

MATRICES Y DETERMINANTES

1. **PROBLEMA:** Los precios, en euros, de las entradas de un parque temático para adultos (AD) y Niños y Jubilados (NJ) en Temporada Alta (TA), Temporada Media (TM) y Temporada Baja (TB) vienen dados por la matriz P . El número de asistentes, en miles, a dicho parque a lo largo de un año viene dado por la matriz N .

$$P = \begin{array}{c|ccc} & TA & TM & TB \\ \hline AD & 25 & 20 & 14 \\ NJ & 20 & 15 & 7 \end{array}$$

$$N = \begin{array}{c|cc} & AD & NJ \\ \hline TA & 500 & 600 \\ TM & 350 & 300 \\ TB & 125 & 100 \end{array}$$

- a) Obtener, si es posible, las matrices $R_1 = P \cdot N$ y $R_2 = N \cdot P$. (0,75 pt.)
 - b) ¿A cuántos euros asciende la **recaudación total correspondiente a los Niños y Jubilados**? ¿Y la correspondiente a la **Temporada Baja**? (0,75 pt.)
 - c) ¿Qué **elemento** de R_1 o de R_2 nos proporciona información sobre la **recaudación total correspondiente a los Adultos**? (0,75 pt.)
 - d) ¿A cuántos euros asciende la **recaudación total**? (0,75 pt.)
2. Considera la **ecuación matricial** $X + XA + B^t = 2C$, en donde las matrices A , B y C vienen dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y donde B^t denota la matriz traspuesta de B .

- a) Despeja la matriz X en la ecuación matricial. ¿Qué **orden** tiene? (0,75 pt.)
 - b) **Calcula** la matriz $(2C - B^t)$ y la inversa de la matriz $I + A$. (1,5 pt.)
 - c) **Resuelve** la **ecuación matricial** obteniendo el valor de la matriz X . (0,75 pt.)
3. **Resuelve** los siguientes apartados:

a) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 2$, **calcula** $\begin{vmatrix} 3+x & 8+y & 4+z \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8/3 & 4/3 \end{vmatrix}$ (1 pt.)

- b) Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$. **Calcula todas las matrices** que **verifican la ecuación matricial** $X^2 = 2 \cdot X$. (1 pt.)

4. Resuelve y clasifica el siguiente sistema utilizando el método de Gauss:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 3z = 4 \\ 2x - y - z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 10 \end{array} \right\} \quad (2 \text{ pt})$$

1. **PROBLEMA:** Los precios, en euros, de las entradas de un parque temático para adultos (AD) y Niños y Jubilados (NJ) en Temporada Alta (TA), Temporada Media (TM) y Temporada Baja (TB) vienen dados por la matriz P. El número de asistentes, en miles, a dicho parque a lo largo de un año viene dado por la matriz N.

$$P = \begin{array}{c|ccc} & TA & TM & TB \\ \hline AD & 25 & 20 & 14 \\ NJ & 20 & 15 & 7 \end{array} \quad N = \begin{array}{c|cc} & AD & NJ \\ \hline TA & 500 & 600 \\ TM & 350 & 300 \\ TB & 125 & 100 \end{array}$$

- a) Obtener, si es posible, las matrices $R_1 = P \cdot N$ y $R_2 = N \cdot P$. (0,75 pt.)
b) ¿A cuántos euros asciende la recaudación total correspondiente a los Niños y Jubilados? ¿Y la correspondiente a la Temporada Baja? (0,75 pt.)
c) ¿Qué elemento de R_1 o de R_2 nos proporciona información sobre la recaudación total correspondiente a los Adultos? (0,75 pt.)
d) ¿A cuántos euros asciende la recaudación total? (0,75 pt.)

$$\begin{aligned} \text{a) } R_1 = P \cdot N &= \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc} TA & TM & TB \\ \hline 25 & 20 & 14 \\ 20 & 15 & 7 \end{array} & \cdot & \begin{pmatrix} \begin{array}{cc} AD & NJ \\ \hline 500 & 600 \\ 350 & 300 \\ 125 & 100 \end{array} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{array}{cc} AD & NJ \\ \hline 21250 & 22400 \\ 16125 & 17200 \end{array} \end{pmatrix} \\ & \quad \quad \quad 2 \times 3 \quad \quad \quad 3 \times 2 \quad \quad \quad 2 \times 2 \\ \\ R_2 = N \cdot P &= \begin{pmatrix} \begin{array}{cc} AD & NJ \\ \hline 500 & 600 \\ 350 & 300 \\ 125 & 100 \end{array} & \cdot & \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc} TA & TM & TB \\ \hline 25 & 20 & 14 \\ 20 & 15 & 7 \end{array} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc} TA & TM & TB \\ \hline 24500 & 19000 & 11200 \\ 14750 & 11500 & 7000 \\ 5125 & 4000 & 2450 \end{array} \end{pmatrix} \\ & \quad \quad \quad 3 \times 2 \quad \quad \quad 2 \times 3 \quad \quad \quad 3 \times 3 \end{aligned}$$

Como los asistentes están expresados en miles, para la recaudación, multiplicamos por 1000:

- b) $R_1(2,2) = (20 \cdot 600 + 15 \cdot 300 + 7 \cdot 100) \cdot 1000 = 17200000 \text{ €}$ Recaudación total NJ.
 $R_2(3,3) = (125 \cdot 14 + 100 \cdot 7) \cdot 1000 = 2450000 \text{ €}$ Recaudación total TB.
c) $R_1(1,1) = (25 \cdot 500 + 20 \cdot 350 + 14 \cdot 125) \cdot 1000 = 21250000 \text{ €}$ Recaudación total AD.
d) $(21250 + 17200) \cdot 1000 = 38450000 \text{ €}$
 $\quad \quad \quad AD \quad \quad \quad NJ$
 $(24500 + 11500 + 5125) \cdot 1000 = 38450000 \text{ €}$
 $\quad \quad \quad TA \quad \quad \quad TM \quad \quad \quad TB$

2. Considera la **ecuación matricial** $X + XA + B' = 2C$, en donde las matrices A , B y C vienen dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y donde B' denota la matriz traspuesta de B .

- a) Despeja la matriz X en la ecuación matricial. ¿Qué **orden** tiene? (0,75 pt.)
b) **Calcula** la matriz $(2C - B')$ y la inversa de la matriz $I + A$. (1,5 pt.)
c) **Resuelve** la **ecuación matricial** obteniendo el valor de la matriz X . (0,75 pt.)

$$\begin{array}{l|l} \text{a)} & X + X \cdot A + B^t = 2C \\ & X + X \cdot A = 2C - B^t \\ & X \cdot (I + A) = 2C - B^t \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} X \cdot (I + A)(I + A)^{-1} = (2C - B^t) \cdot (I + A)^{-1} \\ X = (2C - B^t) \cdot (I + A)^{-1} \\ \begin{matrix} 2 \times 3 & 2 \times 3 & 3 \times 3 \end{matrix} \end{array} \right.$$

$$\text{b)} \quad 2C - B^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)} \quad Z = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Para calcular la inversa: $Z^{-1} = \frac{1}{|Z|} \cdot [\text{Adj}(Z)]^t$, $|Z| = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

$$\text{Adj}(Z) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & 6 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2/3 \\ 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d)} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2/3 \\ 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Resuelve los siguientes apartados:

a) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 2$, calcula $\begin{vmatrix} 3+x & 8+y & 4+z \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8/3 & 4/3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3+x & 8+y & 4+z \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8/3 & 4/3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3+x & 8+y & 4+z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 8/3 & 4/3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 3+x & 8+y & 4+z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} =$$

$F_1 \rightarrow F_1 - F_3$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix}}_{2 \text{ (enunciado)}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$$

b) Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calcula **todas las matrices** que verifican la ecuación matricial $X^2 = 2 \cdot X$. (1 pt.)

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab+bc & c^2 \end{pmatrix}$$

$$X^2 = 2 \cdot X = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix} \quad \text{Igualamos coeficientes}$$

$$a^2 = 2a \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow a = 0, a = 2$$

$$0 = 0$$

$$c^2 = 2c \Rightarrow c^2 - 2c = 0 \Rightarrow c(c-2) = 0 \Rightarrow c = 0, c = 2$$

$$ab+bc = 2b \Rightarrow (a+c) \cdot \cancel{b} = 2\cancel{b} \Rightarrow b \in \mathbb{R} \text{ (sirve cualquier valor de } b \text{)}$$

$a + c = 2$ De las condiciones anteriores se deduce:

$$\text{Si } a = 0 \Rightarrow c = 2$$

$$\text{Si } c = 0 \Rightarrow a = 2$$

Luego, tenemos 2 soluciones indeterminadas:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{siendo } b \in \mathbb{R}$$

4. Resuelve y clasifica el siguiente sistema utilizando el método de Gauss:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 3z = 4 \\ 2x - y - z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 10 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 6 \\ 3 & -2 & 2 & 10 \end{array} \right) = \begin{array}{l} \uparrow (2 \text{ pt}) \\ F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1 \end{array}$$
$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_2 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$0z = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$y - 7z = -2 \Rightarrow y = -2 + 7z$$

$$x - y + 3z = 4 \Rightarrow$$

$$x = 4 + y - 3z = 4 + (-2 + 7z) - 3z = 2 + 4z$$

Sistema compatible indeterminado

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 4z \\ -2 + 7z \\ z \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$$