcula, si es posible, una solución en la que  $y = 2$ .

(1 pt.)

Construimos la matriz ampliada: 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 & m \end{array} \right)$$

coeficientes  $\rightarrow M$

ampliada  $\rightarrow M^*$

Aplicamos el teorema de Rouché-Frobenius. Vamos a comparar los rangos de  $M$  y  $M^*$ .

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 0 & m & m \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} m & -2 \\ m & m \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$F_3 \rightarrow F_3 - F_1$

$$|M| = m^2 + 2m = m(m+2) = 0 \quad \text{si } m=0 \text{ ó } m=-2$$

si  $m \neq 0$  ó  $m \neq -2 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M^* = 3 = n$  (nº de incógnitas)

Luego, el sistema es compatible determinado, S.C.D.

si  $m = -2$  
$$M^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2}$$

$$= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow 0 \cdot 2 = 2$$

Absurdo

$$\text{Rango } M = 2 \neq \text{Rango } M^* = 3$$

Luego, el sistema es incompatible, S.I.

$$\text{Si } m = 0$$

$$M^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Rango } M = \text{Rango } M^* = 2 < 3 = n \text{ (nº de incógnitas)}$$

Luego, el sistema es compatible indeterminado, S.C.I.

$$\left. \begin{array}{l} -2z = -2 \Rightarrow z = 1, \text{ Parametrizamos } y = \lambda \in \mathbb{R} \\ x - y + 3z = 0 \Rightarrow x = -3z + y = -3 + \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + \lambda \\ \lambda \in \mathbb{R} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Enunciado: Veamos si existe una solución para  $y = 2$ .

En este caso,  $y = \lambda = 2$ ,  $z = 1$ ,  $x = -3 + 2 = -1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Método II: Si parametrizo  $x = \lambda \in \mathbb{R}$

$$y = 3z + x = 3 + \lambda$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \in \mathbb{R} \\ 3 + \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

Enunciado: Veamos si existe una solución para  $y = 2$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{En este caso, } y = 3 + \lambda = 2 \Rightarrow \lambda = -1, z = 1, \\ x = \lambda = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Obtendríamos la misma solución