

MATRICES Y DETERMINANTES

1. Resuelve las siguientes actividades de matrices:

a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$

Calcula los valores de x para los que se verifica la ecuación: $A^2 = 2 \cdot A$ (1 pt.)

b) Calcula los valores de m para que $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ m-1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$ sí tenga inversa. (1 pt.)

c) Determina el rango de la matriz B en función de los valores del parámetro m . (1 pt.)

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X - 2Y = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1,75 \text{ pt.})$$

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2,75 pt.)

Calcula X en la ecuación matricial $X \cdot A - B = 2 \cdot X$

Nota: Calcula la inversa por el método de la matriz adjunta.

4. En una librería, se venden tres tipos de artículos: libros a 25 €, cuadernos a 10 € y bolígrafos a 2 €. Un colegio compró varias unidades de los tres artículos y pagó en total 460 €. En el pedido, por cada 2 libros, se vendieron 5 cuadernos. Además se sabe que el número de bolígrafos vendidos fue un 50 % mayor que el número de cuadernos. Plantea un sistema de ecuaciones para calcular el número de unidades vendidas de cada tipo de artículo. Expresa el sistema de ecuaciones en forma matricial. (2,5 pt.)

1. Resuelve las siguientes actividades de matrices:

a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$

Calcula los valores de x para los que se verifica la ecuación: $A^2 = 2 \cdot A$

b) Calcula los valores de m para que $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ m-1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$ sí tenga inversa.

c) Determina el rango de la matriz B en función de los valores del parámetro m .

$$\left. \begin{aligned} a) \quad A &= \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & x^2+4x \\ 0 & x^2+4x+4 \end{pmatrix} \\ 2 \cdot A &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2x \\ 0 & 2x+4 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

Iguálamos:

$$A^2 = 2 \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & x^2+4x \\ 0 & x^2+4x+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2x \\ 0 & 2x+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2+4x = 2x \\ x^2+4x+4 = 2x+4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2+2x = 0 \\ x^2+2x+4 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array} \right\} \quad \text{Solución: } \boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}}$$

$$b) \quad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ m-1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = -(m-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & m \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & m \\ 1 & m \end{vmatrix} = -m(m-1)$$

$$|B| = -m(m-1) + 3(2m-m) = -m^2 + m + 3m = -m^2 + 4m$$

$$|B| = 0 \Rightarrow -m^2 + 4m = 0 \Rightarrow m(-m+4) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = 0 \\ m = 4 \end{array} \right\}$$

Si $m = 4$ o $m = 0 \Rightarrow |B| = 0 \Rightarrow$ la matriz B no tiene inversa.

Si $m \neq 4$ y $m \neq 0 \Rightarrow |B| \neq 0 \Rightarrow$ la matriz B sí tiene inversa.

c) Rango de B .

$$\text{Si } m \neq 4 \text{ y } m \neq 0 \Rightarrow |B| \neq 0 \Rightarrow \text{Rg } B = 3$$

$$\text{Si } m = 4 \text{ o } m = 0 \Rightarrow |B| = 0 \Rightarrow \text{Rg } B < 3$$

Puedo encontrar un menor de orden 2 cuyo determinante es distinto de cero.

$$|B| = 0 \Rightarrow \text{Rg } B < 3. \text{ Como } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{Rg } B = 2}$$

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X - 2Y = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

llamamos $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Planteamos el sistema y lo resolvemos por reducción.

$$\begin{cases} X + Y = A \\ 2X - 2Y = B \end{cases} \cdot 2 \Rightarrow \begin{cases} 2X + 2Y = 2A \\ 2X - 2Y = B \end{cases} \quad + \Rightarrow 4X = 2A + B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{4} \cdot (2A + B) = \frac{1}{4} \cdot \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la otra variable también por reducción aunque se puede hacer por sustitución.

$$\begin{cases} X + Y = A \\ 2X - 2Y = B \end{cases} \cdot 2 \Rightarrow \begin{cases} 2X + 2Y = 2A \\ 2X - 2Y = B \end{cases} \quad - \Rightarrow 4Y = 2A - B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{4} \cdot (2A - B) = \frac{1}{4} \cdot \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Comprobación: $X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Q.E.D.}$

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula X en la ecuación matricial $X \cdot A - B = 2 \cdot X$

Nota: Calcula la inversa por el método de la matriz adjunta.

Ecuación matricial: $X \cdot A - B = 2X \Rightarrow$

$$X \cdot A - 2X = B \Rightarrow$$

$$X \cdot (A - 2I) = B \Rightarrow$$

$$X \cdot \underbrace{(A - 2I) \cdot (A - 2I)^{-1}}_I = B \cdot (A - 2I)^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{X = B \cdot (A - 2I)^{-1}}$$

Calculamos la inversa de $Z = A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$|Z| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0, \text{ luego tiene inversa.}$$

Para calcular la inversa: $Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} \cdot [\text{Adj}(Z)]^t$, La matriz adjunta:

$$\text{Adj}(Z) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

$$[\text{Adj}(Z)]^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Finalmente:

$$X = B \cdot (A - 2I)^{-1} = B \cdot Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

4. En una librería, se venden tres tipos de artículos: libros a 25 €, cuadernos a 10 € y bolígrafos a 2 €. Un colegio compró varias unidades de los tres artículos y pagó en total 460 €. En el pedido, por cada 2 libros, se vendieron 5 cuadernos. Además se sabe que el número de bolígrafos vendidos fue un 50 % mayor que el número de cuadernos. Plantea un sistema de ecuaciones para calcular el número de unidades vendidas de cada tipo de artículo. Expresa el sistema de ecuaciones en forma matricial. (2,5 pt.)

$$\begin{array}{l}
 \text{Libros a } 25 \text{ € } x \\
 \text{Cuadernos a } 10 \text{ € } y \\
 \text{Bolígrafos a } 2 \text{ € } z
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Libros a } 25 \text{ € } x \\ \text{Cuadernos a } 10 \text{ € } y \\ \text{Bolígrafos a } 2 \text{ € } z \end{array}} \right\} \text{Condiciones}
 \begin{cases}
 25x + 10y + 2z = 460 \text{ €} \\
 2 \text{ libros } \text{ --- } 5 \text{ cuadernos} \\
 x \text{ --- } y \Rightarrow 2 \cdot y = 5 \cdot x \\
 z = y + \frac{50 \cdot y}{100} = 1,5y \Rightarrow z = \frac{3}{2}y \Rightarrow 2z = 3y
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 25x + 10y + 2z = 460 & [1] \\
 5 \cdot x - 2 \cdot y = 0 & [2] \\
 3y - 2z = 0 & [3]
 \end{cases}
 \quad \left(\begin{pmatrix} 25 & 10 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 460 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ Forma matricial}$$

$$\text{Sustitución} \Rightarrow \begin{array}{l} [3] \rightarrow [1] \\ 2z = 3y \\ 25x + 10y + 3y = 460 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 25x + 13y = 460 \\ 5 \cdot x - 2 \cdot y = 0 \end{array} \quad \cdot 5 \Rightarrow \begin{array}{l} 25x + 13y = 460 \\ 25x - 10y = 0 \end{array} \quad \text{Restamos} \Rightarrow 23y = 460 \Rightarrow y = 20$$

$$\begin{aligned}
 2z = 3y &\Rightarrow z = \frac{3y}{2} = \frac{3 \cdot 20}{2} = 30 \Rightarrow z = 30 \\
 2 \cdot y = 5 \cdot x &\Rightarrow x = \frac{2 \cdot y}{5} = \frac{2 \cdot 20}{5} = 8 \Rightarrow x = 8
 \end{aligned}$$

Solución: $x = 8$ libros
 $y = 20$ cuadernos
 $z = 30$ bolígrafos