

MATRICES Y DETERMINANTES

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de x que verifican $A - I = B^{-1}$ (1,5 pt.)

b) Calcula los valores de a para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$ no tenga inversa. (1 pt.)

c) Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10$. Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2b & a & c/5 \\ 2e & d & f/5 \\ 2h & g & i/5 \end{vmatrix}$ (0,5 pt.)

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz $(A - 2I)^{-1}$. (1 pt.)

b) Despeja y calcula X en la ecuación matricial $X \cdot A + B^t = 2 \cdot X$ (1 pt.)

3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

4. Tres personas A , B y C , le van a hacer un regalo a un amigo. El regalo les cuesta 75,73 €. Como no todos disponen del mismo dinero, deciden pagar de la siguiente manera: A paga el triple de lo que pagan B y C juntos, y por cada 0,12 € que paga B , la persona C paga 0,18 €.
- Plantea un sistema que permita determinar cuánto paga cada persona y resuelve el problema. Utiliza una precisión de céntimos (2 decimales) para los cálculos. (3 pt.)

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de x que verifican $A - I = B^{-1}$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculamos su inversa. $|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, luego tiene inversa.

La matriz adjunta: $\left. \begin{matrix} B_{11} = 1, B_{12} = -1 \\ B_{21} = -1, B_{22} = 0 \end{matrix} \right\} \text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

como es simétrica $\text{Adj}(B) = [\text{Adj}(B)]^t$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot [\text{Adj}(B)]^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

$$A - I = B^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = -1 \Rightarrow x = 0 \\ 1 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

b) Calcula los valores de a para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$ no tenga inversa.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2a & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} =$$

$$= 2(1+a) - (2a+2) - a(2a^2-2) =$$

$$= \cancel{2} + \cancel{2a} - \cancel{2a} - \cancel{2} - 2a^3 + 2a = -2a^3 + 2a = 0 \text{ para que no tenga inversa.}$$

$$-2a^3 + 2a = 0 \Rightarrow -2a(a^2-1) = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$a^2-1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

Si $a = 0$ o $a = \pm 1$, la matriz no tiene inversa.

c) Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10$. Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2b & a & c/5 \\ 2e & d & f/5 \\ 2h & g & i/5 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2b & a & c/5 \\ 2e & d & f/5 \\ 2h & g & i/5 \end{vmatrix} = \frac{2}{5} \cdot \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} = -\frac{2}{5} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\frac{2}{5} \cdot 10 = -4$$

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz $(A - 2I)^{-1}$.

b) Despeja y calcula X en la ecuación matricial $X \cdot A + B^t = 2 \cdot X$

a) Calcula $(A - 2I)^{-1}$, $A - 2I = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$|C| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$ (es inmediata porque el triángulo inferior es nulo; multiplico la diagonal).
 $|A - 2I| \neq 0$, luego tiene inversa.

Para calcular la inversa: $C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot [\text{Adj}(C)]^t$, La matriz adjunta:

$\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$[\text{Adj}(C)]^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $X \cdot A + B^t = 2 \cdot X$
 $X \cdot A - 2 \cdot X = -B^t$
 $X \cdot (A - 2 \cdot I) = -B^t$ $\underbrace{X \cdot (A - 2 \cdot I) \cdot (A - 2 \cdot I)^{-1}}_I = -B^t \cdot (A - 2 \cdot I)^{-1}$
 $X = -B^t \cdot (A - 2 \cdot I)^{-1}$

$X = -B^t \cdot (A - 2 \cdot I)^{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} = A \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} = B \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2X + 3Y = A \\ X - 2Y = B \end{array} \right\} \cdot 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} 7Y = A - 2B \\ Y = \frac{1}{7} \cdot (A - 2B) \end{array} \right.$$

$$Y = \frac{1}{7} \cdot (A - 2B) = \frac{1}{7} \cdot \left[\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ 21 & -7 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = B + 2Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Tres personas A, B y C, le van a hacer un regalo a un amigo. El regalo les cuesta 75,73 €. Como no todos disponen del mismo dinero, deciden pagar de la siguiente manera: A paga el triple de lo que pagan B y C juntos, y por cada 0,12 € que paga B, la persona C paga 0,18 €. Plantea un sistema que permita determinar cuánto paga cada persona y resuelve el problema. Utiliza una precisión de céntimos (2 decimales) para los cálculos. (3 pt.)

Amigos A(x), B(y), C(z)

$$x + y + z = 75,73 \text{ €}$$

$$x = 3 \cdot (y + z)$$

$$\left. \begin{array}{l} y \text{ — } 0,12 \text{ €} \\ z \text{ — } 0,18 \text{ €} \end{array} \right\} \frac{y}{z} = \frac{0,12}{0,18} = \frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 75,73 \\ x = 3 \cdot (y + z) \\ \frac{y}{z} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3y = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Sustitución} \quad y = \frac{2}{3} z$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 75,73 \\ x - 3y - 3z = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Gauss}$$

Sustitución

$$3 \cdot (y + z) + y + z = 75,73$$

$$4 \cdot (y + z) = 75,73, \text{ como } y = \frac{2}{3} z$$

$$4 \cdot \left(\frac{2}{3} z + z \right) = 75,73$$

$$4 \cdot \frac{5}{3} z = 75,73$$

$$z = \frac{3}{5 \cdot 4} 75,73 \simeq 11,36 \text{ €}$$

$$y = \frac{2}{3} z = \frac{2}{3} \cdot 11,36 \text{ €} \simeq 7,57 \text{ €}$$

$$x = 75,73 - y - z$$

$$x = 75,73 - 7,57 - 11,36 = 56,8 \text{ €}$$

El amigo A paga 56,8 € ; El amigo B paga 7,57 € ; El amigo C paga 11,36 € .