

MATRICES Y DETERMINANTES

1. Resuelve las siguientes actividades de matrices:

a) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula los valores de a e b en la matriz

B para que conmuten, es decir, que se verifique la ecuación: $A \cdot B = B \cdot A$ (1 pt.)

b) Calcula los valores de k para que $C = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ -1 & 1 & k \\ 0 & -1 & k \end{pmatrix}$ no tenga inversa. (1 pt.)

c) Para $k = 0$ calcula el rango de la matriz C . (0,5 pt.)

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ -X + 3Y = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de $(A - 3 \cdot I)$ (método de determinantes) (1,25 pt.)

b) Calcula X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = 3 \cdot X$ (1,25 pt.)

4. Una farmacia ha vendido en una semana 450 medicamentos de tres marcas con los siguientes precios: los de la marca A a 20 €, B a 14 € y C a 10 €. La recaudación total asciende a 5700 €. Se sabe que por cada medicamento de la marca A , se han vendido 4 de la marca C . Calcula el número de medicamentos de cada marca que se han vendido en esa semana. (3 pt.)

1. Resuelve las siguientes actividades de matrices:

a) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula los valores de a e b en la matriz

B para que conmuten, es decir, que se verifique la ecuación: $A \cdot B = B \cdot A$ (1 pt.)

$$\left. \begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 5a & 5b \end{pmatrix} \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5b & 2a \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 10 = 5b \Rightarrow b = 2 \\ 2 = 2a \Rightarrow a = 1 \\ 5a = 5 \Rightarrow a = 1 \end{array} \quad \text{Solución: } \boxed{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \end{array}}$$

b) Calcula los valores de k para que $C = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ -1 & 1 & k \\ 0 & -1 & k \end{pmatrix}$ no tenga inversa.

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ -1 & 1 & k \\ 0 & -1 & k \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & k \\ -1 & k \end{vmatrix} - k \cdot \begin{vmatrix} -1 & k \\ 0 & k \end{vmatrix} = 2k + k^2 = k(2+k) = 0 \quad \begin{array}{l} k=0 \\ k=-2 \end{array}$$

Desarrollo de Laplace

Si $k=0$ ó $k=-2 \Rightarrow |C| = 0 \Rightarrow C$ no tiene inversa.

c) Para $k = 0$ calcula el rango de la matriz C .

$$\text{Si } k=0 \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ El menor } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{Rango } C = 2}$$

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ -X + 3Y = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

llamamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Planteamos el sistema y lo resolvemos por reducción.

$$\begin{cases} 2X + Y = A \\ -X + 3Y = B \end{cases} \cdot 2 \Rightarrow \begin{cases} 2X + Y = A \\ -2X + 6Y = 2B \end{cases} + \Rightarrow 7Y = A + 2B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{7} \cdot (A + 2B) = \frac{1}{7} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Y = \begin{pmatrix} 9/7 & 8/7 & 6/7 \\ 0 & 1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la otra variable también por reducción aunque se puede hacer por sustitución.

$$\begin{cases} 2X + Y = A \\ -X + 3Y = B \end{cases} \cdot 3 \Rightarrow \begin{cases} 6X + 3Y = 3A \\ -X + 3Y = B \end{cases} - \Rightarrow 7X = 3A - B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{7} \cdot (3A - B) = \frac{1}{7} \cdot \left[3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/7 & 3/7 & 4/7 \\ -1 & 3/7 & -1/7 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X = \begin{pmatrix} -1/7 & 3/7 & 4/7 \\ -1 & 3/7 & -1/7 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 9/7 & 8/7 & 6/7 \\ 0 & 1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de $(A - 3 \cdot I)$ (método de determinantes)

b) Calcula X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = 3 \cdot X$

Calculamos la inversa de $Z = A - 3I = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$|Z| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0, \text{ luego tiene inversa.}$$

Para calcular la inversa: $Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} \cdot [\text{Adj}(Z)]^t$, La matriz adjunta:

$$\text{Adj}(Z) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Adj}(Z)]^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow Z^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

Ecuación matricial: $A \cdot X - B = 3X \Rightarrow$

$$\begin{aligned} A \cdot X - 3X &= B \Rightarrow \\ (A - 3I) \cdot X &= B \Rightarrow \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} &\underbrace{(A - 3I)^{-1} \cdot (A - 3I)}_I \cdot X = (A - 3I)^{-1} \cdot B \\ &\Rightarrow \boxed{X = (A - 3I)^{-1} \cdot B} \end{aligned} \right. \text{ Finalmente:}$$

$$X = (A - 3I)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{X = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \text{ Solución}$$

4. Una farmacia ha vendido en una semana 450 medicamentos de tres marcas con los siguientes precios: los de la marca A a 20 €, B a 14 € y C a 10 €. La recaudación total asciende a 5700 €. Se sabe que por cada medicamento de la marca A, se han vendido 4 de la marca C. Calcula el número de medicamentos de cada marca que se han vendido en esa semana. (3 pt.)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Marca A} - x \text{ a } 20 \text{ €} \\ \text{Marca B} - y \text{ a } 14 \text{ €} \\ \text{Marca C} - z \text{ a } 10 \text{ €} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Condiciones} \\ \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 450 \\ 20x + 14y + 10z = 5700 \div 2 \\ \begin{array}{l} 1 \text{ marca A} \quad \text{---} \quad 4 \text{ marca C} \\ x \quad \quad \quad \quad \quad z \end{array} \Rightarrow 1 \cdot z = 4 \cdot x \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 450 \quad [1] \\ 10x + 7y + 5z = 2850 \quad [2] \\ z = 4x \quad [3] \end{array} \right\}$$

Sustitución

$$[3] \rightarrow [1]$$

$$[3] \rightarrow [2]$$

$\Rightarrow$

$$x + y + 4x = 450$$

$$10x + 7y + 5 \cdot 4x = 2850$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$$5x + y = 450 \quad \cdot 6$$

$$30x + 7y = 2850$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 30x + 6y = 2700 \\ 30x + 7y = 2850 \end{array} \right. \quad \text{Restamos}$$

$$y = 150$$

$$5x + y = 450 \Rightarrow x = \frac{450 - y}{5}$$

$$x = \frac{450 - 150}{5} = 60$$

$$z = 4x = 4 \cdot 60 = 240$$

Solución: $x = 60$ medicamentos de la marca A
 $y = 150$ medicamentos de la marca B
 $z = 240$ medicamentos de la marca C