

MATRICES Y DETERMINANTES

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de x que verifican $B + C = A^{-1}$ (2 pt.)

b) Calcula los valores de a para que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & a \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ no tenga inversa.

(1 pt.)

c) Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 6$. Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ 3p & 3q & 3r \end{vmatrix}$ (1 pt.)

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -10 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz $(A - I)^{-1}$ con determinantes (No uses Gauss-Jordan). (2 pt.)

b) Despeja y calcula X en la ecuación matricial: $A \cdot X = B^t + X$ (1 pt.)

3. Un hospital decide adquirir 5000 vacunas de tres tipos A , B y C . Por cada 3 vacunas del tipo A , se compran 5 del tipo B . Además, se decide que la cantidad de vacunas del tipo C sea la mitad que el número de vacunas A y B juntas. Calcula el número de vacunas de cada tipo que ha adquirido el hospital.

(3 pt.)

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de x que verifican $B + C = A^{-1}$

(2 pt.)

$$B + C = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & x-1 \\ x-1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ Calculamos su inversa. } |A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1 \neq 0, \text{ luego tiene inversa.}$$

$$\text{La matriz adjunta: } \left. \begin{matrix} A_{11} = 2, A_{12} = -3 \\ A_{21} = -3, A_{22} = 5 \end{matrix} \right\} \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{como es simétrica } \text{Adj}(A) = [\text{Adj}(A)]^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\text{Adj}(A)]^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & x-1 \\ x-1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2 = 2 \\ 5 = 5 \\ x-1 = -3 \Rightarrow x = -2 \end{matrix}$$

b) Calcula los valores de a para que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & a \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ no tenga inversa.

(1 pt.)

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & a \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & a \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= a(-a) - (-2a) = -a^2 + 2a = a(2-a) = 0 \text{ para que no tenga inversa.}$$

$$a(2-a) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ o bien } a = 2$$

c) Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 6$. Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ 3p & 3q & 3r \end{vmatrix}$ (1 pt.)

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ 3p & 3q & 3r \end{vmatrix} = \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{=} -3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}}_6 = -3 \cdot 6 = -18$$

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -10 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz $(A - I)^{-1}$ con determinantes (No uses Gauss-Jordan). (2 pt.)

b) Despeja y calcula X en la ecuación matricial: $A \cdot X = B^t + X$ (1 pt.)

a) Calcula $(A - I)^{-1}$, $A - I = C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$|C| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3, |C| \neq 0, \text{ luego tiene inversa.}$$

Para calcular la inversa: $C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot [\text{Adj}(C)]^t$, La matriz adjunta:

$$\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Adj}(C)]^t = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A \cdot X = B^t + X$

$$A \cdot X - X = B^t$$

$$(A - I) \cdot X = B^t \Rightarrow$$

$$\underbrace{(A - I)^{-1} \cdot (A - I)}_I \cdot X = (A - I)^{-1} \cdot B^t \Rightarrow X = (A - I)^{-1} \cdot B^t$$

$$X = (A - I)^{-1} \cdot B^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 8 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

3. Un hospital decide adquirir 5000 vacunas de tres tipos A, B y C. Por cada 3 vacunas del tipo A, se compran 5 del tipo B. Además, se decide que la cantidad de vacunas del tipo C sea la mitad que el número de vacunas A y B juntas. Calcula el número de vacunas de cada tipo que ha adquirido el hospital.

(3 pt.)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vacunas tipo A} - x \\ \text{Vacunas tipo B} - y \\ \text{Vacunas tipo C} - z \end{array} \right\} \text{Condiciones} \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 5.000 \\ 3 \text{ tipo A} \text{ — } 5 \text{ tipo B} \\ x \text{ — } y \Rightarrow 3y = 5x \\ z = \frac{x+y}{2} \Rightarrow 2z = x+y \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 5.000 \quad [1] \\ 5x - 3y = 0 \quad [2] \\ x + y - 2z = 0 \quad [3] \end{array} \right\} [1] - [3] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3z = 5.000 \\ z = \frac{5.000}{3} = 1666,67... \approx 1667 \\ \text{redondeamos a enteros} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 3z = 5.000 \\ x + y = 2z = 2 \cdot \frac{5.000}{3} \\ 3x + 3y = 10.000 \quad [3] \\ 5x - 3y = 0 \quad [2] \end{array} \left\} [3] + [2] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 8x = 10.000 \\ x = \frac{10.000}{8} = 1250 \end{array} \right.$$

$$3y = 5x \Rightarrow y = \frac{5}{3} \cdot x = \frac{5}{3} \cdot 1250 = 2083,33... \approx 2083 \text{ redondeamos a enteros}$$

Solución: $x = 1250$ Vacunas tipo A
 $y = 2083$ Vacunas tipo B
 $z = 1667$ Vacunas tipo C