

MATRICES Y DETERMINANTES

1. Resuelve las siguientes actividades de matrices:

a) Calcula los valores de x e y en la matriz $M = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ para que se verifique la ecuación:

$$M \cdot M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ siendo } M^t \text{ la matriz traspuesta de } M. \quad (1,5 \text{ pt.})$$

b) Calcula los valores de k para que $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{pmatrix}$ no tenga inversa. (1 pt.)

c) Para $k = 1$ calcula el rango de la matriz A . (0,5 pt.)

2. Se sabe que $|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$:

a) Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 2x-1 & 2y-1 & 2z-1 \end{vmatrix}$ (1 pt.)

b) Calcula con propiedades (sin desarrollar) el determinante $|2 \cdot A^2|$ (0,5 pt.)

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de $(A - I)$ (método de determinantes) (1,75 pt.)

b) Calcula X en la ecuación matricial $X \cdot A - B^t = X$ (1,25 pt.)

4. El Palacio de la Ópera de A Coruña ha vendido 425 entradas para un concierto. Son de 3 tipos: Zona A a 30 €, Zona B a 20 € y Zona C a 15 €. La recaudación total asciende a 7750 €. Se sabe que por cada entrada de la zona A, se han vendido 5 de la zona C. Calcula el número de entradas de cada tipo que se han vendido para este concierto. (2,5 pt.)

1. Resuelve las siguientes actividades de matrices:

a) Calcula los valores de x e y en la matriz $M = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ para que se verifique la ecuación:

$$M \cdot M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ siendo } M^t \text{ la matriz traspuesta de } M. \quad (1,5 \text{ pt.})$$

$$M \cdot M^t = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 1 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$xy = 0 \text{ siendo } x = 0 \Rightarrow y \in \mathbb{R}$$

$$y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

Solución:

$$x = 0, y = \pm 1$$

b) Calcula los valores de k para que $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{pmatrix}$ no tenga inversa. Comprobamos cuándo $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} k & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & k \\ -k & 1 \end{vmatrix} = -4k + (3 + k^2) = k^2 - 4k + 3 = 0$$

Desarrollo de Laplace

$$k = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} < \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}, \quad 3 \cdot 1 = \frac{3}{1} \checkmark$$

Si $k = 3$ ó $k = 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow A$ no tiene inversa.

c) Para $k = 1$ calcula el rango de la matriz A .

$$\text{Si } k = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ El menor } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A = 2$$

2. Se sabe que $|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$:

a) Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 2x-1 & 2y-1 & 2z-1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 2x-1 & 2y-1 & 2z-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 2x-1 & 2y-1 & 2z-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$\det(F_1, F_2, k \cdot F_3) = k \cdot \det(F_1, F_2, F_3)$ $F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot 5 = -\frac{5}{2}$$

$\det(F_1, F_2, k \cdot F_3) = k \cdot \det(F_1, F_2, F_3)$ enunciado

Solución: $-\frac{5}{2}$

b) Calcula con propiedades (sin desarrollar) el determinante $|2 \cdot A^2|$

Propiedad: $|a \cdot A| = a^n |A|$ siendo n el orden de la matriz A

$$|2 \cdot A^2| = 2^3 \cdot |A| \cdot |A| = 2^3 \cdot 5 \cdot 5 = 200$$

Solución: 200

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de $(A - I)$ (método de determinantes)

b) Calcula X en la ecuación matricial $X \cdot A - B^t = X$

Calculamos la inversa de $Z = A - I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$|Z| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) = -8 \neq 0$, luego tiene inversa.

$F_3 \rightarrow F_3 - F_2$

Para calcular la inversa: $Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} \cdot [\text{Adj}(Z)]^t$, La matriz adjunta:

$\text{Adj}(Z) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 4 & -4 & -4 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Solución

$[\text{Adj}(Z)]^t = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 6 & -4 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Z^{-1} = \frac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 6 & -4 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ -3/4 & 1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Ecuación matricial: $X \cdot A - B^t = X \Rightarrow X \cdot A - X = B^t \Rightarrow X \cdot (A - I) = B^t \Rightarrow X \cdot \underbrace{(A - I) \cdot (A - I)^{-1}}_I = B^t \cdot (A - I)^{-1}$

$\Rightarrow X = B^t \cdot (A - I)^{-1}$ Finalmente:

$X = B^t \cdot (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ -3/4 & 1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ -5/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ Solución

4. El Palacio de la Ópera de A Coruña ha vendido 425 entradas para un concierto. Son de 3 tipos: Zona A a 30 €, Zona B a 20 € y Zona C a 15 €. La recaudación total asciende a 7750 €. Se sabe que por cada entrada de la zona A, se han vendido 5 de la zona C. Calcula el número de entradas de cada tipo que se han vendido para este concierto. (2,5 pt.)

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{Entradas zona A} - x \text{ a } 30 \text{ €} \\
 \text{Entradas zona B} - y \text{ a } 20 \text{ €} \\
 \text{Entradas zona C} - z \text{ a } 15 \text{ €}
 \end{array} \right\} \text{Condiciones} \left\{ \begin{array}{l}
 x + y + z = 425 \\
 30x + 20y + 15z = 7.750 \\
 \begin{array}{ccc}
 1 \text{ tipo A} & \text{---} & 5 \text{ tipo C} \\
 x & \text{---} & z
 \end{array} \Rightarrow 1 \cdot z = 5 \cdot x
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 x + y + z = 425 \quad [1] \\
 30x + 20y + 15z = 7.750 \quad [2] \\
 z = 5x \quad [3]
 \end{array} \right\} \text{Sustitución} \Rightarrow \begin{array}{l}
 [3] \rightarrow [1] \\
 [3] \rightarrow [2]
 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l}
 24x + 4y = 1700 \\
 21x + 4y = 1550
 \end{array} \right. \text{Restamos}$$

$$3x = 150 \Rightarrow x = 50$$

$$z = 5x = 5 \cdot 50 = 250$$

$$y = 425 - x - z = 425 - 50 - 250 = 125$$

$$\begin{array}{l}
 \Rightarrow \left| \begin{array}{l}
 x + y + 5x = 425 \\
 30x + 20y + 15 \cdot 5x = 7.750
 \end{array} \right. \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left| \begin{array}{l}
 6x + y = 425 \cdot 4 \\
 105x + 20y = 7.750 \div 5
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Solución:	$x = 50$	Entradas zona A
	$y = 125$	Entradas zona B
	$z = 250$	Entradas zona C