

MATRICES Y DETERMINANTES

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, calcula los valores de α y β para que se verifiquen $|C \cdot A| = 3$ y $|B + C| = 2$. (2,5 pt.)

2. Sabiendo que el determinante $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$, calcula usando propiedades:

a) Los determinantes $|2 \cdot A^{-1}|$ y $|2 \cdot A^2|$. (1 pt.)

b) El valor del determinante $\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix}$. (1 pt.)

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Encuentra las condiciones que deben cumplir a , b y c para que las matrices A y B conmuten, es decir, para que se verifique: $A \cdot B = B \cdot A$. (1 pt.)

4. Calcula para qué valores de x la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & x & x \\ 3 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ es regular. (1,5 pt.)

5. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2\lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Define el rango de una matriz. Calcula razonadamente el rango de la matriz A según los valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$. (1,5 pt.)

b) Para $\lambda = 1$ calcula razonadamente la matriz X que verifica que $X \cdot A = B - X$. (1,5 pt.)

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, calcula los valores de α y β para que se verifiquen $|C \cdot A| = 3$ y $|B + C| = 2$. (2,5 pt.)

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ \alpha+2\beta & 2\alpha+3\beta \end{pmatrix}$$

$$|C \cdot A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ \alpha+2\beta & 2\alpha+3\beta \end{vmatrix} = 6\alpha + 9\beta - 5\alpha - 10\beta = \alpha - \beta = 3 \quad \text{[1]} \quad \text{enunciado}$$

$$B + C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1+\alpha & 1+\beta \end{pmatrix}$$

$$|B + C| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1+\alpha & 1+\beta \end{vmatrix} = 3 + 3\beta - 1 - \alpha = 2 + 3\beta - \alpha = 2 \Rightarrow 3\beta - \alpha = 0 \quad \text{[2]} \quad \text{enunciado}$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones [1] y [2]

$$\left. \begin{array}{l} \alpha - \beta = 3 \\ 3\beta - \alpha = 0 \end{array} \right\} \text{sumando} \Rightarrow 2\beta = 3 \Rightarrow \beta = \frac{3}{2}$$

$$\text{Despejando de la 1ª ecuación: } \alpha = 3 + \beta = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

Solución:

$$\alpha = \frac{9}{2}, \beta = \frac{3}{2}$$

2. Sabiendo que el determinante $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$, calcula usando propiedades:

- a) Los determinantes $|2 \cdot A^{-1}|$ y $|2 \cdot A^2|$. (1 pt.)

a1) Usando propiedades: $|2 \cdot A^{-1}| = 2^3 \cdot |A^{-1}|$

dado que $|a \cdot A| = a^n |A|$ siendo n el orden de la matriz A

$$\text{Además sabemos que } A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$\text{Finalmente } |2 \cdot A^{-1}| = 2^3 \cdot |A^{-1}| = 2^3 \cdot \frac{1}{|A|} = 2^3 \cdot \frac{1}{-2} = -4$$

$$\text{a2) } |2 \cdot A^2| = 2^3 \cdot |A| \cdot |A| = 2^3 \cdot (-2) \cdot (-2) = 32$$

Solución: $-4, 32$

b) El valor del determinante $\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} i & g & h \\ f+c & d+a & e+b \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} c & a & b \\ f+c & d+a & e+b \\ i & g & h \end{vmatrix} =$$

$\det(F_1, F_2, K \cdot F_3) = K \cdot \det(F_1, F_2, F_3)$ $\det(F_1, F_2, F_3) = -\det(F_3, F_2, F_1)$ $C_1 \leftrightarrow C_3$
 $C_1 \leftrightarrow C_2$
 (2 cambios)

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+a & e+b & f+c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) = -6$$

$F_2 \rightarrow F_2 - F_1$ enunciado Solución: -6

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Encuentra las condiciones que deben cumplir a , b y c para que las matrices A y B conmuten, es decir, para que se verifique: $A \cdot B = B \cdot A$. (1 pt.)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 5c+2c & 2c+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualamos ambas matrices elemento a elemento.

$$\begin{array}{l|l} 5a+2c = 5a+2b \Rightarrow c = b & 5b+2c = 2a+5b \Rightarrow c = a \\ 2a+5c = 5c+2c \Rightarrow a = c & 2b+5c = 2c+5c \Rightarrow b = c \end{array}$$

Solución:

$$a = b = c ; a, b, c \in \mathbb{R}$$

;

$$B = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R}$$

4. Calcula para qué valores de x la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & x & x \\ 3 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ es regular.

Una matriz es regular si tiene inversa, es decir, si su determinante no es nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & x & x \\ 3 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_4 \rightarrow F_4 + F_3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & x & x \\ 3 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \rightarrow C_1 - 2C_3} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \\ 1-2x & 1 & x & x \\ -3 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 \rightarrow C_3 - C_4} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 1-2x & 1 & 0 & x \\ -3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Desarrollo de Laplace}}$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1-2x & 1 & x \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1-2x & 1 & x \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 - F_3} = -1 \begin{vmatrix} 1 & x \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-3) \begin{vmatrix} 1-2x & x \\ -3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= - (3 + 2x) + 3 (3 - 6x + 3x) = -3 - 2x + 9 - 9x = -11x + 6$$

$$-11x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{11}$$

Solución: Para que la matriz sea regular, $x \neq \frac{6}{11}$

5. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2\lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Define el rango de una matriz. Calcula razonadamente el rango de la matriz A según los valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$. (1,5 pt.)

b) Para $\lambda = 1$ calcula razonadamente la matriz X que verifica que $X \cdot A = B - X$. (1,5 pt.)

a) El rango es la dimensión del mayor menor no nulo de la matriz. También se puede definir como el número de filas linealmente independientes de la matriz.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2\lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda \\ -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \cdot (-\lambda^2 + 2\lambda^2) = (\lambda - 1) \cdot \lambda^2 = 0 \quad \begin{matrix} \lambda = 1 \\ \lambda = 0 \end{matrix}$$

Desarrollo de Laplace

si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A = 3$

si $\lambda = 0$ ó $\lambda = 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{Rango } A < 3$

si $\lambda = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } A = 1$

si $\lambda = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A = 2$

si $\lambda = 0 \Rightarrow \text{Rango } A = 1$, si $\lambda = 1 \Rightarrow \text{Rango } A = 2$

Continúa en la siguiente página →

b) Para $\lambda = 1$ calcula razonadamente la matriz X que verifica que $X \cdot A = B - X$. (1,5 pt.)

$$\text{si } \lambda = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Ecuación matricial: } X \cdot A &= B - X \Rightarrow & X \cdot \underbrace{(A + I)}_I \cdot (A + I)^{-1} &= B \cdot (A + I)^{-1} \\ X \cdot A + X &= B \Rightarrow & \Rightarrow X &= B \cdot (A + I)^{-1} \\ X \cdot (A + I) &= B \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\text{Calculamos la inversa de } Z = A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|Z| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \text{ luego tiene inversa.}$$

Para calcular la inversa: $Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} \cdot [\text{Adj}(Z)]^t$, La matriz adjunta:

$$\text{Adj}(Z) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Adj}(Z)]^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Z^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$X = B \cdot (A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$