

MATRICES Y DETERMINANTES

1. Resuelve las siguientes actividades de matrices:

a) Determina los valores de x e y que verifican la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1,5 \text{ pt.})$$

b) Calcula los valores de λ para que $A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ \lambda & -3 & 2 \end{pmatrix}$ no tenga inversa. (1 pt.)

c) Para $\lambda = -2$ calcula el rango de la matriz A . (0,25 pt.)

2. Resuelve las siguientes actividades de potencias y determinantes:

a) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula la potencia A^{200} (0,75 pt.)

b) Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$

Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ \frac{g}{3} & \frac{h}{3} & \frac{i}{3} \\ 2d & 2e & 2f \end{vmatrix}$ (1 pt.)

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de $A + 2 \cdot I$ (método de determinantes) (1,5 pt.)

b) Calcula X en la ecuación matricial $X \cdot A - 2 \cdot B^t = -2 \cdot X$ (1,5 pt.)

4. Una persona decide invertir un total de 40.000 €, repartidos en tres entidades bancarias distintas: A , B y C . Esta persona decide que por cada dos euros que invierte en la entidad A va a invertir un euro en la entidad C . Además, se sabe que la entidad A le ha asegurado una rentabilidad del 2 %, la entidad B , una rentabilidad del 5 %, y la entidad C , una rentabilidad el 3 % .
Calcula las cantidades invertidas en cada entidad bancaria si se sabe que los beneficios totales han sido de 1.000 €.

(2,5 pt.)

1. Resuelve las siguientes actividades de matrices:

a) Determina los valores de x e y que verifican la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3+2x \\ 3y-2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \begin{pmatrix} x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3+2x \\ 3y-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x-y &= 3+2x \\ 3x+2y &= 3y-2 \end{aligned} \\ \Rightarrow \begin{aligned} x+y &= -3 \\ 3x-y &= -2 \end{aligned} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = -3 - x = -3 + \frac{5}{4} = -\frac{7}{4}$$

Solución: $x = -\frac{5}{4}$, $y = -\frac{7}{4}$

b) Calcula los valores de λ para que $A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ \lambda & -3 & 2 \end{pmatrix}$ no tenga inversa.

c) Para $\lambda = -2$ calcula el rango de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ \lambda & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda+3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ \lambda & -3 & 2 \end{vmatrix} = -(\lambda+3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ \lambda & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ \lambda & -3 \end{vmatrix}$$

$$F_1 = F_1 - F_3$$

$$|A| = -(\lambda+3) \cdot (4-2\lambda) - (-6+\lambda) = -4\lambda + 2\lambda^2 - 12 + 6\lambda + 6 - \lambda \Rightarrow$$

$$|A| = 2\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \text{ para que no tenga inversa.}$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 7}{4} < \begin{matrix} -2 \\ \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{matrix}$$

Comprobamos las raíces:
 $-2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{-6}{2}$ ✓

Si $\lambda = -2$ o $\lambda = \frac{3}{2}$, la matriz A no tiene inversa.

c) Si $\lambda = -2$ $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ puedo encontrar un menor de orden 2 cuyo determinante es distinto de cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow R_g A < 3. \text{ Como } \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R_g A = 2$$

2. Resuelve las siguientes actividades de potencias y determinantes:

a) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula la potencia A^{200}

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 \cdot n & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 600 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$

Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ \frac{g}{3} & \frac{h}{3} & \frac{i}{3} \\ 2d & 2e & 2f \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ \frac{g}{3} & \frac{h}{3} & \frac{i}{3} \\ 2d & 2e & 2f \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = -\frac{2}{3} \cdot \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$|F_1, K \cdot F_2, F_3| = K \cdot |F_1, F_2, F_3|$$

$$|F_1, F_2, F_3| = -|F_1, F_3, F_2|$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\frac{2}{3} \cdot 3 = -2$$

$$|F_1| = |F_1 - F_2|$$

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de $A + 2 \cdot I$ (método de determinantes)

b) Calcula X en la ecuación matricial $X \cdot A - 2 \cdot B^t = -2 \cdot X$

a) Calcula $(A + 2I)^{-1}$, $A + 2I = C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad |C| \neq 0, \text{ luego tiene inversa.}$$

Para calcular la inversa: $C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot [\text{Adj}(C)]^t$, La matriz adjunta:

$$\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Adj}(C)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{b) } X \cdot A - 2B^t = -2X & X \cdot (A + 2I) \cdot (A + 2I)^{-1} = 2B^t \cdot (A + 2I)^{-1} \\ X \cdot A + 2X = 2B^t & \underbrace{X \cdot (A + 2I)}_I \Rightarrow X = 2B^t \cdot (A + 2I)^{-1} \\ X \cdot (A + 2I) = 2B^t \Rightarrow & \end{array}$$

$$X = 2B^t \cdot (A + 2I)^{-1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Una persona decide invertir un total de 40.000 €, repartidos en tres entidades bancarias distintas: A, B y C. Esta persona decide que por cada dos euros que invierte en la entidad A va a invertir un euro en la entidad C. Además, se sabe que la entidad A le ha asegurado una rentabilidad del 2 %, la entidad B, una rentabilidad del 5 %, y la entidad C, una rentabilidad el 3 % .
Calcula las cantidades invertidas en cada entidad bancaria si se sabe que los beneficios totales han sido de 1.000 €.

(2,5 pt.)

Datos :

Inversión en A - x - 2 %
Inversión en B - y - 5 %
Inversión en C - z - 3 %

Condiciones :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 40.000 \\ 2 \text{€ en A} \quad \frac{\quad}{x} \quad \frac{1 \text{€ en B}}{z} \Rightarrow x = 2z \\ \frac{2x}{100} + \frac{5y}{100} + \frac{3z}{100} = 1.000 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 40.000 \quad [1] \\ x = 2z \quad [2] \\ 2x + 5y + 3z = 100.000 \quad [3] \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [2] \rightarrow [1] \quad 2z + y + z = 40.000 \\ y + 3z = 40.000 \\ [2] \rightarrow [3] \quad 4z + 5y + 3z = 100.000 \\ 5y + 7z = 100.000 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y + 3z = 40.000 \\ 5y + 7z = 100.000 \end{array} \right\} \cdot 5 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5y + 15z = 200.000 \\ 5y + 7z = 100.000 \end{array} \right\} \text{ restamos}$$

$$8z = 100.000 \Rightarrow z = \frac{100.000}{8} = 12.500$$

$$x = 2z = 2 \cdot 12.500 = 25.000$$

$$y = 40.000 - x - z = 2.500$$

Solución
Invertimos: $x = 25.000 \text{ € en A}$
 $y = 2.500 \text{ € en B}$
 $z = 12.500 \text{ € en C}$