

MATRICES Y DETERMINANTES

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & -c \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de a , b y c que verifican $B - C = A \cdot B$ (0,75 pt.)

b) Calcula el valor de a para que la matriz $\begin{pmatrix} a & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4a \end{pmatrix}$ no tenga inversa. (0,75 pt.)

c) Se sabe que $\begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$.

Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ m+1 & n+2 & p+3 \end{vmatrix}$ (0,5 pt.)

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de A en función del parámetro a . (0,5 pt.)

b) Para $a = 2$ calcula la matriz inversa de A y la matriz inversa de B . (1,5 pt.)

c) Despeja X de la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B = C$ (0,5 pt.)

d) Calcula la matriz X . (0,5 pt.)

3. Las ventas de tres productos $P1$, $P2$ y $P3$, relacionados entre sí, dan lugar al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{array} \right\} \text{ donde } x, y, z, \text{ son las ventas de los productos } P1, P2 \text{ y } P3, \text{ respectivamente.}$$

Calcula las ventas x , y , z para estos tres productos. Clasifica el sistema. (2 pt.)

4. El precio de la pensión completa en un hotel es de 30 € por persona y día. A los niños menores de 10 años se les cobra el 50 %, y a las personas mayores de 65, el 70 % de ese precio. Determina el número de niños menores de 10 años y de personas mayores de 65 que había cierto día en el hotel, si se sabe que: había 200 personas, el número de mayores de 65 era igual al 25 % del número de niños y se recaudaron 4620 € por las pensiones completas de todas ellas. (3 pt.)

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & -c \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de a , b y c que verifican $B - C = A \cdot B$

(0,75 pt.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & -c \end{pmatrix}, B - C = A \cdot B$$

$$B - C = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1-c \\ 0 & -1+c \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B - C = A \cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix} b & 1-c \\ 0 & -1+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} b=b \Rightarrow b \in \mathbb{R} \\ -1+c=1 \Rightarrow c=2 \\ \cancel{1-c} = \cancel{1-a} \Rightarrow a=c=2 \end{array} \right.$$

b) Calcula el valor de a para que la matriz $\begin{pmatrix} a & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4a \end{pmatrix}$ no tenga inversa. (0,75 pt.)

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4a \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4a \end{vmatrix} = 0$$

$$a \cdot (-4a + 6) - 4(4a - 9) = 0$$

$$-4a^2 + 6a - 16a + 36 = 0$$

$$4a^2 + 10a - 36 = 0$$

$$2a^2 + 5a - 18 = 0$$

$$a = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-18)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 13}{4} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2} \\ a_2 = 2 \end{array} \right.$$

c) Se sabe que $\begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$.

Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ m+1 & n+2 & p+3 \end{vmatrix}$

(0,5 pt.)

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ m+1 & n+2 & p+3 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_1} \begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot (-5) = -\frac{5}{3}$$

-5 (enunciado)

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

- a) Calcula el rango de A en función del parámetro a . (0,5 pt.)
 b) Para $a = 2$ calcula la matriz inversa de A y la matriz inversa de B . (1,5 pt.)
 c) Despeja X de la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B = C$ (0,5 pt.)
 d) Calcula la matriz X . (0,5 pt.)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$, Calculamos el determinante. $\begin{cases} \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow \text{Rg } A < 3 \\ \text{Si } |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rg } A = 3 \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = -1 - (1 - a^2) = -2 + a^2$$

Si $|A| = 0 \Rightarrow -2 + a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = \pm\sqrt{2} \text{ En este caso el rango es 2 porque } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \\ a \neq \pm\sqrt{2} \text{ El rango es 3 porque } |A| \neq 0 \end{cases}$

b) Si $a = 2$ calcula A^{-1} y B^{-1} . $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - (1 - 2^2) = -2 + 4 = 2 \neq 0$$

luego tiene inversa.

Para calcular la inversa: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [\text{Adj}(A)]^t$, La matriz adjunta:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la inversa de $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \quad \text{luego tiene inversa.}$$

$$\text{La matriz adjunta: } \left. \begin{array}{l} B_{11} = 2, B_{12} = 1 \\ B_{21} = 1, B_{22} = 2 \end{array} \right\} \text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, [\text{Adj}(B)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot [\text{Adj}(B)]^t = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

c) $A \cdot X \cdot B = C$, Despejamos X.

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_I = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

$$\text{d) Calculamos X siendo } C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

Comprobación: $A \cdot X \cdot B = C$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Q.E.D.}$$

3. Las ventas de tres productos $P1$, $P2$ y $P3$, relacionados entre sí, dan lugar al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{array} \right\} \text{ donde } x, y, z, \text{ son las ventas de los productos } P1, P2 \text{ y } P3, \text{ respectivamente.}$$

Calcula las ventas x, y, z para estos tres productos. Clasifica el sistema.

(2 pt.)

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ F_2 \rightarrow F_2 - F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2 \cdot F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \end{array} \right)$$

Despejamos directamente de la 2ª fila.

$$F_2: -2 \cdot z = -6 \Rightarrow z = 3$$

$$F_3: -3y - z = -9$$

$$-3y - 3 = -9$$

$$-3y = -6 \Rightarrow y = 2$$

$$F_1: x + y + z = 6$$

$$x + 2 + 3 = 6 \Rightarrow x = 1$$

Sistema compatible determinado

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{ventas de } P_1 \\ \text{ventas de } P_2 \\ \text{ventas de } P_3 \end{array}$$

4. El precio de la pensión completa en un hotel es de 30 € por persona y día. A los niños menores de 10 años se les cobra el 50 %, y a las personas mayores de 65, el 70 % de ese precio. Determina el número de niños menores de 10 años y de personas mayores de 65 que había cierto día en el hotel, si se sabe que: había 200 personas, el número de mayores de 65 era igual al 25 % del número de niños y se recaudaron 4620 € por las pensiones completas de todas ellas. (3 pt.)

$$X \equiv \text{n}^{\circ} \text{ de niños menores de 10 años (50\% del precio)} \quad 30 \cdot \frac{50}{100} = 15 \text{ €}$$

$$y \equiv \text{n}^{\circ} \text{ de mayores de 65 años (70\% del precio)} \quad 30 \cdot \frac{70}{100} = 21 \text{ €}$$

$$z \equiv \text{resto de personas. Precio 30 €}$$

$$\left. \begin{array}{l} X + y + z = 200 \\ y = \frac{25}{100} \cdot X \\ 15 \cdot X + 21 \cdot y + 30 \cdot z = 4620 \end{array} \right\} \text{Simplificamos}$$

$$\left. \begin{array}{l} X + y + z = 200 \\ X - 4y = 0 \\ 5 \cdot X + 7 \cdot y + 10 \cdot z = 1540 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\text{Resto } (1) - (2) \text{ y despejo } z \Rightarrow 5 \cdot y + z = 200 \Rightarrow z = 200 - 5y$$

$$\text{En } (2) \text{ despejo } x = 4y ;$$

Sustituimos en (3):

$$5 \cdot X + 7 \cdot y + 10 \cdot z = 1540$$

$$5 \cdot 4y + 7 \cdot y + 10 \cdot (200 - 5y) = 1540$$

$$20y + 7y + 2000 - 50y = 1540$$

$$2000 - 1540 = 50y - 27y$$

$$460 = 23y$$

$$y = \frac{460}{23} = 20$$

$$x = 4y = 4 \cdot 20 = 80$$

$$z = 200 - 5y = 200 - 5 \cdot 20 = 100$$

Sistema compatible determinado

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 20 \\ 100 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{niños } < 10 \\ \text{mayores } > 65 \\ \text{resto (10 a 65)} \end{array}$$